

روزی از دانشمندی ریاضیدان نظرش را درباره ی انسان پرسیدند:

او جواب داد:

اگر انسانی دارای (اخلاق) باشد پس مساوی است با عدد یک = ۱

اگر دارای (زیبایی) هم باشد پس یک صفر جلوی عدد یک می گذاریم = ۱۰

اگر (ثروت) هم داشته باشد صفر دیگری را در جلوی عدد قبلی اضافه می کنیم = ۱۰۰

اگر دارای (علم) هم باشد پس باز هم صفر دیگری را در جلوی عدد قبلی اضافه می کنیم = ۱۰۰۰

اگر دارای (اصل و نسب) هم باشد پس همچنان صفر دیگری را در جلوی عدد قبلی اضافه می کنیم = ۱۰۰۰۰

ولی اگر زمانی عدد یک (اخلاق) از بین رفت چیزی به جز صفر باقی نمی ماند و صفر هم به تنهایی هیچ است پس انسان بدون (اخلاق) هیچ ارزشی نخواهد داشت.

نتیجه اخلاقی: اگر اخلاق نباشد انسان نهایت زیبایی و ثروت و علم و اصل و نسب هم که باشد هیچ نیست.

این مجموعه علاوه بردرسنامه و نکات، دربردارنده ی سوالات تشریحی و تست از کتاب می باشد. این سوالات به صورت فصل به فصل تفکیک شده اند. همچنین مجموعه ی مذکور شامل 13 نمونه سوال، آذر(1)، دی(3)، اردیبهشت (2)، خرداد (5) و شهریور (2) می باشد.

امید است دانش آموزان عزیز با بهره گیری از مطالب عنوان شده موجبات سرافرازی اینجانب و خود را فراهم آورند.

موفق و پیروز باشید

نوید پورزکی

تایمستان 1403

فهرست مطالب

درسنامه فصل 1 1

سوالات تشریحی فصل 1 24

درسنامه فصل 2 57

سوالات تشریحی فصل 2 93

درسنامه فصل 3 120

سوالات تشریحی فصل 3 147

نمونه سوال امتحانی پایش-آذر 1402 162

نمونه سوال امتحانی دی ماه 164

نمونه سوال امتحانی دی ماه 166

نمونه سوال امتحانی دی ماه 168

درسنامه فصل 4 170

سوالات تشریحی فصل 4 193

درسنامه فصل 5 210

سوالات تشریحی فصل 5 254

نمونه سوال (نهایی-خرداد 1402-صبح) 277

نمونه سوال (نهایی-خرداد 1402-عصر) 279

نمونه سوال (نهایی-خرداد 1402-ویژه غایبین) 284

نمونه سوال (نهایی-شهریور 1402) 283

نمونه سوال (نهایی-شهریور 1402-ویژه غایبین) 285

نمونه سوال (شبه نهایی-اردیبهشت 1403-صبح) 287

نمونه سوال (شبه نهایی-اردیبهشت 1403-عصر) 289

نمونه سوال (نهایی-خرداد 1403-صبح) 292

نمونه سوال (خرداد) 294

فصل اول

جبر و معادله

>> درس اول: مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

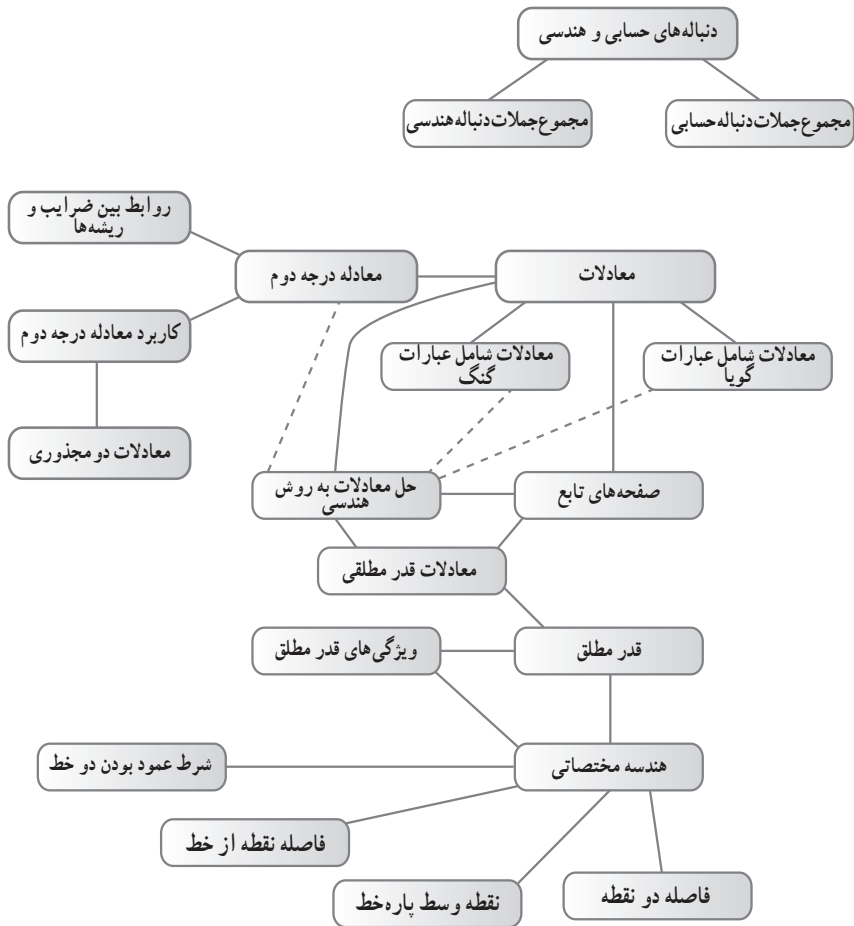
>> درس دوم: معادلات درجه دوم

>> درس سوم: معادلات گویا و گنگ

>> درس چهارم: قدر مطلق و ویژگی های آن

>> درس پنجم: آشنایی با هندسه ی تحلیلی

نقشه مفهومی فصل ۱





معادله‌ی خط:

معادله‌ی خط در صفحه به یکی از دو فرم $y = mx + h$ و یا $ax + by + c = 0$ نوشته می‌شود. در حالتی که $y = mx + h$ است، m را شیب (ضریب زاویه) خط و h را عرض از مبدأ خط می‌نامیم.

و در حالتی که خط به فرم $ax + by + c = 0$ است شیب خط برابر $m = -\frac{a}{b}$ است.

با مشخص کردن دو نقطه‌ی دلخواه از خط می‌توان نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم کرد.

تعیین معادله‌ی خط:

الف) با داشتن مختصات یک نقطه از خط مانند $A(x_1, y_1)$ و شیب خط (m) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه $(1, 2)$ گذشته و شیبش برابر 3- باشد.

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه $(4, 3)$ گذشته و شیبش برابر 2- باشد.

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه $(-2, 1)$ گذشته و شیبش برابر 3 باشد.

ب) با داشتن مختصات دو نقطه متمایز از خط: شیب خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد برابر $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ است. در این حالت معادله‌ی خط به صورت مقابل

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مشخص می‌شود:

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از دو نقطه $A(-1, 2)$ و $B(3, 4)$ می‌گذرد.





مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از دو نقطه $A(-2, 4)$ و $B(2, -8)$ می‌گذرد.

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از دو نقطه $A(-1, 2)$ و $B(1, 5)$ می‌گذرد.

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که طول از مبدأ آن -3 و عرض از مبدأ آن 7 باشد.

مثال: معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $(3, 7)$ و نقطه‌ی تلاقی دو خط به معادلات $2x + 3y = -1$ و $-x + 4y = -5$ را بنویسید.

شرط موازی و عمود بودن دو خط:

* دو خط $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$ با هم موازیند، هرگاه شیب آن‌ها با هم برابر باشند، یعنی $m = m'$

* دو خط غیر موازی با محورهای مختصات با شیب‌های m و m' بر هم عمودند، هرگاه شیب هر کدام، عکس و قرینه‌ی شیب دیگری باشد. به بیان دیگر حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 باشد. یعنی: $mm' = -1$





مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی (5, 4) بگذرد و با خط $2x + 3y = 1$ موازی باشد.

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی (2, -1) بگذرد و بر خط $3x - 4y = 7$ عمود باشد.

مثال: در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود)

الف) $T: y = \frac{-1}{5}x + 3$ $L: y = 5x - 2$

ب) $T: x - 2y = 1$ $L: y = \frac{1}{2}x + 7$

پ) $T: 3x + 2y = 0$ $L: 2x - 3y + 3 = 0$

ت) $T: y = -3$ $L: x = 1$

مثال: دو خط به معادلات $3x + 2y = 5$ و $y - 4mx = -1$ داده شده است.

الف) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط با هم موازی باشند.

ب) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط بر هم عمود باشند.



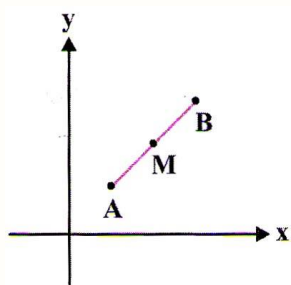


فاصله‌ی دو نقطه:

فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

مثال: شعاع دایره به مرکز $(2, -3)$ و گذرنده از نقطه‌ی $(-6, 3)$ کدام است؟



نقطه‌ی وسط پاره خط:

مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط AB عبارت است از:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

مثال: اگر نقاط $A(6, -5)$ و $B(-4, -11)$ دو سر قطری از دایره باشند، مختصات مرکز دایره و شعاع دایره را بیابید.

مثال: اگر $A(1,5)$ ، $B(0,4)$ ، $C(4,2)$ مختصات سه راس یک مثلث باشند، طول میانه AM کدام است؟ (هماهنگ - ناحیه 7 - ریاضی)





مثال: اگر $A(0,2)$ ، $B(-1,3)$ ، $C(1,-1)$ مختصات سه راس یک مثلث باشند، طول میانه AM کدام است؟

مثال: در هریک از موارد زیر مختصات نقطه‌ی خواسته شده را بیابید.
الف) نقطه‌ی $M(-3, 2)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $A(4, 1)$ و B است. مختصات نقطه‌ی B را بیابید.

ب) قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2, -1)$ را نسبت به نقطه‌ی $M(1, 5)$ به دست آورید.

پ) قرینه‌ی نقطه‌ی $(2, -6)$ را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.
مثال: دو نقطه‌ی $A(13,6)$ و $B(-3, -8)$ را در نظر بگیرید. فاصله‌ی نقطه‌ی $C(1, 1)$ از وسط پاره خط AB را به دست آورید.

مثال: مثلث با رأس‌های $A(-2, 4)$ ، $B(1, 4)$ و $C(-3, 2)$ را در نظر بگیرید.
الف) مختصات M ، نقطه‌ی وسط ضلع BC را مشخص کنید.

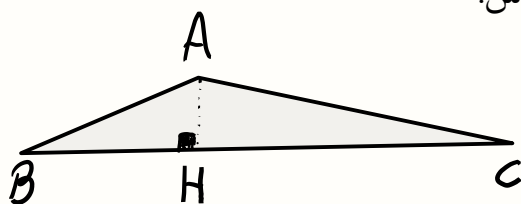
ب) طول میانه‌ی AM را به دست آورید.

پ) معادله‌ی میانه‌ی AM را بنویسید.





نکته: به دست آوردن مساحت مثلث با داشتن سه رأس:



$$S = \frac{1}{2} BC \times AH$$

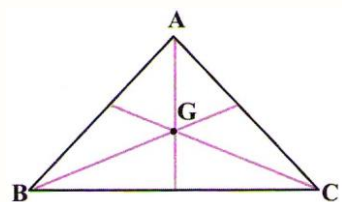
و اما روش سرعتی:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

مثال: مساحت مثلثی با رأس‌های $A(-2, 4)$ ، $B(1, 4)$ و $C(-3, 2)$ را بیابید.

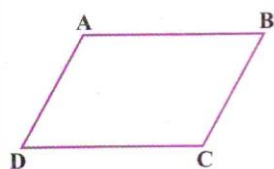
مثال: مساحت مثلثی با رأس‌های $A(2, 5)$ ، $B(3, 4)$ و $C(1, -2)$ را بیابید.

نکته: مختصات مرکز ثقل مثلث ABC که محل تلاقی میانه‌های مثلث است، عبارت است از:



$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

نکته: در متوازی الاضلاع ABCD شکل مقابل داریم:



$$x_A + x_C = x_D + x_B$$

$$y_A + y_C = y_D + y_B$$

مثال: نقاط $A(1, 2)$ ، $B(2, 4)$ و $C(-2, 6)$ سه رأس متوازی الاضلاع ABCD هستند.

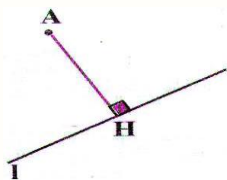
مختصات راس چهارم را پیدا کنید.





فاصله‌ی نقطه از خط: فاصله‌ی نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$

$$d = |AH| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{برابر است با:}$$



مثال: خط $x + 2y = 3$ بر دایره‌ای به مرکز $(-1, 1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.

مثال: یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از راس‌های این مربع باشد، مساحت مربع را به دست آورید. (هماهنگ - ناحیه 4 - تجربی)

مثال: اگر نقطه‌ی $A(2, 3)$ راس یک مربع و $3x - 4y = 9$ معادله‌ی یک ضلع مربع باشد، مساحت مربع را بیابید. (هماهنگ - ناحیه 4 - ریاضی)

مثال: مثلث با رأس‌های $A(2, 4)$ ، $B(1, 4)$ و $C(-1, 2)$ را در نظر بگیرید.
الف) طول میانه‌ی AM را به دست آورید.

ب) طول ارتفاع AH را به دست آورید.





مثال: طول ارتفاع AH در مثلثی با رأس‌های $A(1, 9)$ ، $B(3, 3)$ و $C(7, 11)$ کدام است؟
(س.خ.01)

- 2(1) $\sqrt{10}$ (2) $2\sqrt{5}$ (3) 6 (4)

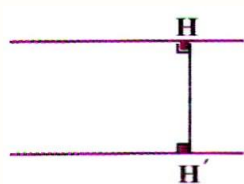
مثال: سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB: y + 2x = 7$ ، $AC: 4y - 3x = 17$ و $BC: 2y - 7x = -19$ هستند. طول ارتفاع BH، کدام است؟ (س.د.01)

- 1(4) 2.5 (3) 3 (2) 4.4(1)

مثال: دو خط $3x + 2y = 1$ و $2x - 3y = 2$ معادلات اضلاع مستطیلی‌اند و نقطه‌ی $A(2, 5)$ یک راس مستطیل است. مساحت مستطیل را به دست آورید.

فاصله‌ی بین دو خط موازی: فاصله‌ی بین دو خط موازی $ax + by + c = 0$

و $ax + by + c' = 0$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:



$$d = |HH'| = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$





مثال: معادلات اضلاع مربعی به صورت $2x - 3y + 1 = 0$ و $4x - 6y - 3 = 0$ هستند. مساحت مربع را به دست آورید.

نکته: معادله‌ی خطی که با دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ موازی باشد و از آن‌ها به فاصله‌ی برابر باشد عبارت است از:

$$ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$$

مثال: معادله خطی که از دو خط $2x + y - 3 = 0$ و $y = -2x - 1$ به یک فاصله باشد بنویسید.

روش تغییر متغیر برای حل معادله: برای حل معادله‌ی $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ که یک معادله‌ی دو مجذوری است، می‌توان به جای x^2 متغیر جدیدی مانند u قرار داد و معادله را به یک معادله‌ی درجه دوم تبدیل کرد. به صورت زیر:

$$x^2 = u \Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$$

$$(u - 1)(u - 4) = 0 \Rightarrow u = 1 \quad \text{یا} \quad u = 4$$

$$\begin{cases} u = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ u = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \text{معادله 4 ریشه دارد}$$

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \quad \text{الف)}$$





ب) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$

ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

پ) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 6$

ت) $(x^2 + x + 1)^2 + x^2 + x - 1 = 0$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم:

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه مجموع و حاصل ضرب و قدر مطلق اختلاف ریشه‌های معادله به صورت زیر است:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} \quad , \quad \alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a} \quad , \quad |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$





مثال: در معادله‌ی $-2x^2 + x + 5 = 0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب و قدر مطلق اختلاف ریشه‌ها را به دست آورید.

روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم:

اگر رابطه‌ی بین دو ریشه متقارن باشد یعنی با تعویض جای دو ریشه عبارت تغییری نکند،

مانند: $\alpha + \beta$ ، $\alpha^2 + \beta^2$ ، $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ و... می‌توان به s و p رسید.

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، مقدار عبارات زیر را بیابید.

الف) $\alpha^2 + \beta^2$

ب) $\alpha^3 + \beta^3$

پ) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

ت) $\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1}$

ج) $\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$

چ) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

ح) $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $2x^2 - 6x - 1 = 0$ باشند،

حاصل $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ را بیابید؟

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 7 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\beta}{\beta+1}$ را

بیابید؟





مثال: مجموع ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + (2m - 1)x - 5 = 0$ برابر 3 است. مقدار m را بیابید؟

مثال: حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 10x - m = 0$ برابر 2 می‌باشد. مقدار m را بیابید؟

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + (m - 2)x - 3 = 0$ و $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 3$ باشند، مقدار m را به دست آورید. (هماهنگ - ناحیه 4 - تجربی)

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (2m - 1)x + 4 = 0$ باشند، مقدار m را چنان بیابید که رابطه‌ی $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = 12$ برقرار باشد. (هماهنگ - ناحیه 4 - ریاضی)

مثال: معادله‌ی $x^2 + (2m + 1)x + 3m - 1 = 0$ دو ریشه‌ی برابر و قرینه دارد. مقدار m را بیابید؟

مثال: ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - (3m + 1)x + m = 0$ عکس یکدیگر هستند. مجموع این ریشه‌ها را بیابید؟





مثال: جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2 - 5mx + m^2 - 1 = 0$ معکوس یکدیگر هستند. مقادیر m کدام است؟ (قلمچی-1402)

- (1) فقط 2 (2) فقط -2 (3) ± 2 (4) -3

مثال: در معادله‌ی $3x^2 - 18x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر 2 واحد بیش‌تر است. m را بیابید؟



نوشتن معادله‌ی درجه دو با داشتن S و P :

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دومی باشند در این صورت با تعیین مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها یعنی $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha \cdot \beta$ می‌توانیم معادله‌ی درجه دوم را به صورت زیر بنویسیم:

$$x^2 - sx + p = 0$$

مثال: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن -2 و 3 باشد.

مثال: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $1 \pm \sqrt{3}$ باشد.





مثال: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $2 \pm \sqrt{5}$ باشد.

مثال: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $4 - \sqrt{2}$ و $4 + \sqrt{2}$ باشد.

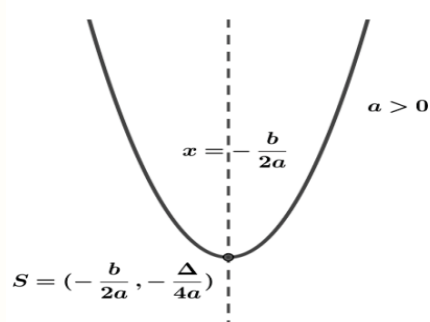
مثال: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{3+\sqrt{3}}{7}$ و $\frac{3-\sqrt{3}}{7}$ باشد.

مثال: مستطیلی به محیط 18 و مساحت 14 داریم. طول ضلع کوچک مستطیل کدام است؟

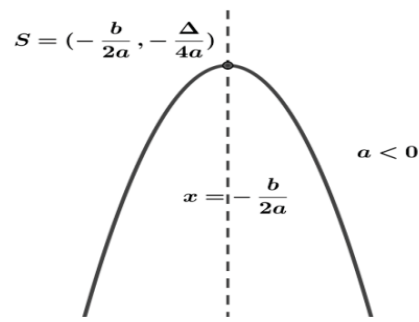
ماکزیمم و مینیمم سهمی:

نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ یک سهمی است که با توجه به علامت a به یکی از دو صورت مقابل است:

در شکل‌های زیر نقطه‌ی S را رأس سهمی می‌گویند.



بچه مثبت 😊 (پورزکی)



بچه منفی 😞 (پخش کننده)





اگر $a > 0$ باشد (بچه مثبت) سهمی مینیمم (Min) دارد و اگر $a < 0$ (بچه منفی) سهمی ماکزیمم (Max) دارد. همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

نکته: هر سهمی به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است رأسی به مختصات $S = (h, k)$ و خط تقارنی با معادله $x = h$ دارد.

مثال: در سهمی $y = -2(x + 3)^2 + 5$ رأس سهمی به مختصات (5 و -3) و محور تقارن $x = -3$ است.

* مختصات رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ به صورت $s = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ است.

* سهمی دارای یک خط محور تقارن به معادله $x = -\frac{b}{2a}$ است.

مثال: در سهمی $y = -2x^2 + 4x - 3$ مختصات راس سهمی و معادله محور تقارن سهمی را بیابید.

مثال: بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل را که می‌توان توسط یک طناب 40 متری که یک طرف آن رودخانه است محصور کرد، چند متر است؟

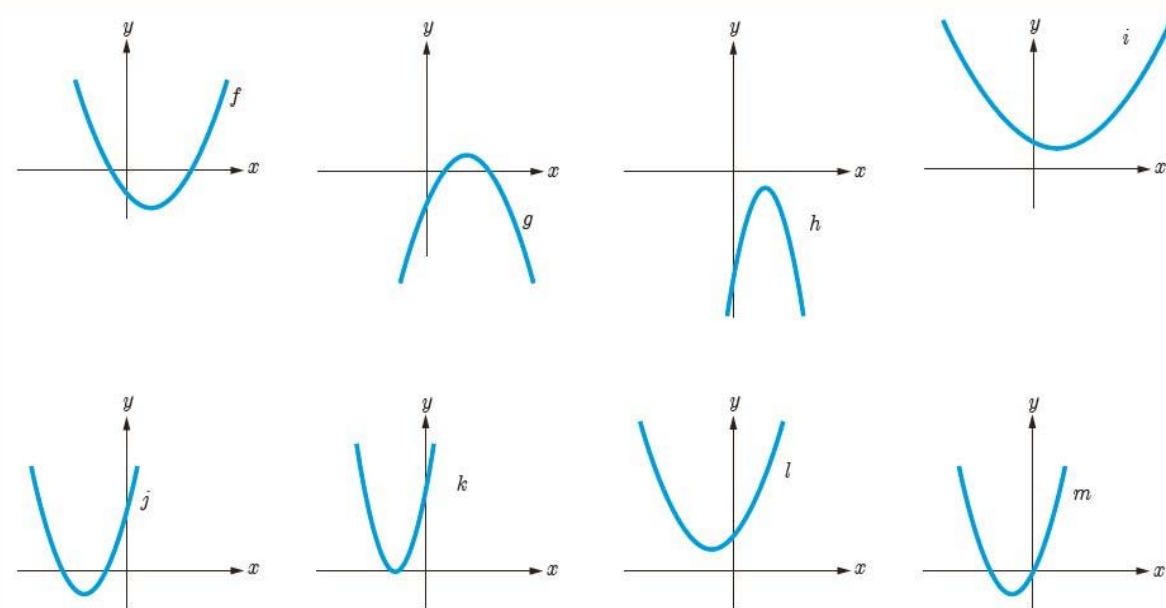
صف‌های تابع درجه 2: نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور Xها را صف‌های تابع می‌گویند چون در این نقاط مقدار تابع برابر صفر می‌شود.

با توجه به این که نمودار تابع درجه 2 یک سهمی است، لذا صف‌های تابع در واقع ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است که به کمک Δ می‌توان تعداد صف‌های این تابع را تعیین کرد.

نکته: در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ علامت a و b و c را می‌توان با توجه به نمودار تابع تعیین کرد.



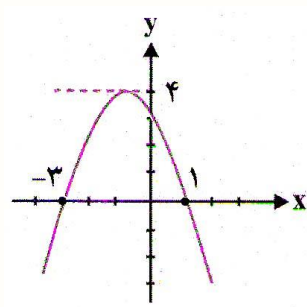
مثال: با توجه به نمودارهای داده شده، ابتدا تعداد ریشه‌ها و علامت هر ریشه را مشخص کرده و سپس علامت‌های a, b, c را تعیین کنید.



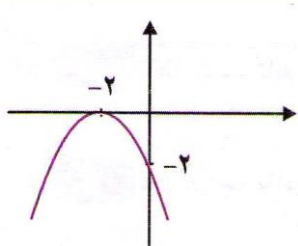
تعیین معادله سهمی به کمک نمودار:

اگر سهمی محور x ها را در 2 نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع کرده باشد، در این صورت معادله سهمی را به صورت $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ می‌نویسیم و اگر سهمی محور x ها را در یک نقطه به طول x_1 قطع کرده باشد، در این صورت معادله سهمی را به صورت $f(x) = a(x - x_1)^2$ می‌نویسیم که در هر حالت با داشتن مختصات یک نقطه‌ی دیگر از سهمی و صدق دادن در معادلات فوق به راحتی می‌توانیم a را به دست آوریم و معادله سهمی را بنویسیم.

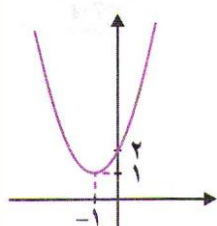
مثال: اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل مقابل باشد، مقدار $a + b$ را بیابید.



مثال: نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل رو به رو است. حاصل ac کدام است؟



مثال: نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل رو به رو است. حاصل $\frac{b+c}{a}$ کدام است؟



علامت ریشه‌های تابع درجه 2: برای تعیین علامت صفرهای تابع درجه 2 (در صورت وجود) که همان علامت ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است، می‌توانیم از علامت P و S کمک بگیریم. به صورت زیر:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{c}{a} < 0 \text{ سهمی مختلف علامت دارد} \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ی بزرگتر مثبت است} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{c}{a} > 0, \Delta > 0 \text{ سهمی هم علامت دارد} \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \text{ریشه منفی هستند} \end{array} \right.$$

مثال: در توابع زیر تعداد و علامت ریشه‌ها را (در صورت وجود) مشخص کنید.

الف) $y = -2x^2 + 4x + 3$

ب) $y = 3x^2 - 6x + 2$



پ) $y = 2x^2 - 4x + 1$

مستطیل طلایی:

مستطیلی که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل، برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند و داشته باشیم:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}, \text{ نسبت طول به عرض این مستطیل را نسبت طلایی می گویند.}$$

عرض مستطیل را $y = 1$ در نظر می گیریم تا مقدار نسبت طلایی را محاسبه کنیم:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \rightarrow x^2 = x + 1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 5 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ق ق} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ غ ق} \end{cases}$$

عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به عدد طلایی معروف است که مقدار تقریبی آن 1.618 می باشد؛ این عدد از دوران باستان مورد توجه بوده است.

مثال: نسبت طول به عرض یک مستطیل، 5 به 4 است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟ (س.د. 02)

$$(1) 0.3 + \sqrt{5} \quad (2) 0.2(1 + \sqrt{5}) \quad (3) 0.6 + 0.2\sqrt{5} \quad (4) 0.4(1 + \sqrt{5})$$





معادلات گویا:

معادلاتی که شامل عبارات گویا (یعنی کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چند جمله‌ای هست) باشند را معادلات گویا می‌گویند.

😊 نکته: جواب‌های به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرهای را صفر کند.

🌸 مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} = 1$

ب) $\frac{3x+5}{x^2+5x} + \frac{x+4}{x+5} = \frac{x+1}{x}$

ث) $\frac{x}{x+1} + \frac{5}{x^2-3x-4} = \frac{x+1}{x-4}$





مثال: به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t = -3$ است؟

مثال: معادله $2x + \frac{3}{x} = -1$ چه وضعیتی دارد؟

1) دو ریشه‌ی مثبت دارد. 2) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

3) دو ریشه‌ی منفی دارد. 4) ریشه‌ی مضاعف دارد.

مثال: دو نقاش با هم یک ساختمان را 18 روزه رنگ می‌کنند. اگر هر یک به تنهایی کار را انجام دهند، نقاش اول 15 روز زودتر از نقاش دوم این کار را انجام می‌دهد. مجموع روزهایی که دو نقاش کار را به تنهایی تمام می‌کنند چند روز است؟

مثال: علی و حسین کاری را در عرض 3 ساعت انجام می‌دهند. اگر علی به تنهایی کار را در 9 ساعت انجام دهد، حسین به تنهایی کار را در چند ساعت انجام می‌دهد؟





مثال: برای رنگ آمیزی نمای یک ساختمان از دو دستگاه A و B استفاده می شود. اگر این دو دستگاه با هم کار کنند، این رنگ آمیزی 6 ساعت طول می کشد، اگر سرعت کار دستگاه A دو برابر سرعت کار دستگاه B باشد، با دستگاه B در چند ساعت می توان نمای این ساختمان را رنگ آمیزی کرد؟

معادلات رادیکالی:

ابتدا جداسازی را انجام می دهیم (اگر یک رادیکال وجود داشت اطراف آن را خالی می کنیم و اگر دو رادیکال وجود داشت آن ها را از هم جدا می کنیم) سپس طرفین را به توان 2 می رسانیم. لازم به ذکر است جواب ها را حتما در صورت سوال جای گذاری می کنیم، اگر صدق نکرد غیر قابل قبول و اگر صدق کرد قابل قبول است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{x+2} = x-4$

ب) $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$

پ) $\sqrt{3x-2} + 2 = x$





$$\text{ت) } \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} = 2$$

$$\text{ث) } \sqrt{m+3} + \frac{2}{\sqrt{m+3}} = 3$$

$$\text{ج) } \sqrt{10 + \sqrt{x+3}} = 4$$

لا مثال: اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $2x + a = \sqrt{5x - x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

لا مثال: معادله‌ی $2x + \sqrt{2x - 1} = 1$ دارای:

- 1) یک جواب مضاعف است.
- 2) جواب نیست.
- 3) یک جواب است.
- 4) دو جواب متمایز است.





مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید. (هماهنگ - ناحیه 7 - تجربی)

$$1 + \sqrt{x+2} = x - 3$$

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید. (هماهنگ - ناحیه 7 - ریاضی)

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x$$



مثال: بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی هستند؟

الف) $\sqrt{t} + 2 = 0$

ب) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$

پ) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$





مثال: اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

مثال: اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$ باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.



مثال: اگر $x = 1$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

مثال: مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر 2- باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

