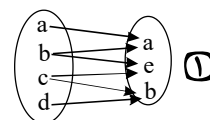
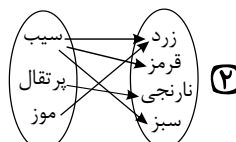
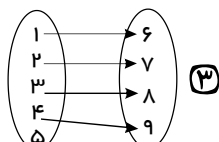
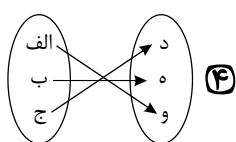
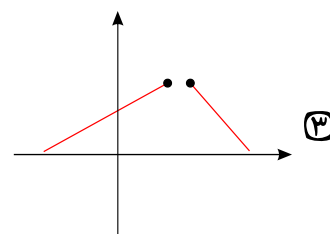
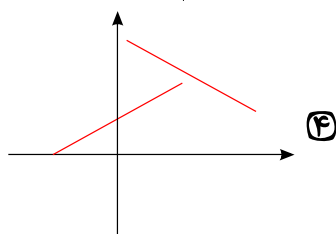
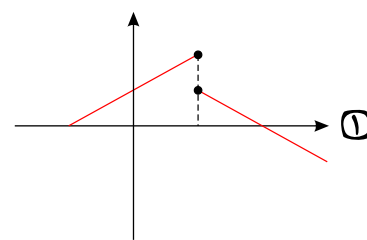
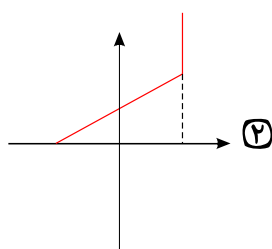


نوید پورزکی

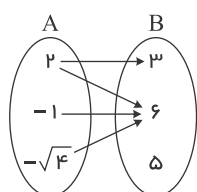
۱- کدام رابطه تابع است؟



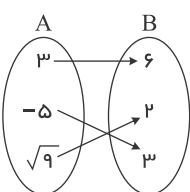
۲- کدام شکل نمودار یک تابع است؟



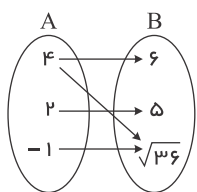
۳- چه تعداد از نمودارهای پیکانی زیر نشان‌دهنده تابع هستند؟



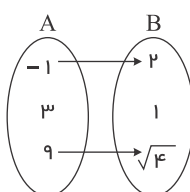
(الف)



(ب)



(پ)



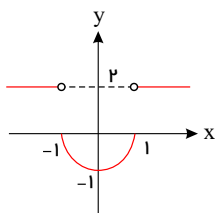
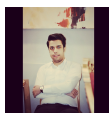
(ت)

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳



۴- باتوجه به نمودار مقابل، حاصل $f(f(-1)) - f(f(0))$ کدام است؟

۱ (۲)

۱ (۱) صفر

۲ (۴)

۳ (۳) -۱

۵- اگر مجموعه $\{(1, 2), (-1, m-1), (-1, 2m)\}$ یک تابع باشد؛ m کدام است؟

۱ (۴) -۱

۳ (۳) $-\frac{1}{2}$

۲ (۲) $\frac{1}{2}$

۱ (۱)

۶- باتوجه به تابع $f = \{(1, -1)(3, -2)(5, 4)(-1, 3)\}$ ، حاصل $f(f(1)) - f(f(-1))$ کدام است؟

۵ (۴)

۳ (۳) -۱

۲ (۲)

۳ (۱)

۷- در تابع $f = \{(4, m+n), (1, 2m-1), (2, 3m+n), (3, m-2n)\}$ ، داریم $f(1) = f(2) = 5$ ، حاصل

$f(4) + f(3)$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)



۸- رابطه $f = \{(m^2 - 3m, 5), (m + 1, 4), (-2, 5), (2, 6)\}$ یک تابع است. مقدار $m^3 + 7m$ کدام است؟

- ① -۸ ② ۸ ③ -۲۲ ④ ۲۲

۹- تابع $f = \{(2, -7), (3, 2), (-7, 5), (5, -2)\}$ است. در این صورت اگر $f(f(x)) = -2$ باشد، مقدار x کدام است؟

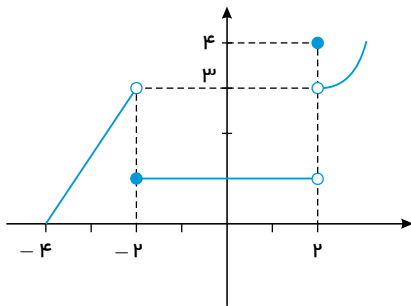
- ① ۲ ② -۷ ③ ۵ ④ ۳

۱۰- رابطه $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, 2x + y \leq 7\}$ دارای چند زوج مرتب است؟

- ① ۵ ② ۶ ③ ۸ ④ ۹

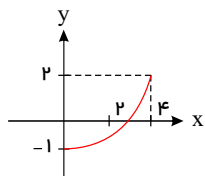
۱۱- با توجه به تابع $f = \{(1, -4), (2, 3), (3, 4), (-1, 2)\}$ ، حاصل کدام یک از گزینه‌های زیر برابر با ۵ است؟

- ① $f(1) - f(-1)$ ② $f(2) - f(1)$ ③ $f(3) + f(2)$ ④ $f(2) + f(-1)$



۱۲- نمودار f به شکل روبه‌رو است. مقدار $f(-f(2)) + f(2f(0))$ چند است؟

- ① ۴
② ۳
③ ۲
④ صفر



۱۳- اشتراک دامنه و برد تابع f که نمودار آن به شکل مقابل می‌باشد، کدام است؟

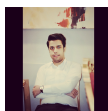
- ① $[-1, 2]$
② $[0, 4]$
③ $[2, 4]$
④ $[0, 2]$

۱۴- اگر تعداد اعضای دامنه‌ی تابع $f = \{(1, 2), (2, 2), (3, a^2), (4, 1)\}$ دو واحد از تعداد اعضاء برد آن بیشتر باشد، a چند مقدار می‌تواند اختیار کند؟

- ① ۴
② ۳
③ ۲
④ ۱

۱۵- اگر برد تابع $f(x) = 3x - 2$ بازه‌ی $[-3, 2]$ باشد، دامنه‌ی این تابع کدام است؟

- ① $[-11, 4]$
② $[-3, 2]$
③ $\left[\frac{-1}{3}, \frac{4}{3}\right]$
④ $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right]$



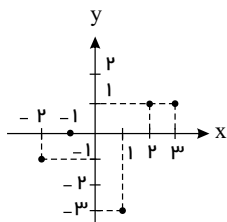
۱۶- دامنه و برد تابع مقابل، در کدام گزینه به درستی آمده است؟

① دامنه = $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ برد = $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

② دامنه = $\{-2, -1, 1, 2, 3\}$ برد = $\{1, 0, -1, -3\}$

③ دامنه = $\{-2, -1, 2, 3\}$ برد = $\{1, 0, -1\}$

④ دامنه = $\{-1, 0, 1, -3\}$ برد = $\{-2, -1, 1, 2, 3\}$



۱۷- دامنه تابع $f = \{(2, m+1), (n, 2n), (2, 2m-5), (m-3, 6)\}$ سه عضو و برد آن دو عضو دارد. مقدار $2m + 4n$ کدام است؟

④ ۲۸

③ ۲۶

② ۲۴

① ۲۲

۱۸- ضابطه هر تابع را داده‌ایم. کدام تابع می‌تواند روی اعداد طبیعی تعریف شود؟

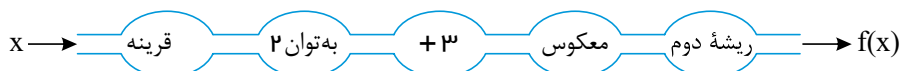
④ $y = \frac{1}{3-x}$

③ $y = \sqrt{3-x}$

② $y = \frac{1}{3+x}$

① $y = \sqrt{x-3}$

۱۹- ماشین f مطابق با نمودار زیر عمل می‌کند. برای آن که f درست کار کند، ورودی آن از چه بازه‌ای انتخاب شود؟

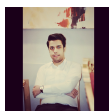


④ $\mathbb{R}$

③ $[0, 1]$

② $[-1, 1]$

① $[0, +\infty)$



۲۰- برد تابع $f(x) = 2x + 7$ با دامنه $[-1, 1]$ کدام است؟

- ① $[-1, 1]$ ② $[-9, -5]$ ③ $[5, 9]$ ④ $[-1, 9]$

۲۱- تابع $f(x) = -2x + 7$ با دامنه $D_f = (-3, 4]$ مفروض است. برد تابع شامل چند عدد صحیح است؟

- ① ۱۳ ② ۱۵ ③ ۱۶ ④ ۱۴

۲۲- اگر برد تابع $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ برابر $(3, 6)$ باشد، دامنه این تابع کدام است؟

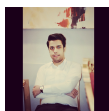
- ① $(4, 10)$ ② $(5, 8)$ ③ $(6, 12)$ ④ $(3, 6)$

۲۳- کدام گزینه نادرست است؟

- ① تابعی وجود دارد که دامنه آن نامتناهی اما برد آن متناهی باشد. ② تابعی وجود دارد که دامنه آن یک عضو بیشتر از بردش داشته باشد.
③ تابعی وجود دارد که دامنه آن یک عضو کمتر از بردش داشته باشد. ④ تابعی وجود دارد که دامنه و برد آن نامتناهی باشد.

۲۴- اگر عدد ۲ در دامنه $f = \{(a, 1), (3, 3), (4, a^2)\}$ باشد، کدام عدد در برد این تابع نیست؟

- ① ۴ ② ۳ ③ ۲ ④ ۱



۲۵- اگر در تابع $f(x) = 2x - 1$ داشته باشیم $f(a) - f(2a) = -2$ ، آنگاه مقدار a کدام است؟

- ① صفر ② ۱ ③ -۱ ④ ۲

۲۶- نمودارهای دو تابع $f(x) = x^2 - 1$ و $f(x - 2)$ در نقطه‌ای با کدام طول متقاطع‌اند؟

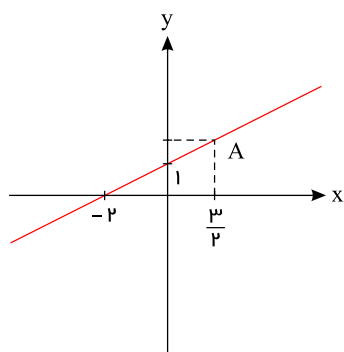
- ① ۳ ② -۱ ③ ۲ ④ ۱

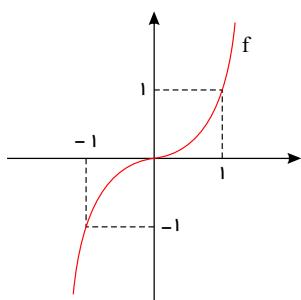
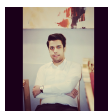
۲۷- خط گذرا بر نقطه‌ی $(-2, 4)$ با شیب ۲ و منحنی $y = x^2$ در دو نقطه‌ی A و B مشترک هستند. مختصات وسط AB ، کدام است؟

- ① $(1, 8)$ ② $(1, 10)$ ③ $(2, 9)$ ④ $(2, 10)$

۲۸- باتوجه به نمودار تابع خطی f که در شکل روبرو رسم شده است؛ عرض نقطه‌ی A کدام است؟

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{7}{4}$





۲۹- اگر در تابع مقابل، $f(1) + f(-1) = f(0) + \frac{m}{2}$ باشد؛ آنگاه m کدام است؟

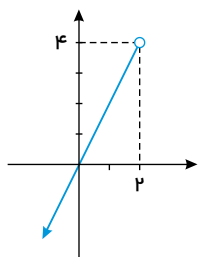
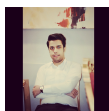
- ① صفر
② ۱
③ ۲
④ ۳

۳۰- تابع خطی $f(x) = (a - 2)x^2 + 2ax + b$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند، $f(b - a)$ کدام است؟

- ① ۴۴ ② ۲۸ ③ -۶۸ ④ -۵۲

۳۱- شمعی با سرعت ثابت ۴ میلی‌متر در دقیقه می‌سوزد. اگر ساعت ۸ صبح روشن شده باشد و ارتفاع اولیه آن ۲۵ سانتی‌متر باشد، ارتفاع شمع پس از t دقیقه بر حسب t چقدر است؟

- ① $h(t) = 4t + 25$ ② $h(t) = 25 - 4t$ ③ $h(t) = 250 - 4t$ ④ $h(t) = \frac{25 - 4t}{4}$



۳۲- نمودار تابع f به شکل روبه‌رو است. اگر $f(f(x)) = 1$ باشد، مقدار x چند است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{4}$

۳) $-\frac{1}{2}$

۴) $-\frac{1}{4}$

۳۳- اگر $f(x) = \begin{cases} 3x - b & x \leq 1 \\ ax + a + 1 & x > 1 \end{cases}$ یک تابع خطی باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) -7

۲) 7

۳) 1

۴) -1

۳۴- به ازای کدام مقدار a منحنی به معادله $y = x^2 + 5x + 4$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس است؟

۱) 1

۲) 4

۳) 5

۴) 9

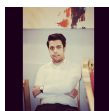
۳۵- به ازای چند مقدار m نمودار تابع $y = (3 - \frac{x}{m})(mx - 1)$ مماس بر محور x هاست؟

۱) 2

۲) 1

۳) 3

۴) صفر



۳۶- اگر $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ باشد، مقدار $g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ کدام است؟

(۴) $\sqrt{2}$

(۳) ۱

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۱) $\frac{1}{2}$

۳۷- به ازای کدام مقادیر m خط به معادله $y = 2x - 4$ بر منحنی به معادله $y = (m+3)x^2 + mx$ مماس است؟

(۴) ۴ و ۱۱

(۳) -۲ و ۲۲

(۲) ۲ و ۲۲

(۱) -۲ و ۱۸

۳۸- اگر $f(x+1) = x^2 - 2x + 1$ باشد؛ آنگاه تابع $f(x)$ کدام است؟

(۴) $(x+2)^2$

(۳) $(x^2 - 2x)$

(۲) $(x-1)^2$

(۱) $(x-2)^2$

۳۹- منحنی نامعادله $y = (2x+1)(x+8)$ با خطوط $y = mx$ نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

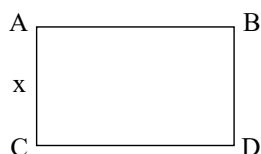
(۴) $5 < m < 13$

(۳) $7 < m < 15$

(۲) $15 < m < 23$

(۱) $9 < m < 25$

۴۰- طول مستطیل $ABCD$ ، ۴ واحد از عرض آن بیشتر است، کدام رابطه مساحت مستطیل را به عنوان تابعی از عرض آن بیان می‌کند؟

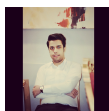


(۲) $f(x) = x^2 + 4x$

(۱) $f(x) = x^2 - 4x$

(۴) $f(x) = 2x - 4$

(۳) $f(x) = x + 4$



۴۱- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax + b$ و خط به معادله $y + 2x = b$ در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور x ها متقاطع‌اند؛ طول دیگر نقاط تلاقی این منحنی و خط، کدام است؟

- ① ۱ و ۲ - ② ۳ و -۱ ③ -۱ و ۰ ④ ۲ و ۰

۴۲- در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 3$ حاصل $f(1 + \sqrt{2}) - f(2)$ کدام است؟

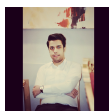
- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۴۳- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -۶ قطع کرده و از نقطه $(-2, -6)$ می‌گذرد، $f(-1)$ کدام است؟

- ① -۸ ② -۷ ③ -۵ ④ -۴

۴۴- دو تابع $f(x) = x - \sqrt{2x - 1}$ و $g = \{(0, 3), (5, 1), (2, 5)\}$ مفروض‌اند $f(g(2))$ کدام است؟

- ① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳



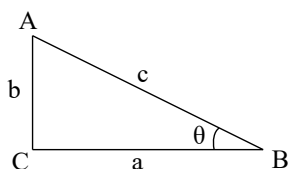
۴۵- تابع چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + ax + b$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -2 قطع می‌کند. اگر $f(-1) = 4$ باشد، حاصل $f(2)$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 18 (۳) -14 (۴) 4

۴۶- اگر $f(x - 3) = x^2 - 4x + 5$ باشد، آنگاه $f(1 - x)$ کدام است؟

- (۱) $x^2 + 1$ (۲) $x^2 + 3$ (۳) $x^2 + 4x + 5$ (۴) $x^2 - 4x + 5$

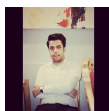
۴۷- تابع $f = \{(4, a), (b, a - 1), (2c, 2a + b - 1)\}$ یک تابع همانی است. در مثلث ABC مقدار $\cos \theta$ برابر کدام گزینه است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{6}{10}$ (۴) $\frac{8}{10}$

۴۸- f تابع همانی و g تابع ثابت است. اگر $\frac{f(4) - g(2)}{f(g(5))} = f(1)$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(10) - g(f(9))$ کدام است؟

- (۱) 10 (۲) 12 (۳) -1 (۴) -8



۴۹- اگر $f(x)$ تابعی ثابت و $g(x)$ تابعی همانی باشند و بدانیم $f(x) \times g(f(x)) + 1 = 2f(g(5))$ حاصل $f(g(3)) + g(f(3))$ کدام است؟

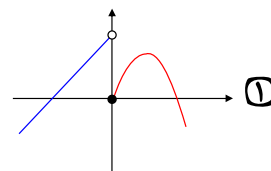
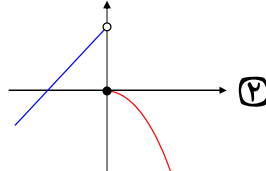
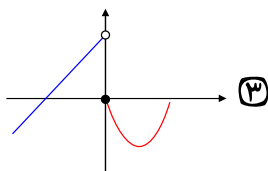
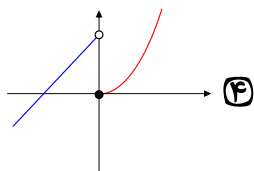
۲ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۵۰- کدام شکل قسمتی از نمودار تابع قطعه‌ای $f(x) = \begin{cases} 2+x & x < 0 \\ 2x-x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ است؟



۵۱- در بازه $1 < x < 2$ ، نمودار تابع $f(x) = |x-1| + |3-x| - |2x-1|$ بر نمودار کدام تابع خطی زیر منطبق است؟

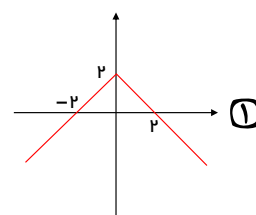
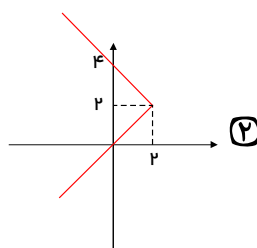
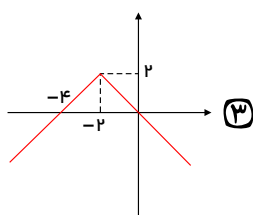
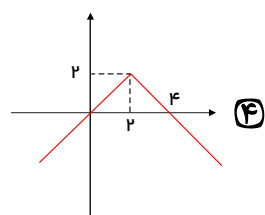
$y = 2x + 2$ (۴)

$y = -2x + 3$ (۳)

$y = 2x + 3$ (۲)

$y = 2x - 3$ (۱)

۵۲- نمودار هندسی تابع $y = -|x-2| + 2$ کدام است؟





۵۳- نمودار تابع $y = |x - 4| - 1$ محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۳

۵۴- اگر $f(x) = |x| + |x - 1|$ باشد، حاصل $f(\sqrt{3} - 1) + f(\sqrt{2} - 1)$ کدام است؟

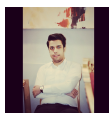
- ۱ (۱) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ۲ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ۴ (۴)

۵۵- مساحت محدود بین نمودارهای توابع $y = |x|$ و $3x + 3y = 12$ و محور x ها کدام است؟

- ۴ (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴)

۵۶- کمترین مقدار تابع $f(x) = |-x^2 - 2| + 3$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۱ (۴)



۵۷- مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $f(x) = |x - 1|$ و خطوط $x = 1$ و $x = -1$ و $y = 2$ ، کدام است؟

- ① $\frac{3}{2}$ ② ۲ ③ $\frac{5}{2}$ ④ ۳

۵۸- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y - |x| = 2$ از کدام نواحی مختصات می‌گذرد؟

- ① اول و دوم ② دوم و سوم ③ اول و سوم ④ سوم و چهارم

۵۹- اگر $f(x) = |3x - 5|$ و $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 2}$ باشد؛ مقدار $f(\frac{1}{2}) + g(\frac{1}{2})$ کدام است؟

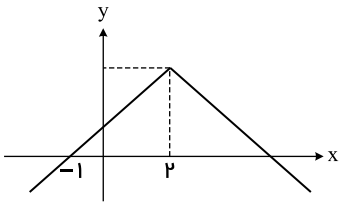
- ① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۶۰- اگر $f(x) = |x^2 - 5|$ و $g(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ باشد، آنگاه مقدار $\frac{1 + f(-2)}{g(2)}$ کدام است؟

- ① $\frac{5}{2}$ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵



۶۱- شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = k - |x + a|$ است. مقدار $2k - a$ کدام است؟



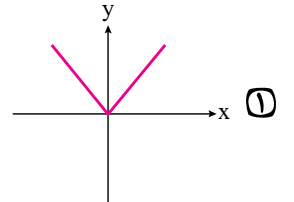
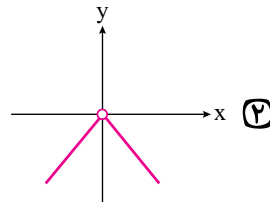
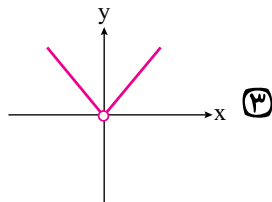
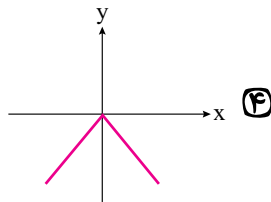
۸ (۲)

۶ (۴)

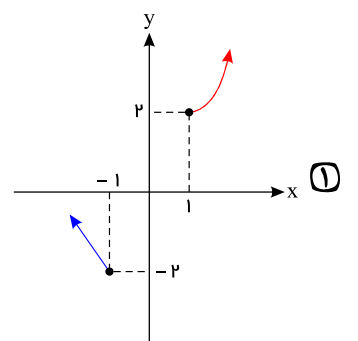
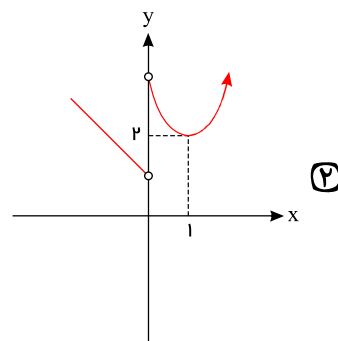
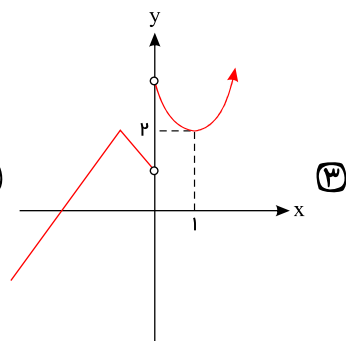
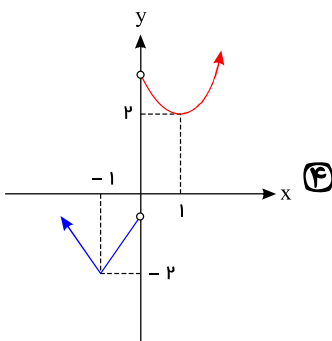
۴ (۱)

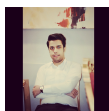
-۸ (۳)

۶۲- نمودار تابع $f(x) = \frac{|x^2|}{|-x|}$ کدام است؟



۶۳- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 2 & , x > 0 \\ |x+1| - 2 & , x < 0 \end{cases}$ کدام است؟





۶۴- کدام یک تابع است؟

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x > 0 \\ 2x & x < 3 \end{cases}$$

هیچکدام (۴)

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 2 \\ 3x & x < 4 \end{cases}$$

هر دو (۳)

(۲) $g(x)$

(۱) $f(x)$

۶۵- در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 0 \\ 2x + 3 & x < 0 \end{cases}$ ، $f(f(-1))$ ، کدام است؟

(۴) صفر

(۳) -۱

(۲) ۵

(۱) ۱

۶۶- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x + 4} & x > 3 \\ 2x + 3 & x \leq 3 \end{cases}$ ، مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟

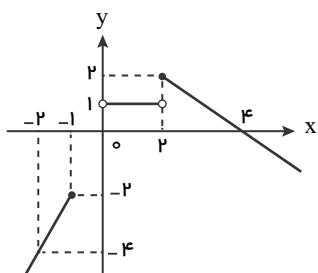
(۴) ۹

(۳) ۸

(۲) ۷

(۱) ۶

۶۷- نمودار یک تابع قطعه‌ای شکل روبه‌رو است. حاصل $f(-2) + f(2) + f(6)$ کدام است؟

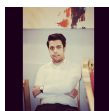


(۱) -۶

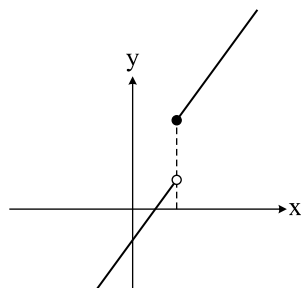
(۲) -۴

(۳) -۲

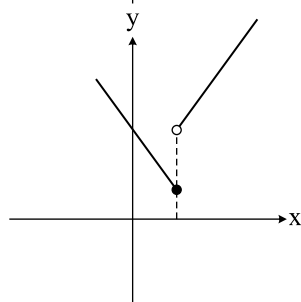
(۴) صفر



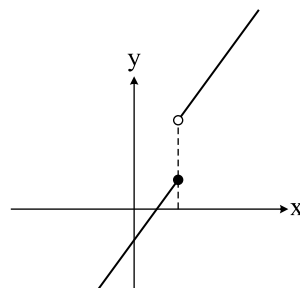
۶۸- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x + 3 & , x \geq 1 \\ -x + 2 & , x < 1 \end{cases}$ کدام است؟



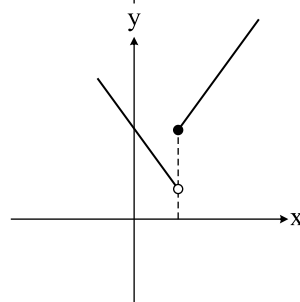
(۲)



(۴)



(۱)



(۳)

۶۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \geq 0 \\ x + 1 & x < 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $f(f(\sin^2 x))$ چقدر است؟ ($\cos x \neq 0$)

(۴) $-\cos^2 x$

(۳) $-\sin^2 x$

(۲) $\cos^2 x$

(۱) $\sin^2 x$

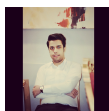
۷۰- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ x^2 - 1 & x < 2 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(\sin x + \cos x)$ برابر است با:

(۴) ۲

(۳) صفر

(۲) $2 + 2 \sin x \cos x$

(۱) $2 \sin x \cos x$



۷۱- نمودار سهمی به معادله $y = -x^2 + 1$ را دو واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. معادله آن پس از انتقال کدام است؟

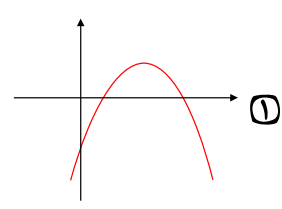
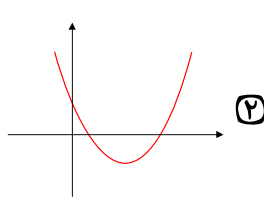
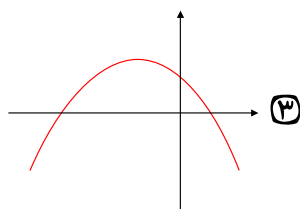
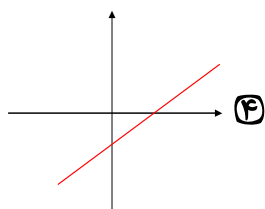
④ $y = x^2 - 4x + 2$

③ $y = x^2 + 4x + 2$

② $y = -x^2 - 4x - 2$

① $y = -x^2 - 4x + 2$

۷۲- نمایش هندسی تابع $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ کدام است؟



۷۳- نمودار تابع $y = x^2$ را ۳ واحد به سمت x های منفی و ۲ واحد به سمت y های مثبت انتقال می‌دهیم. معادله منحنی حاصل کدام است؟

④ $y = x^2 - 6x + 7$

③ $y = x^2 + 6x + 7$

② $y = x^2 - 6x + 11$

① $y = x^2 + 6x + 11$

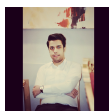
۷۴- نمودار سهمی $y = -x^2$ را ۱ واحد به سمت چپ و ۳ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. معادله آن به کدام صورت بیان می‌شود؟

④ $y = x^2 - 6x + 8$

③ $y = x^2 + 2x + 4$

② $y = -x^2 - 2x + 2$

① $y = -x^2 + 2x + 2$



۷۵- نموداری پس از انتقال رأس آن به اندازه‌ی یک واحد به راست و دو واحد به سمت بالا با ضابطه‌ی $g(x) = (x - 2)^2$ مشخص شده است. قبل از انتقال معادله‌ی آن کدام بوده است؟

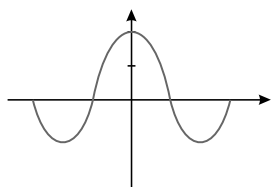
- ① $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ② $f(x) = x^2 - 2x - 1$ ③ $f(x) = (x - 3)^2 + 2$ ④ $f(x) = (x - 3)^2$

۷۶- نمودار تابع $f(x) = x^2$ را ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. معادله‌ی منحنی جدید کدام است؟

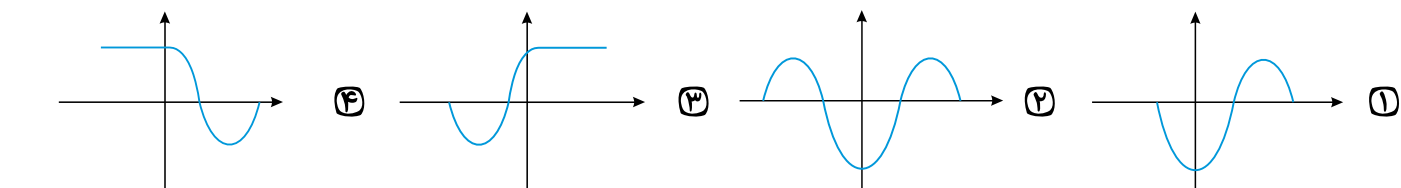
- ① $y = x^2 - 4x + 1$ ② $y = x^2 + 4x - 1$ ③ $y = x^2 - 2x + 3$ ④ $y = x^2 + 2x - 3$

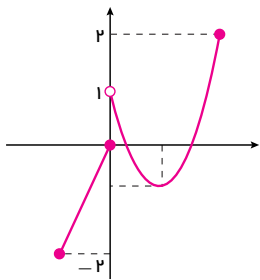
۷۷- برای رسم تابع $g(x) = x^2 + 4x + 3$ از روی نمودار $f(x) = x^2$ کدام مراحل زیر باید انجام شود؟

- ① نمودار $f(x)$ را ۲ واحد به سمت راست آورده و سپس نمودار حاصل را یک واحد به سمت بالا می‌آوریم.
 ② نمودار $f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ آورده و سپس نمودار حاصل را یک واحد به سمت پایین می‌آوریم.
 ③ نمودار $f(x)$ را ۴ واحد به سمت چپ آورده و سپس نمودار حاصل را ۳ واحد به سمت بالا می‌آوریم.
 ④ نمودار $f(x)$ را ۴ واحد به سمت راست آورده و سپس نمودار حاصل را ۳ واحد به سمت پایین می‌آوریم.



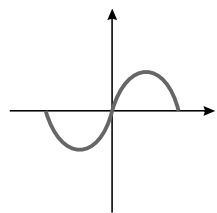
۷۸- اگر نمودار تابع f به شکل روبه‌رو باشد، نمودار $y = f(\frac{x + |x|}{2})$ به کدام شکل است؟



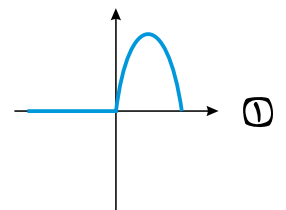
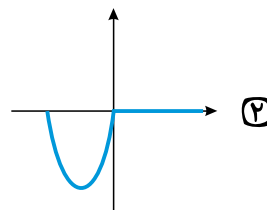
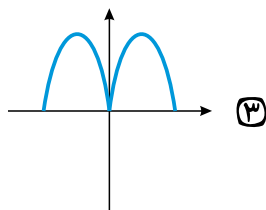
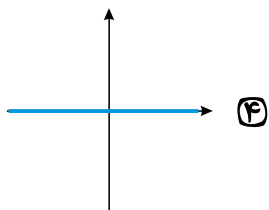


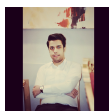
۷۹- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. برد تابع $y = 2 + f(x - 1)$ کدام است؟

- ① $[0, 4]$
- ② $[-1, 3]$
- ③ $[-3, 3]$
- ④ $[1, 5]$



۸۰- نمودار $y = f(x)$ به شکل روبه رو باشد، نمودار تابع $y = |f(x)| + f(x)$ به کدام شکل است؟





پاسخنامه تشریحی

۱- گزینه ۴

در نمایش نمودار پیکانی، از هر عضو مجموعه‌ی اول باید فقط یک پیکان خارج شود تا رابطه، تابع شود.

دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها:

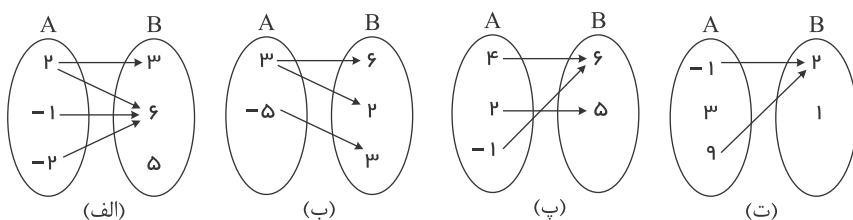
(۱) از b و c هر کدام بیش از یک پیکان خارج شده است.

(۲) از سیب بیش از یک پیکان خارج شده است.

(۳) از ۵ پیکانی خارج نشده است، پس تابع نیست.

۲- گزینه ۳ نمودار تابع، خطوط موازی محور y ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۳- گزینه ۲ با توجه به روابط $\sqrt{4} = 2$ و $\sqrt{36} = 6$ ، $\sqrt{9} = 3$ ، $-\sqrt{4} = -2$ نمودارهای پیکانی به صورت زیر هستند:



فقط مورد (پ) تابع است. در (الف) عضو ۲ از A به دو عضو از B متصل شده است و همچنین در (ب) عضو ۳ از A به دو عضو از B متصل شده است و در (ت) عضو ۳ از A به هیچ عضوی از B متصل نشده است. بنابراین موارد (الف)، (ب) و (ت) تابع نیستند.

۴- گزینه ۳

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow f(x) = y$$

$$f(-1) = 0$$

$$f(f(-1)) = f(0) = -1$$

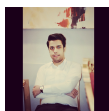
$$f(0) = -1$$

$$f(f(0)) = f(-1) = 0$$

$$f(f(-1)) - f(f(0)) = -1 - 0 = -1$$

گزینه ۴- ۵

رابطه‌ای تابع است که در آن هر x فقط و فقط با یک y رابطه داشته باشد.



$$\begin{cases} (-1, m-1) \\ (-1, 2m) \end{cases} \rightarrow m-1 = 2m \Rightarrow m = -1$$

۶- گزینه ۴

$$(a, b) \Leftrightarrow f(a) = b$$

$$f(1) = -1$$

$$f(f(1)) = f(-1) = 3$$

$$f(-1) = 3$$

$$f(f(-1)) = f(3) = -2$$

$$f(f(1)) - f(f(-1)) = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$$

۷- گزینه ۴

$$(a, b) \Leftrightarrow f(a) = b$$

$$f(1) = 2m - 1 = 5 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3$$

$$f(2) = 3m + n = 5 \xrightarrow{m=3} 9 + n = 5 \Rightarrow n = -4$$

$$f(4) = m + n = 3 - 4 = -1$$

$$f(3) = m - 2n = 3 - 2(-4) = 3 + 8 = 11$$

$$f(4) + f(3) = -1 + 11 = 10$$

۸- گزینه ۴ نکته: زوج مرتب‌های یک تابع نباید مؤلفه اول برابر داشته باشند و اگر مؤلفه‌های اول برابر باشند، باید مؤلفه‌های دوم نیز برابر باشند:

$$\begin{aligned} (m^2 - 3m, 5) \in f &\Rightarrow m^2 - 3m = -2 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases} \\ (-2, 5) \in f & \end{aligned}$$

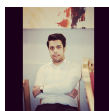
غیر قابل قبول $m = 1 \Rightarrow f$ تابع نیست $\Rightarrow (2, 6) \in f$, $(2, 4) \in f$

$m = 2 \Rightarrow (3, 4) \in f \Rightarrow f$ تابع است.

$$m = 2 \Rightarrow m^3 + 7m = 8 + 14 = 22$$

۹- گزینه ۲ ابتدا با توجه به زوج مرتب $(5, -2)$ می‌توان نوشت $f(5) = -2$. از طرفی در $f(x) = 5$ با توجه به زوج مرتب $(-7, 5)$ داریم:

$$\underbrace{f(f(x))}_5 = -2 \Rightarrow \underbrace{f(x)}_{-7} = 5 \Rightarrow x = -7$$



۱۰- گزینه ۴

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x + y \leq 7 \Rightarrow 2 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 5 \Rightarrow y = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2x + y \leq 7 \Rightarrow 4 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow y = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x + y \leq 7 \Rightarrow 6 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

۱۱- گزینه ۴

$$f(a) = b \Leftrightarrow (a, b)$$

$$۱) f(1) = -4$$

$$\Rightarrow f(1) - f(-1) = -4 - 2 = -6 \quad f(-1) = 2$$

$$۲) f(2) = 3$$

$$\Rightarrow f(2) - f(1) = 3 - (-4) = 3 + 4 = 7 \quad f(1) = -4$$

$$۳) f(3) = 4$$

$$\Rightarrow f(3) + f(2) = 7 \quad f(2) = 3$$

$$۴) f(2) = 3$$

$$\Rightarrow f(2) + f(-1) = 3 + 2 = 5 \quad f(-1) = 2$$

۱۲- گزینه ۱

$$f(-f(2)) + f(2f(0)) = f(-4) + f(2 \times 1) = 0 + 4 = 4$$

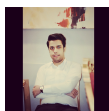
گزینه ۴- ۱۳

دامنه: محدوده x های تابع روی نمودار
برد: محدوده y های تابع روی نمودار

$$\begin{aligned} \text{دامنه} &= [0, 4] \\ \text{برد} &= [-1, 2] \end{aligned} \Rightarrow [0, 4] \cap [-1, 2] = [0, 2]$$

دامنه: مجموعه همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده‌ی تابع
برد: مجموعه همه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده‌ی تابع

۱۴- گزینه ۱



$$\text{دامنه} = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{برد} = \{2, 1, a^2\}$$

باتوجه به اینکه دامنه از برد، دو واحد بیشتر است، بنابراین a^2 باید یکی از اعداد ۱ و ۲ باشد.

$$\begin{cases} a^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ a = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \text{یا} \\ a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین a می‌تواند ۴ مقدار اختیار کند.

۱۵- گزینه ۳

$$-3 \leq 3x - 2 < 2$$

$$-1 \leq 3x < 4$$

$$-\frac{1}{3} \leq x < \frac{4}{3}$$

دامنه: مجموعه x های نقاط
برد: مجموعه y های نقاط

۱۶- گزینه ۲

۱۷- گزینه ۳ نکته: در نمایش زوج مرتبی، به مؤلفه‌های اول تشکیل‌دهنده یک تابع، دامنه و به مؤلفه‌های دوم تشکیل‌دهنده تابع، برد آن تابع می‌گوئیم.

$$\begin{aligned} (2, m+1) &\in f \Rightarrow m+1 = 2m-5 \Rightarrow m=6 \\ (2, 2m-5) &\in f \\ m=6 &\Rightarrow f = \{(2, 7), (n, 2n), (3, 6)\} \end{aligned}$$

چون برد تابع دو عضو دارد، پس باید $2n=6$ یا $2n=7$:

$$۱) 2n=7 \Rightarrow n=3.5 \Rightarrow f = \{(2, 7), (3.5, 7), (3, 6)\}$$

پس در این حالت، دامنه تابع $\{2, 3.5, 3\}$ و برد تابع $\{7, 6\}$ است.

$$۲) 2n=6 \Rightarrow n=3 \Rightarrow f = \{(2, 7), (3, 6)\}$$

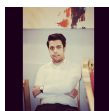
اما در این حالت، دامنه تابع $\{2, 3\}$ است که سه عضو ندارد. بنابراین $n=3.5$ و مقدار $2m+4n$ برابر ۲۶ است.

۱۸- گزینه ۲

$$۱) y = \sqrt{x-3} \quad x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \quad \times$$

$$۳) y = \sqrt{3-x} \quad 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \quad \times$$

$$۴) y = \frac{1}{3-x} \quad 3-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \quad \times$$



۱۹- گزینه ۴ ابتدا باید باتوجه به عملیاتی که در نمودار مربوط به ماشین f دیده می‌شود، ضابطه f را پیدا کنیم:

$$x \xrightarrow{\text{قرینه}} (-x) \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (-x)^2 \xrightarrow{+3} (-x)^2 + 3 \xrightarrow{\text{معکوس}} \left(\frac{1}{x^2 + 3}\right) \xrightarrow{\text{ریشه دوم}} y = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 3}}$$

$$\Rightarrow D_y = \frac{1}{x^2 + 3} \geq 0 \text{ همیشه برقرار است. } \rightarrow D_y = \mathbb{R}$$

۲۰- گزینه ۳

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$-2 \leq 2x \leq 2$$

$$5 \leq 2x + 7 \leq 9$$

۲۱- گزینه ۴ با توجه به دامنه و ضابطه تابع، برد آن را می‌یابیم:

$$f(x) = -2x + 7, \quad D_f = (-3, 4]$$

$$-3 < x \leq 4 \xrightarrow{\times(-2)} 6 > -2x \geq -8 \xrightarrow{+7} -8 + 7 \leq -2x + 7 < 6 + 7$$

$$\Rightarrow -1 \leq f(x) < 13 \Rightarrow R_f = [-1, 13)$$

اعداد صحیح برد تابع عبارتند از:

$$-1, 0, 1, 2, \dots, 12 \Rightarrow \text{تعداد} = 14$$

۲۲- گزینه ۱

$$3 < f(x) < 6 \Rightarrow 3 < \frac{1}{2}x + 1 < 6 \Rightarrow 2 < \frac{1}{2}x < 5 \Rightarrow 4 < x < 10$$

۲۳- گزینه ۳ مثال گزینه ۱: تابع ثابت $y = 1$

مثال گزینه ۲: تابعی با زوج مرتب‌های $(1, 1)$ و $(2, 1)$

مثال گزینه ۴: $y = x$

رد گزینه ۳: در هر تابع به ازای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y وجود دارد، یعنی حداکثر به تعداد مقادیر x ، مقدار برای y وجود دارد (امکان دارد به ازای تعدادی مقدار x مقدار y یکسان باشد).

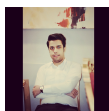
۲۴- گزینه ۳

دامنه: مجموعه همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده‌ی تابع
برد: مجموعه همه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده‌ی تابع

$$\text{برد} = \{1, 3, a^2\} \quad \text{دامنه} = \{a, 3, 4\}$$

$$a = 2 \Leftrightarrow \text{باتوجه به صورت سؤال و دامنه}$$

$$\text{برد} = \{1, 3, 4\}$$



۲۵- گزینه ۲ با توجه به ضابطه تابع f داریم:

$$f(a) = 2a - 1$$

$$f(2a) = 2(2a) - 1 = 4a - 1$$

$$\Rightarrow f(a) - f(2a) = 2a - 1 - (4a - 1) = 2a - 1 - 4a + 1 = -2a = -2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

۲۶- گزینه ۴

$$f(x-2) = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3$$

$$f(x) = f(x-2) \Rightarrow x^2 - 1 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

۲۷- گزینه ۲

$$y = ax + b \xrightarrow[\text{شیب } a=2]{(-2,4)} y = 2x + b \Rightarrow 4 = -4 + b \Rightarrow b = 8$$

$$y = 2x + 8$$

$$x^2 = 2x + 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$x = 4$$

$$x = -2$$

$$A(-2, 4)$$

$$B(4, 16)$$

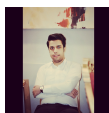
$$AB \text{ وسط} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{4+16}{2} \right) = (1, 10)$$

۲۸- گزینه ۴

$$\boxed{f(x) = ax + b : \text{فرم تابع خطی}}$$

$$f(x) = ax + b \begin{cases} (0,1) \longrightarrow 1 = b \\ (-2,0) \longrightarrow 0 = -2a + 1 \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \xrightarrow[A]{x=\frac{3}{2}} y = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$$



$$f(1) = 1$$

$$f(-1) = -1$$

$$f(0) = 0$$

$$1 + (-1) = 0 + \frac{m}{2}$$

$$0 = 0 + \frac{m}{2} \Rightarrow \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$$

۳۰- گزینه ۳ نکته: فرم کلی هر تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ است، بنابراین ضریب x^2 باید صفر باشد تا تابع موردنظر یک تابع خطی باشد:

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 4x + b$$

$$f(3) = 0 \Rightarrow 12 + b = 0 \Rightarrow b = -12$$

پس ضابطه $f(x)$ به صورت مقابل است:

$$f(x) = 4x - 12$$

$$a = 2, b = -12 \Rightarrow f(b - a) = f(-14) = 4 \times (-14) - 12 = -68$$

۳۱- گزینه ۳

$$f(x) = 250 - 4t \text{ ارتفاع شمع پس از } t \text{ دقیقه:}$$

۲۵ سانتی متر را به میلی متر تبدیل کردیم.

۳۲- گزینه ۲ ضابطه این تابع به شکل $y = 2x$ است (خطی که از مبدأ و نقطه $(2, 4)$ می گذرد).

$$f(f(x)) = 1 \Rightarrow f(2x) = 1 \Rightarrow 2(2x) = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

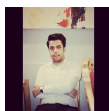
۳۳- گزینه ۴ تابع خطی یک تابع یک ضابطه ای به صورت $ax + b$ می باشد، بنابراین ضرایب ثابت و ضرایب x دو ضابطه باید یکسان باشد:

$$a = 3 \text{ و } a + 1 = -b \Rightarrow a = 3 \text{ و } b = -4 \Rightarrow a + b = -1$$

۳۴- گزینه ۴

وقتی دو منحنی بر هم مماس اند، آن ها را مساوی هم قرار می دهیم و Δ را مساوی صفر قرار می دهیم تا معادله ی تلاقی، یک جواب داشته باشد و در واقع $x_1 = x_2$ باشد.

$$\begin{cases} y = x \Rightarrow ay = ax \\ ay = x^2 + 5x + 4 \end{cases} \Rightarrow ax = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow x^2 + (5 - a)x + 4 = 0$$



$$x^2 + (5-a)x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} (5-a)^2 - 4(1)(4) = 0 \Rightarrow (5-a)^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (5-a)^2 = 16 \Rightarrow 5-a = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} 5-a = 4 \Rightarrow a = 1 \\ 5-a = -4 \Rightarrow a = 9 \end{cases}$$

از آنجایی که بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس است پس x باید مثبت باشد:

$$x^2 + (5-a)x + 4 = 0 \begin{cases} \xrightarrow{a=1} x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ غ.ق.} \\ \xrightarrow{a=9} x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ق.ق.} \end{cases}$$

پس $a = 9$

زمانی نمودار مماس بر محور x ها می‌شود که ریشه‌ی مضاعف داشته باشد یعنی $\Delta = 0$ به عبارتی هر دو ریشه باید با هم برابر باشند.

۳۵- گزینه ۱

$$y = \left(3 - \frac{x}{m}\right)(mx - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 - \frac{x}{m} = 0 \Rightarrow \frac{x}{m} = 3 \Rightarrow x = 3m \\ mx - 1 = 0 \Rightarrow mx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{m} \end{cases}$$

از آنجایی که هر دو ریشه با هم برابر باشند تا نمودار y مماس و محور x ها باشد:

$$3m = \frac{1}{m} \Rightarrow 3m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \quad m \text{ مقدار دو}$$

۳۶- گزینه ۱

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

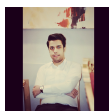
۳۷- گزینه ۳

وقتی دو منحنی بر هم مماس‌اند، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم و Δ را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا معادله‌ی تلاقی، یک جواب داشته باشد و در واقع $x_1 = x_2$ باشد.

$$\begin{cases} y = (m+3)x^2 + mx \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow (m+3)x^2 + mx = 2x - 4 \Rightarrow (m+3)x^2 + (m-2)x + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} (m-2)^2 - 4(m+3)(4) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 16m - 48 = 0$$

$$m^2 - 20m - 44 = 0 \Rightarrow (m-22)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 22 \\ m = -2 \end{cases}$$



۳۸- گزینه ۱

$$f(x+1) = (x-1)^2$$

$$x+1=t \Rightarrow x-1=t-2$$

$$f(t) = (t-2)^2 \xrightarrow{t \rightarrow x} f(x) = (x-2)^2$$

دو معادله را با هم مساوی قرار می‌دهیم و
چون تلاقی ندارند $\Leftrightarrow$ ریشه ندارد $\Leftrightarrow \Delta < 0$

۳۹- گزینه ۱

$$(2x+1)(x+8) = mx \Rightarrow 2x^2 + 16x + x + 8 = mx$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 17x - mx + 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 + (17-m)x + 8 = 0$$

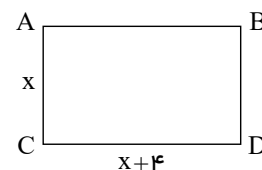
$$\Delta < 0 \Rightarrow (17-m)^2 - 4(2)(8) < 0 \Rightarrow (17-m)^2 - 64 < 0 \Rightarrow (17-m)^2 < 64$$

$$\Rightarrow -8 < 17-m < 8 \Rightarrow -25 < -m < -9 \Rightarrow \boxed{9 < m < 25}$$

۴۰- گزینه ۲

$$S_{\text{مستطیل}} = \text{عرض} \times \text{طول}$$

$$S = f(x) = (x+4)(x) = x^2 + 4x$$



۴۱- گزینه ۳ هر دو نمودار از نقطه‌ای به طول ۱ روی محور x ها می‌گذرند پس از نقطه‌ی $(1, 0)$ می‌گذرند:

$$y + 2x = b \xrightarrow{(1,0)} 0 + 2 = b \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

$$f(x) = x^3 + ax + b \xrightarrow{(1,0)} 1 + a + b = 0 \xrightarrow{b=2} \boxed{a = -3}$$

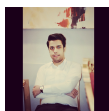
$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$y + 2x = 2$$

نقاط تلاقی:

$$x^3 - 3x + 2 = 2 - 2x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$



۴۲- گزینه ۱

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$f(2) = 2^2 - 2(2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3$$

$$\begin{aligned} f(1 + \sqrt{2}) &= (1 + \sqrt{2})^2 - 2(1 + \sqrt{2}) + 3 \\ &= 1 + 2 + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} + 3 = 4 \end{aligned}$$

$$f(1 + \sqrt{2}) - f(2) = 4 - 3 = 1$$

۴۳- گزینه ۱

$$(0, -6): f(0) = \boxed{c = -6}$$

$$(1, 0): a + b + c = a + b - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{a + b = 6} \Rightarrow \boxed{a - 6 = -b}$$

$$(-2, -6): 4a - 2b + c = 4a - 2b - 6 = -6 \Rightarrow \boxed{4a - 2b = 0} \Rightarrow 4a = 2b \Rightarrow \boxed{2a = b}$$

$$a - 6 = -b = -2a \Rightarrow a - 6 = -2a \Rightarrow \boxed{3a = 6} \Rightarrow \boxed{a = 2} \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$$

$$f(-1) = 2 - 4 - 6 = -8$$

۴۴- گزینه ۳ $(a, b) \Leftrightarrow f(a) = b$

$$g(2) = 5$$

$$f(g(2)) = f(5) = 5 - \sqrt{2 \times 5 - 1} = 5 - \sqrt{10 - 1} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

۴۵- گزینه ۱ برای یافتن نقطه برخورد تابع با محور y ها باید $x = 0$ را در تابع قرار دهیم، پس $f(0) = -2$ و داریم:

$$f(x) = 2x^2 + ax + b \Rightarrow f(0) = 0 + 0 + b = -2 \Rightarrow b = -2$$

$$f(x) = 2x^2 + ax - 2$$

چون $f(-1) = 4$ پس:

$$f(-1) = -2 - a - 2 = 4 \Rightarrow a = -8$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 8x - 2 \Rightarrow f(2) = 16 - 16 - 2 = -2$$

۴۶- گزینه ۴

$$f(x - 3) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1$$



$$f(x-3) = (x-2)^2 + 1$$

$$x-3 = t \Rightarrow x-2 = t+1$$

$$\Rightarrow f(t) = (t+1)^2 + 1$$

$$t = 1-x \Rightarrow t+1 = 2-x$$

$$f(1-x) = (2-x)^2 + 1 = 4 + x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 5$$

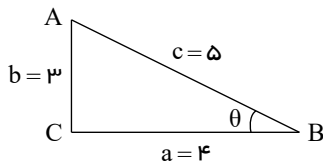
۴۷- گزینه ۴

تابع همانی: $f(x) = x$

$$f(4) = 4 = a \Rightarrow a = 4$$

$$f(b) = b = a - 1 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow b = 3$$

$$f(2c) = 2c = 2a + b - 1 = 8 + 3 - 1 = 10 \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5$$



$$\cos \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10}$$

۴۸- گزینه ۴ چون تابع f تابع همانی و تابع g تابع ثابت است، داریم:

$$f(x) = x, g(x) = K$$

$$\frac{f(4) - g(2)}{f(g(5))} = \frac{4 - K}{f(K)} = \frac{4 - K}{K} = f(1) = 1 \Rightarrow K = 4 - K$$

$$\Rightarrow 2K = 4 \Rightarrow K = 2 \Rightarrow g(x) = 2$$

خواسته سوال برابر است با:

$$g(f(9)) - f(10) = g(9) - f(10) = 2 - 10 = -8$$

۴۹- گزینه ۴ با توجه به تعریف تابع ثابت و همانی داریم:

$$f(x) \text{ تابعی ثابت است} \Rightarrow f(x) = k$$

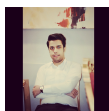
$$g \text{ تابعی همانی است} \Rightarrow g(x) = x$$

$$f(x) \times g(f(x)) + 1 = 2f(g(5))$$

$$\Rightarrow (k) \times g(k) + 1 = 2f(5) \Rightarrow k \times k + 1 = 2k \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 0 \Rightarrow k = 1$$

پس ضابطه $f(x)$ به صورت $f(x) = 1$ است. در نتیجه:

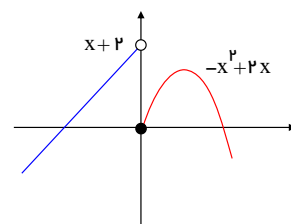
$$f(g(3)) + g(f(3)) = f(3) + g(1) = 1 + 1 = 2$$



۵۰- گزینه ۱

$$x \geq 0 \Rightarrow y = -x^2 + 2x = x(-x + 2)$$

x	0	2
x	-	+
2-x	+	-
x(-x+2)	-	-

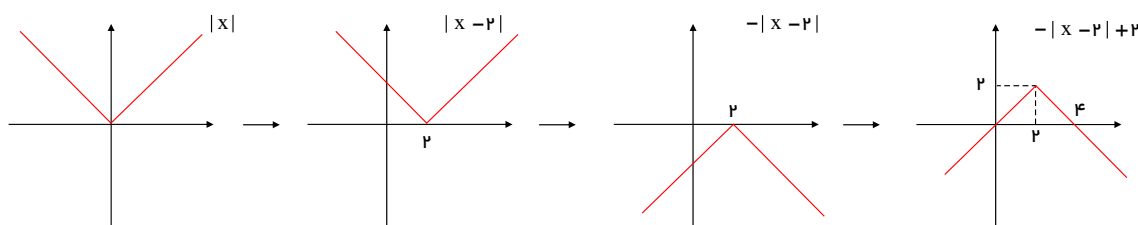


۵۱- گزینه ۳

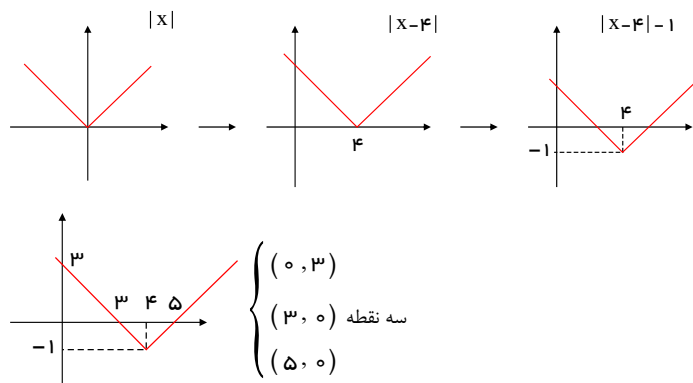
$$1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = |x - 1| + |3 - x| - |2x - 1| = (x - 1) + (3 - x) - (2x - 1)$$

$$= x - 1 + 3 - x - 2x + 1 = -2x + 3$$

۵۲- گزینه ۴



۵۳- گزینه ۴ با رسم نمودار داریم: سه نقطه



۵۴- ۲ گزینه

$$f(\sqrt{3} - 1) = |\sqrt{3} - 1| + |\sqrt{3} - 1 - 1| = \sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} - 2) = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} + 2 = 1$$

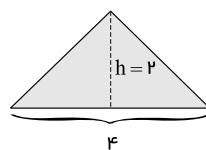
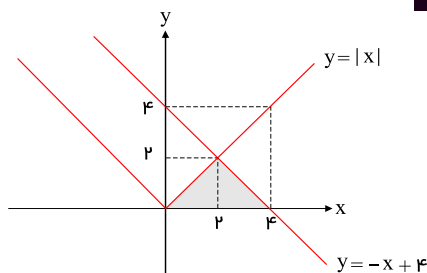
$$f(\sqrt{2} - 1) = |\sqrt{2} - 1| + |\sqrt{2} - 1 - 1| = \sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2} - 2) = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + 2 = 1$$

$$f(\sqrt{3} - 1) + f(\sqrt{2} - 1) = 1 + 1 = 2$$

۵۵- گزینه ۱ نمودار تابع قدرمطلق و خط را در یک دستگاه محورها رسم می‌کنیم.

$$3x + 3y = 12 \Rightarrow x + y = 4 \Rightarrow y = -x + 4$$

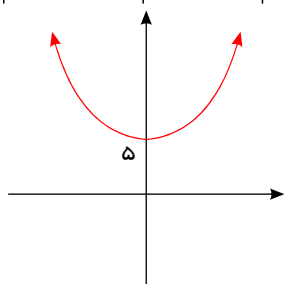
x	4	0
y	0	4



$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

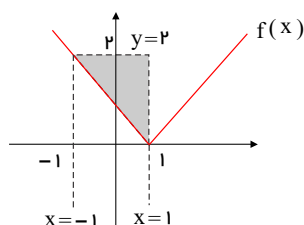
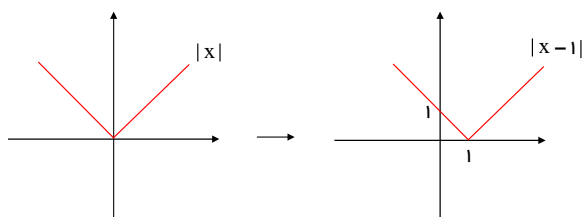
۵۶- گزینه ۳

$$f(x) = |-x^2 - 2| + 3 = -(x^2 + 2) + 3 = x^2 + 2 + 3 = x^2 + 5$$

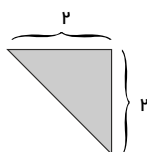


باتوجه به نمودار تابع، می‌بینیم که حداقل مقدار تابع، ۵ است.

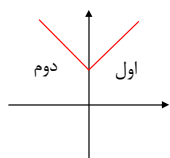
۵۷- گزینه ۲



$$f(-1) = |x - 1| = |-1 - 1| = |-2| = 2$$



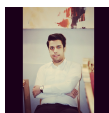
$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$



۵۸- گزینه ۱ با رسم نمودار تابع داریم: $y = |x| + 2$

۵۹- گزینه ۴

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|3 \times \frac{1}{2} - 5\right| = \left|\frac{3}{2} - \frac{10}{2}\right| = \left|\frac{-7}{2}\right| = \frac{7}{2}$$



$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

۶۰- گزینه ۴

$$f(-2) = |(-2)^2 - 5| = |4 - 5| = |-1| = 1$$

$$g(2) = \frac{2}{1 + 2^2} = \frac{2}{1 + 4} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1 + f(-2)}{g(2)} = \frac{1 + 1}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{\frac{2}{5}} = \frac{2 \times 5}{2} = 5$$

۶۱- گزینه ۲ برای رسم نمودار $f(x) = k - |x + a|$ به کمک انتقال نمودار $-|x|$ را ۲ واحد به سمت راست سپس k واحد در راستای قائم با توجه به شکل بالا برده‌ایم، پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = k - |x - 2|$ بوده است، بنابراین $a = -2$ است.

از طرفی $f(-1) = 0$ است؛ بنابراین:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow k - |-1 - 2| = 0 \Rightarrow k = 3$$

پس مقدار $a = -2$ و $k = 3$ است؛ بنابراین حاصل $2k - a = 6 + 2 = 8$ است.

۶۲- گزینه ۳ نمودار تابع $f(x)$ به ازای ریشه مخرج تعریف نشده است:

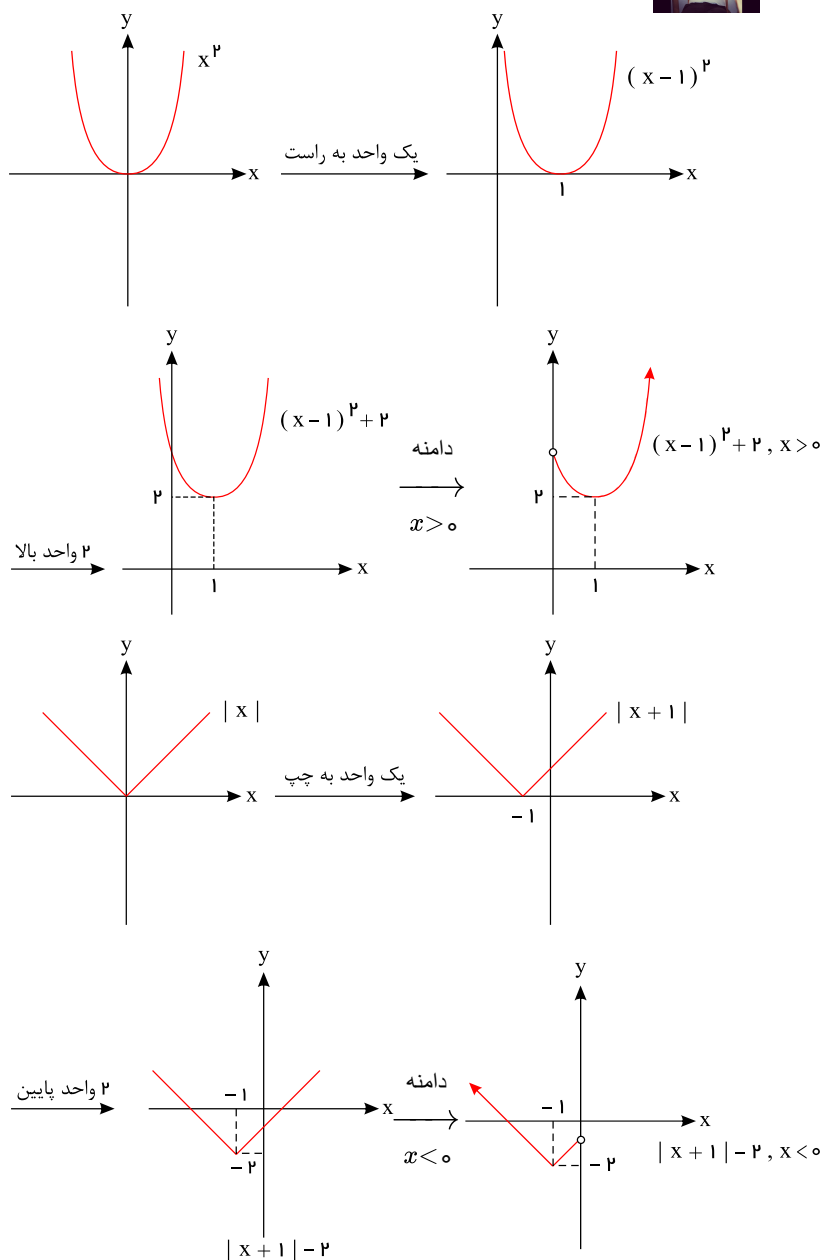
$$|-x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

ساده شده رابطه $f(x)$ در دامنه تعریفش به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{|x^2|}{|-x|} = \frac{|x| \times |x|}{|x|} = |x|$$

نمودار تابع $f(x)$ همان نمودار $|x|$ می‌باشد که در نقطه $x = 0$ تعریف نشده است.

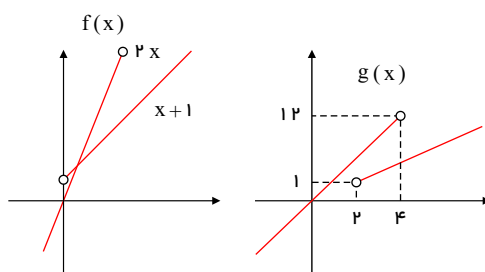
۶۳- گزینه ۴ هر ضابطه از تابع را به روش انتقال رسم می‌کنیم، سپس با توجه به دامنه آن، بخش مورد نظر را مشخص می‌کنیم:



دقت کنید $x = 0$ در دامنه هیچ یک از ضابطه‌ها نیست.

۶۴- گزینه ۴

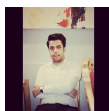
با رسم دو تابع داریم:



هر دو تابع خطوط موازی محور y ها را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.

۶۵- گزینه ۴

$$-1 < 0 : f(-1) = 2x + 3 \rightarrow f(-1) = -2 + 3 = 1$$



$$f(f(-1)) = f(1)$$

$$1 > 0 \rightarrow f(1) = x^2 - 1 = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

۶۶- گزینه ۴

$$f(1) \xrightarrow{1 \leq 3} f(1) = 2x + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$f(f(1)) = f(5) \xrightarrow{5 > 3} f(5) = x - \sqrt{x+4} = 5 - \sqrt{5+4}$$

$$= 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2 \Rightarrow f(5) = 2$$

$$f(f(5)) = f(2) \xrightarrow{2 \leq 3} f(2) = 2x + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$\text{پس: } f(f(5)) + f(f(1)) = 7 + 2 = 9$$

۶۷- گزینه ۲ پله یکم: ضابطه تابع را در هر قطعه به دست می آوریم.

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 2a + b = 2 \\ f(4) = 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow -2a = 2 \Rightarrow a = -1$$

$$-2 + b = 2 \Rightarrow b = +4 \Rightarrow f(x) = -x + 4 \Rightarrow f(6) = -6 + 4 = -2$$

پله دوم: نمودار تابع $f(x)$ به ازای $x \leq -1$ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 2x$ است. بنابراین $f(-2) = -4$ می شود.

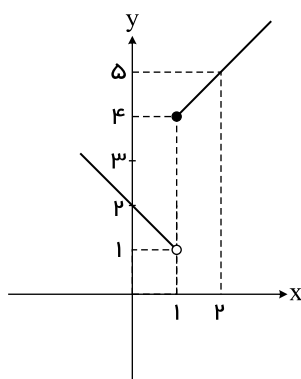
پله سوم:

$$f(-2) + f(2) + f(6) = -4 + 2 + (-2) = -6 + 2 = -4$$

۶۸- گزینه ۳

به کمک نقطه یابی در هر ضابطه نمودار تابع f را رسم می کنیم.

ضابطه اول:

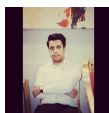


x	۱	۲
y	۴	۵

x	۱	۰
y	۱	۲

ضابطه دوم:

نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ را توخالی رسم می کنیم.



$$\sin^2 x \geq 0 \Rightarrow f(\sin^2 x) = \sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$$

$$f(-\cos^2 x) = -\cos^2 x + 1 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

۷۰- گزینه ۱ می‌دانیم $\sin x$ و $\cos x$ همیشه کمتر از ۱ هستند، جمع آن‌ها هیچ‌گاه ۲ نمی‌شود. (اگر یکی ۱ باشد دیگری نمی‌تواند یک باشد)، پس:

$$f(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = \cancel{\sin^2 x} + \cancel{\cos^2 x} + 2 \sin x \cos x - 1 = 2 \sin x \cos x$$

۷۱- گزینه ۲ با انتقال $y = -x^2 + 1$ واحد به سمت چپ داریم: $y = -(x+2)^2 + 1$

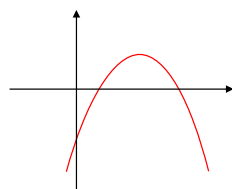
و با انتقال آن، ۱ واحد به سمت بالا داریم: $y = -(x+2)^2 + 1 + 1$

$$\Rightarrow y = -(x+2)^2 + 2 = -(x^2 + 4x + 4) + 2 = -x^2 - 4x - 4 + 2$$

$$\Rightarrow y = -x^2 - 4x - 2$$

۷۲- گزینه ۱ با محاسبه ریشه‌های معادله (نقاط تلاقی با محور x ها) داریم:

$$f(x) = -x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$



تقعر رو به پایین $a = -1 < 0 \rightarrow$

۷۳- گزینه ۱ با انتقال $y = x^2$ واحد به سمت x های منفی داریم $y = (x+3)^2$ و با انتقال آن ۲ واحد به سمت

y های مثبت داریم: $y = (x+3)^2 + 2$

$$y = (x+3)^2 + 2 = x^2 + 6x + 9 + 2 = x^2 + 6x + 11$$

۷۴- گزینه ۲ با انتقال $y = -x^2$ واحد به سمت چپ داریم: $y = -(x+1)^2$ و با انتقال آن، ۳ واحد به سمت بالا داریم:

$$y = -(x+1)^2 + 3$$

$$y = -(x+1)^2 + 3 = -(x^2 + 2x + 1) + 3 = -x^2 - 2x - 1 + 3$$

$$= -x^2 - 2x + 2$$

۷۵- گزینه ۲ با انجام عکس عملیات انجام شده به تابع اولیه می‌رسیم:

$$g(x) = (x-2)^2 \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} y = (x-2+1)^2 \xrightarrow{\text{دو واحد پایین}} f(x) = (x-2+1)^2 - 2$$



$$f(x) = (x - 1)^2 - 2 = x^2 - 2x + 1 - 2 = x^2 - 2x - 1$$

۷۶- گزینه ۱ با انتقال $f(x) = x^2$ ۲ واحد به سمت راست داریم: $y = (x - 2)^2$ و با انتقال آن ۳ واحد به سمت پایین داریم:

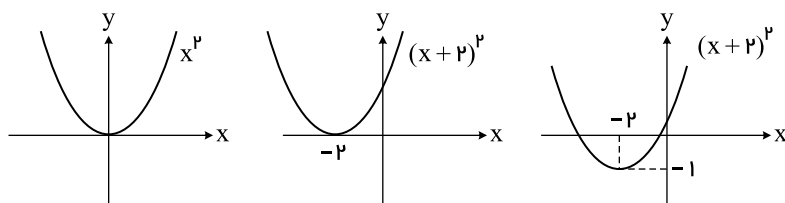
$$y = (x - 2)^2 - 3$$

$$y = x^2 - 4x + 4 - 3 = x^2 - 4x + 1$$

۷۷- گزینه ۲ ابتدا ضابطه تابع $g(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم تا بتوانیم آن را با انتقال نمودار $f(x) = x^2$ رسم کنیم:

$$g(x) = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow g(x) = x^2 + 4x + 4 - 1 \Rightarrow g(x) = (x + 2)^2 - 1$$

پس کافی است نمودار $f(x) = x^2$ را ابتدا ۲ واحد به سمت چپ انتقال افقی داده و سپس نمودار $(x + 2)^2$ را یک واحد در راستای محور y ها به سمت پایین انتقال دهیم.



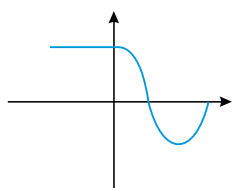
۷۸- گزینه ۴

$$x > 0 \Rightarrow y = f\left(\frac{x+x}{2}\right) = f(x)$$

پس نمودار برای سمت راست محور y ها تغییری ندارد و:

$$x < 0 \Rightarrow y = f\left(\frac{x-x}{2}\right) = f(0) = 2$$

پس برای مقادیر سمت چپ محور y ها، مقدار تابع ۲ است.



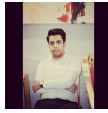
۷۹- گزینه ۱ با توجه به نمودار، برد تابع $f(x)$ به صورت $[-2, 2]$ است.

برای رسم نمودار $f(x - 1)$ کافی است که نمودار $f(x)$ را به اندازه یک واحد در راستای x به سمت راست انتقال دهیم پس تغییری در برد تابع به وجود نمی‌آید و برد $f(x - 1)$ نیز $[-2, 2]$ خواهد بود.

برای رسم نمودار $y = 2 + f(x - 1)$ کافی است که نمودار $f(x - 1)$ را دو واحد در راستای y به سمت بالا انتقال دهیم پس به هر مقدار برد، دو واحد اضافه می‌شود:

$$[-2, 2] \xrightarrow{+2} [0, 4]$$

۸۰- گزینه ۱۱ اگر $f(x) > 0$ یعنی قسمت‌هایی از نمودار که بالای محور x هستند.

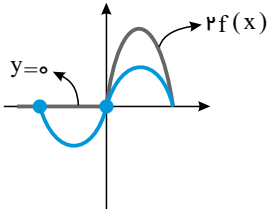


$$y = 2f(x)$$

و اگر $f(x) < 0$ (قسمت‌های پایین محور x ها) داریم:

$$y = 0$$

پس نمودار چنین می‌شود.



پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۱۵ - ۳	۲۹ - ۱	۴۳ - ۱	۵۷ - ۲	۷۱ - ۲
۲ - ۳	۱۶ - ۲	۳۰ - ۳	۴۴ - ۳	۵۸ - ۱	۷۲ - ۱
۳ - ۲	۱۷ - ۳	۳۱ - ۳	۴۵ - ۱	۵۹ - ۴	۷۳ - ۱
۴ - ۳	۱۸ - ۲	۳۲ - ۲	۴۶ - ۴	۶۰ - ۴	۷۴ - ۲
۵ - ۴	۱۹ - ۴	۳۳ - ۴	۴۷ - ۴	۶۱ - ۲	۷۵ - ۲
۶ - ۴	۲۰ - ۳	۳۴ - ۴	۴۸ - ۴	۶۲ - ۳	۷۶ - ۱
۷ - ۴	۲۱ - ۴	۳۵ - ۱	۴۹ - ۴	۶۳ - ۴	۷۷ - ۲
۸ - ۴	۲۲ - ۱	۳۶ - ۱	۵۰ - ۱	۶۴ - ۴	۷۸ - ۴
۹ - ۲	۲۳ - ۳	۳۷ - ۳	۵۱ - ۳	۶۵ - ۴	۷۹ - ۱
۱۰ - ۴	۲۴ - ۳	۳۸ - ۱	۵۲ - ۴	۶۶ - ۴	۸۰ - ۱
۱۱ - ۴	۲۵ - ۲	۳۹ - ۱	۵۳ - ۴	۶۷ - ۲	
۱۲ - ۱	۲۶ - ۴	۴۰ - ۲	۵۴ - ۲	۶۸ - ۳	
۱۳ - ۴	۲۷ - ۲	۴۱ - ۳	۵۵ - ۱	۶۹ - ۱	
۱۴ - ۱	۲۸ - ۴	۴۲ - ۱	۵۶ - ۳	۷۰ - ۱	