

نویدپورزکی

۱- با ارقام (۰, ۲, ۴, ۵, ۷, ۸) چند عدد ۴ رقمی فرد بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

- ۴۸ (۱) ۶۸ (۲) ۷۲ (۳) ۹۶ (۴)

۲- با ارقام (۰, ۲, ۳, ۵, ۷, ۹) چند عدد ۳ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

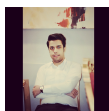
- ۴۰ (۱) ۳۶ (۲) ۳۲ (۳) ۲۸ (۴)

۳- با ارقام (۰, ۱, ۳, ۵, ۶, ۸, ۹) چند عدد ۳ رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

- ۱۲۰ (۱) ۱۰۰ (۲) ۹۰ (۳) ۶۸ (۴)

۴- چند عدد ۳ رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟

- ۱۲۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۶۰ (۴)



۵- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۵, ۶ چند عدد سه رقمی می توان نوشت که بزرگ تر از ۳۰۰ باشد؟ (تکرار ارقام مجاز است).

۱۰۸ (۴)

۳۶ (۳)

۷۵ (۲)

۶۰ (۱)

۶- چند عدد چهار رقمی مضرب پنج، با ارقام متمایز وجود دارد؟

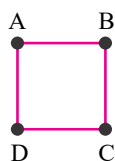
۶۴۲ (۴)

۷۵۸ (۳)

۸۹۶ (۲)

۹۵۲ (۱)

۷- رأس های شکل مقابل را به چند طریق می توان با سه رنگ قرمز، آبی و زرد رنگ آمیزی کرد، به طوری که رأس های مجاور هم رنگ نباشند؟



۱۲ (۲)

۳۰ (۴)

۱۸ (۱)

۶ (۳)

۸- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ می توان نوشت به طوری که:

۱- تکرار ارقام مجاز باشد.

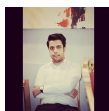
۲- تکرار ارقام مجاز نباشد.

(۴) $\begin{cases} (1) \rightarrow \text{عدد } ۳۶۰ \\ (2) \rightarrow \text{عدد } ۱۰۸ \end{cases}$

(۳) $\begin{cases} (1) \rightarrow \text{عدد } ۴۳۲ \\ (2) \rightarrow \text{عدد } ۱۰۸ \end{cases}$

(۲) $\begin{cases} (1) \rightarrow \text{عدد } ۳۶۰ \\ (2) \rightarrow \text{عدد } ۱۲۰ \end{cases}$

(۱) $\begin{cases} (1) \rightarrow \text{عدد } ۴۳۲ \\ (2) \rightarrow \text{عدد } ۱۲۰ \end{cases}$



۹- با حروف کلمه‌ی «ملکان» چند کلمه‌ی چهار حرفی (بدون تکرار حروف) می‌توان نوشت، به طوری که حرف «م» در اول و حرف «ل» در آخر بیاید؟

- ① ۵ ② ۱۰ ③ ۹ ④ ۶

۱۰- از تساوی $P(n, n-2) = 12$ مقدار n کدام است؟

- ① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

- ۱۱

۱۴۷۰ برابر حاصل $7! \times 6! \times 4!$ به صورت عددی توان دار برابر کدام گزینه است؟

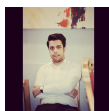
- ① $(6!)^3$ ② $(3!)^{10}$ ③ 1470^3 ④ $(7!)^3$

۱۲- حاصل عبارت $1! - (2-3)! + \frac{5!}{3!}$ کدام است؟

- ① ۴۳ ② ۵۲ ③ ۳۸ ④ ۴۶

۱۳- اگر $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{n^2+5}{n!}$ کدام است؟

- ① ۴ ② $\frac{1}{4}$ ③ ۵ ④ $\frac{1}{5}$



۱۴- با ارقام ۲, ۳, ۴, ۷, ۸ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت به طوری که دو رقم فرد کنار هم نباشند؟

- ① ۴۸ ② ۵۶ ③ ۷۲ ④ ۸۴

۱۵- با حروف کلمه *darcon* چند کلمه شش حرفی می توان نوشت به طوریکه با حرف *c* آغاز شوند و چهار حرف *r, c, n, o* کنار هم باشند؟ (تکرار حروف مجاز نیست.)

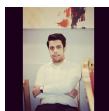
- ① ۱۲ ② ۴۸ ③ ۲۸ ④ ۹۶

۱۶- چند عدد سه رقمی می توان ساخت به طوریکه فاقد رقم یک باشد و تمام ارقام آن یا فقط مربع کامل یا فقط مکعب کامل باشند؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

- ① ۴ ② ۲۷ ③ ۹ ④ ۱۲

۱۷- با ارقام ۵, ۴, ۳, ۲ و ۱ چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت که رقم های فرد کنارهم باشند و ارقام تکراری نباشند؟

- ① ۶ ② ۱۲ ③ ۱۸ ④ ۳۶



۱۸- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷ چند عدد هفت رقمی می توان ساخت به طوریکه همه ارقام زوج یک جا کنار یکدیگر نباشند؟

۴۶۸۰ (۴)

۴۹۲۰ (۳)

۴۹۲۶ (۲)

۴۳۲۰ (۱)

۱۹- از بین ۶ دانش آموز سال دهم و ۴ دانش آموز سال یازدهم به چند طریق می توان یک تیم ۵ نفره انتخاب کرد، به طوری که تعداد اعضای سال دهمی بیشتر از تعداد اعضای سال یازدهمی باشد؟

۱۹۶ (۴)

۱۹۰ (۳)

۱۸۶ (۲)

۱۸۰ (۱)

۲۰- با حروف کلمه «لگاریتم» چند کلمه چهار حرفی بدون تکرار حروف می توان نوشت که شامل حرف «گ» باشند؟

۵۲۰ (۴)

۳۶۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۴۸۰ (۱)

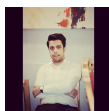
۲۱- چهار کتاب ریاضی متفاوت و دو کتاب فیزیک متفاوت را به چند طریق می توان در یک قفسه کنار هم قرار داد، به طوری که کتاب های فیزیک در ابتدا و انتهای ردیف قرار بگیرند؟

۴۸ (۴)

۲۴ (۳)

۳۶۰ (۲)

۲۴۰ (۱)



۲۲- سه معلم و دو معاون مدرسه‌ای می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند به طوری که معلمین در کنار هم و معاونین نیز در کنار هم باشند؟

- ① ۱۲ ② ۱۸ ③ ۲۴ ④ ۳۶

۲۳- به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد، به شرط آن که هر نفر حداقل یک کتاب دریافت کند؟

- ① ۱۰۵ ② ۱۲۵ ③ ۱۳۵ ④ ۱۵۰

۲۴- به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

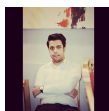
- ① ۸۴ ② ۸۷ ③ ۹۱ ④ ۹۵

۲۵- در یک لیگ والیبال ۷۸ بازی انجام شده است. تعداد تیم‌ها کدام است؟ (هر دو تیم با هم یک بار بازی کرده‌اند).

- ① ۱۱ ② ۱۲ ③ ۱۳ ④ ۱۴

۲۶- به چند طریق می‌توان ۶ دانش‌آموز را در نیمکت‌های ۳ نفره، ۲ نفره و ۱ نفره جای داد؟

- ① ۴۵ ② ۵۴ ③ ۶۰ ④ ۷۲



۲۷- از بین ۹ کارمند می‌خواهیم ۵ نفر را برای اعزام به خارج انتخاب کنیم. اگر ۳ فرد به خصوص از قبل برای اعزام انتخاب شده باشند، چند حالت مختلف برای این کار وجود دارد؟

- ① ۱۵ ② ۲۵ ③ ۳۵ ④ ۴۵

۲۸- گل فروشی از بین ۸ نوع گل مختلف، در هر دسته گل از ۳ تا ۶ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

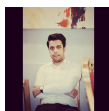
- ① ۱۵۴ ② ۱۷۵ ③ ۲۱۰ ④ ۲۰۳

۲۹- از بین ۴ دانش‌آموز کلاس اول و ۲ دانش‌آموز کلاس دوم و ۵ دانش‌آموز کلاس سوم، به چند طریق می‌توان سه نفر را انتخاب نمود به طوری که در این انتخاب، دانش‌آموزی از کلاس دوم وجود نداشته باشد؟

- ① ۶۲ ② ۷۸ ③ ۸۴ ④ ۹۶

۳۰- روی ۹ گوی یکسان ارقام ۱ تا ۹ را نوشته‌ایم، به چند طریق می‌توان ۲ گوی با هم برداشت به طوری که جمع اعداد روی آن‌ها عددی زوج باشد؟

- ① ۱۰ ② ۶ ③ ۹ ④ ۱۶



۳۱- در یک جعبه ۵ مهره سیاه و ۴ مهره سفید داریم. تعداد حالت‌هایی که ۳ مهره با هم انتخاب شود به طوری که ۲ مهره سیاه و یک مهره سفید باشد، چند تاست؟

۴۸ (۴)

۴۰ (۳)

۳۶ (۲)

۲۰ (۱)

۳۲- اگر $2 \binom{7}{3} = \binom{n+1}{4}$ مقدار $\binom{n+1}{n-1}$ کدام است؟

۴۰ (۴)

۳۶ (۳)

۲۸ (۲)

۱۵ (۱)

۳۳- n نقطه روی یک دایره قرار دارند که یکی از آن‌ها نقطه A است. تعداد مثلث‌هایی که با این نقاط می‌توان ساخت که یک رأس آن A باشد برابر ۵۵ است. چند مثلث تشکیل می‌شود که A رأس آن نباشد؟

۴۹۵ (۴)

۲۳۰ (۳)

۲۲۰ (۲)

۱۶۵ (۱)

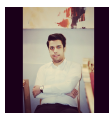
۳۴- در یک کیسه ۳ مهره آبی، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره سیاه قرار دارد. به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد به طوری که حداقل دو مهره سیاه باشد؟

۲۴ (۴)

۲۲ (۳)

۲۱ (۲)

۲۰ (۱)



۳۵- یک مجموعه ی n عضوی دارای ۱۰ زیرمجموعه ی ۲ عضوی است. این مجموعه دارای چند زیرمجموعه ی ۳ عضوی است؟

- ① ۱۸ ② ۱۴ ③ ۱۲ ④ ۱۰

۳۶- در شکل روبه‌رو، چند مثلث می‌توان رسم کرد به‌طوری که نقاط، رأس مثلث باشند؟

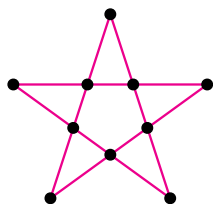


- ① ۷۶ ② ۷۸ ③ ۸۵ ④ ۸۲

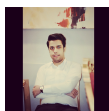
۳۷- می‌خواهیم ۴ دکتر و ۶ مهندس را در صفی مرتب کنیم به‌طوری که هیچ دو دکتری کنار هم نباشد. این کار به چند روش ممکن است؟

- ① $۶! \times ۴!$ ② $۵ \times ۷!$ ③ $۶ \times ۵! \times ۳!$ ④ $\frac{۱۰!}{۴!}$

۳۸- چند مثلث با استفاده از نقاط شکل روبه‌رو می‌توان ساخت به‌طوری که این نقاط رئوس مثلث باشند؟



- ① ۶۰ ② ۸۰ ③ ۱۰۰ ④ ۱۲۰



۳۹- از بین ۱۰ نفر به نام‌های a_1 تا a_{10} که a_1 با a_2 و a_3 با a_4 برادر است، می‌خواهیم ۵ نفر انتخاب کنیم به طوری که دو برادر در تیم انتخابی نباشند. این کار به چند طریق ممکن است؟

۱۹۲ (۴)

۱۰۶ (۳)

۲۲۰ (۲)

۱۴۶ (۱)

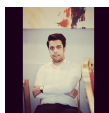
۴۰- در صفحات شطرنجی 5×7 چند مستطیل وجود دارد؟

۴۲۰ (۴)

۳۵۰ (۳)

۲۸۰ (۲)

۲۱۰ (۱)



پاسخنامه تشریحی

۱- گزینه ۳ چون عدد باید فرد باشد، در خانه یکان یا ۵ یا ۷ قرار می‌گیرد، پس دو حالت داریم. در خانه اول سمت چپ چون عدد باید از ۴۰۰۰ بزرگ‌تر باشد، باید ۴ یا بیش‌تر از ۴ باشد که یکی از ارقام ۵ و ۷ را قبلاً انتخاب کردیم، پس ۳ حالت داریم یا ۸ یا ۴ یا یکی از ۵ و ۷ (۲ و صفر نمی‌تواند در خانه اول باشد). برای خانه دوم از سمت چپ، چون از ۶ تا رقم دو رقم استفاده شده، پس ۴ حالت داریم و برای خانه سوم از سمت چپ به همین ترتیب ۳ رقم باقی می‌ماند.

$$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2} = 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$$

۲- گزینه ۲ کلیه‌ی اعداد ۳ رقمی زوج با ارقام غیر تکراری که یکان صفر باشد، برابر است با:

$$\boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{1} = 20$$

↓
صفر قرار دارد.

کلیه‌ی اعداد ۳ رقمی زوج با ارقام غیر تکراری که یکان دو باشد برابر است با: (رقم صدگان صفر نمی‌تواند باشد).

$$\boxed{4} \times \boxed{4} \times \boxed{1} = 16$$

بنابراین $20 + 16 = 36$ عدد وجود دارد.

۳- گزینه ۲

چون عدد سه رقمی فرد با ارقام متمایز است، یکان از بین اعداد $\{1, 3, 5, 9\}$ انتخاب می‌شود. باتوجه به این که یکی از اعداد برای یکان استفاده شده است و صدگان نمی‌تواند صفر باشد بنابراین صدگان ۵ حالت دارد، دهگان نیز باتوجه به انتخاب شدن دو عدد، ۵ حالت خواهد داشت، پس:

$$\frac{\boxed{5}}{\text{صدگان}} \times \frac{\boxed{5}}{\text{دهگان}} \times \frac{\boxed{4}}{\text{یکان}} = 100$$

۴- گزینه ۲ تمامی اعداد ۳ رقمی مضرب ۵ که یکان آن صفر می‌باشد:

یکان دهگان صدگان

$$\boxed{9} \quad \boxed{10} \quad \boxed{1} = 9 \times 10 \times 1 = 90$$

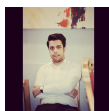
تمامی اعداد ۳ رقمی مضرب ۵ که یکان آن‌ها رقم ۵ می‌باشد:

یکان دهگان صدگان

$$\boxed{9} \quad \boxed{10} \quad \boxed{1} = 9 \times 10 \times 1 = 90$$

$$90 + 90 = 180 = \text{کلیه‌ی اعداد ۳ رقمی مضرب ۵}$$

در جایگاه صدگان، صفر قرار نمی‌گیرد.



۵- گزینه ۲ رقم صدگان باید یکی از سه رقم ۳، ۵ و ۶ باشد. رقم دهگان و یکان هر یک از پنج رقم داده شده می‌تواند باشد.

$$\underline{3} \times \underline{5} \times \underline{5} = 75$$

۶- گزینه ابرای اینکه عددی مضرب ۵ باشد، باید رقم یکان آن صفر و یا ۵ باشد، چون انتخاب رقم صفر در یکان و هزارگان به هم وابسته است، پس مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم و طبق اصل جمع جواب‌ها را جمع می‌کنیم.
حالت اول: یکان عدد صفر باشد:

$$\frac{9}{\text{همه اعداد بهجز صفر}} \times \frac{8}{\text{همه اعداد بهجز صفر}} \times \frac{7}{\text{همه اعداد بهجز صفر}} \times \frac{1}{\{0\}} = 504$$

حالت دوم: یکان عدد پنج باشد:

$$\frac{8}{\text{همه اعداد بهجز صفر و پنج}} \times \frac{8}{\text{همه اعداد بهجز صفر و پنج}} \times \frac{7}{\text{همه اعداد بهجز صفر و پنج}} \times \frac{1}{\{5\}} = 448$$

پس طبق اصل جمع $504 + 448 = 952$ عدد وجود دارد.

۷- گزینه ۱ تعداد حالات را در دو حالت زیر می‌شماریم:

I: اگر رأس‌های A و C هم‌رنگ باشند (این کار به ۳ حالت قابل انجام است). در این صورت برای هریک از رأس‌های B و D، ۲ حالت داریم:

$$3 \times 1 \times 2 \times 2 = 12$$

A C B D

II: اگر رأس‌های A و C هم‌رنگ نباشند (این کار به 3×2 حالت قابل انجام است). در این صورت خود به خود رنگ رأس‌های B و D (که حتماً هم‌رنگ هستند) مشخص می‌شود:

$$3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$$

A C B D

بنابراین تعداد کل حالات برابر $12 + 6 = 18$ می‌باشد.

۸- گزینه ۴ حالت اول: تکرار ارقام مجاز است.

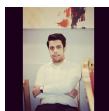
$$\frac{5}{\text{هزارگان}} \times \frac{6}{\text{صدگان}} \times \frac{6}{\text{دهگان}} \times \frac{2}{\text{یکان}} \Rightarrow 5 \times 6 \times 6 \times 2 = 360$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\{0, 5\}$

می‌دانیم عددی مضرب ۵ است که رقم یکانش صفر یا پنج باشد، پس در رقم یکان دو انتخاب داریم، اما در ارقام دیگر همگی ۶ انتخاب داریم، به جز رقم هزارگان که «صفر» نمی‌تواند باشد.

حالت دوم: تکرار ارقام مجاز نیست.

چون در این حالت، رقم صفر در دو نوع محدودیت دخالت دارد (یکی این که نمی‌تواند آخرین رقم سمت چپ باشد و دیگری آن که برای مضرب ۵ بودن عدد مفروض باید رقم یکان باشد)، مسئله را در دو حالت یکی با رقم یکان ۵ و دیگری با رقم یکان صفر حل می‌کنیم؛ سپس نتایج به دست آمده را باهم جمع می‌کنیم:



$$\frac{5}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{1} \times \frac{1}{1} \rightarrow 5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$$

یکان صفر

$$\frac{4}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{1} \times \frac{1}{1} \rightarrow 4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$$

یکان پنج

(پنج مصرف شده است صفر هم نباید قرار داد)

حال می‌گوییم عددی مضرب ۵ است که رقم یکانش صفر یا ۵ باشد، پس طبق اصل جمع داریم:

$$60 + 48 = 108$$

۹- گزینه ۴ چهار خانه را در نظر می‌گیریم. کلمه‌ی ملکان پنج حرفی است. بنابراین خانه‌های سمت راست و چپ با حروف «م» و «ل» و هر کدام به یک طریق پُر می‌شود و چون تکرار مجاز نمی‌باشد، دو خانه‌ی دیگر به ۲ و ۳ طریق تکمیل می‌گردد.

$$\begin{matrix} \text{ل} & & & \text{م} \\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{1} \end{matrix} \longrightarrow 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$$

۱۰- گزینه ۲

$$P(n, n-2) = 12 \Rightarrow \frac{n!}{(n-(n-2))!} = 12$$

$$\frac{n!}{2!} = 12 \Rightarrow n! = 12 \times 2 \times 1 \Rightarrow n! = (4 \times 3) \times 2 \times 1 \Rightarrow n! = 4! \Rightarrow n = 4$$

$$= 7! \times 7! \times 7! = (7!)^3 = 5 \times 7 \times 6 \times 7 \times 4 \times 6 \times 7 \times 3 \times 2 \times 1 \times 7! = 1470 \times (4! \times 6! \times 7!) = 4 \text{ - گزینه ۴}$$

۱۲- گزینه ۱

$$n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)!$$

با توجه به نکته فوق داریم:

$$\frac{5!}{3!} + (3! - 2)! - 1! = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} + (3 \times 2 \times 1 - 2)! - 1! =$$

$$20 + 4! - 1 = 20 + 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 1 = 20 + 24 - 1 = 43$$

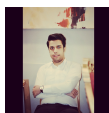
۱۳- گزینه ۲

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = n(n+1) = 30 \Rightarrow n = 5$$

$$\frac{n^2 + 5}{n!} = \frac{25 + 5}{5!} = \frac{30}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{4}$$

۱۴- گزینه ۳ از روش متمم استفاده می‌کنیم. ابتدا تعداد کل حالات اعداد ۵ رقمی را می‌یابیم و سپس تعداد حالت‌هایی را که دو رقم فرد کنار هم باشند را از آن کم می‌کنیم:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 = \text{تعداد کل حالات عدد ۵ رقمی با ارقام داده شده}$$



$$2, 4, 8, \underbrace{3, 7}_{\text{۴ شی}} = 4! \times 2! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 48$$

هم باشند.

$$120 - 48 = 72 = \text{تعداد حالات مطلوب}$$

۱۵- گزینه ۱ در همه کلمات، حرف c در ابتدا قرار دارد و برای آن که حروف r, n, o کنار هم و در کنار حرف c باشند، ۳! حالت وجود دارد. حروف باقیمانده یعنی حروف d و a هم به ۲! حالت می توانند جابه جا شوند. بنابراین تعداد کلمات برابر است با:

$$3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$$

۱۶- گزینه ۳ به جز عدد ۱، اعداد ۴ و ۹ مربع کامل و عدد ۸ مکعب کامل است. ۱ و ۴ دو عدد و ۸ یک عدد هستند. در نتیجه:

$$2 \times 2 \times 2 = 8 : \text{تعداد اعداد سه رقمی با ارقام مربع کامل}$$

$$1 \times 1 \times 1 = 1 : \text{تعداد اعداد سه رقمی با ارقام مکعب کامل}$$

پس در مجموع $8 + 1 = 9$ عدد وجود دارد.

۱۷- گزینه ۴ ارقام فرد ۳، ۵ و ۱ را به عنوان یک دسته در نظر می گیریم. این اعداد و ارقام ۲ و ۴ با یکدیگر ۳ شی متمایز را تشکیل می دهند که می توانند به ۳! حالت کنار هم قرار بگیرند. پس:

$$\underbrace{1, 3, 5}_{2, 4} \times \underbrace{3!}_{\text{جابه جایی ۳ رقم فرد}} = 36$$

۱۸- گزینه ۱ تعداد حالت هایی که ارقام زوج کنار یکدیگرند را به دست آورده و از تعداد کل حالت ها کم می کنیم. تعداد

کل اعداد هفت رقمی ای که می توان با هفت رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ ساخت برابر است با: ۷!

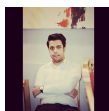
ارقام ۲، ۴، ۶ را درون یک بسته فرض کرده و جایگشت آن را با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ را محاسبه می کنیم. جایگشت ارقام درون بسته را هم در نظر می گیریم، ارقام داخل بسته ۳ رقم با ۳! جایگشت هستند. بسته به همراه ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ پنج رقم هستند.

$$\boxed{2, 4, 6}, 1, 3, 5, 7, \quad 5! \times 3!$$

در نتیجه تعداد اعداد خواسته شده برابر است با:

$$7! - (5! \times 3!) = 5040 - 720 = 4320$$

۱۹- گزینه ۱۲ از آنجایی که تعداد اعضای سال دهم بیشتر از تعداد اعضای سال دوازدهم است، پس تعداد اعضا می تواند مانند جدول زیر باشد:



دهم	یازدهم	تعداد انتخاب هر تیم ۵ نفره
۵	۰	$\binom{6}{5} \binom{4}{0} = 6$
۴	۱	$\binom{6}{4} \binom{4}{1} = 15 \times 4 = 60$
۳	۲	$\binom{6}{3} \binom{4}{2} = 20 \times 6 = 120$

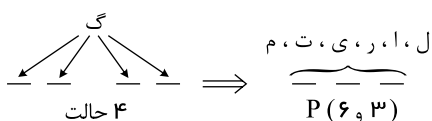
پس تعداد کل انتخاب‌ها برابر است با ۱۸۶.

۲- گزینه نکته: جایگشت‌های r شی از بین n شی متمایز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حرف «گ» به چهار حالت می‌تواند در یکی از جایگاه‌های کلمه چهار حرفی قرار بگیرد. سپس باید جایگشت‌های ۳ حرف باقی مانده را از بین حروف «ل، ا، ر، ی، ت، م» محاسبه کنیم:

$$\text{تعداد حالات} = 4 \times P(6, 3) = 4 \times \frac{6!}{3!} = 4 \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 4 \times 120 = 480$$



۲۱- گزینه نکته: می‌دانیم جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

دو کتاب فیزیک متفاوت به ۲ حالت می‌توانند در ابتدا و انتهای ردیف قرار بگیرند. چهار کتاب ریاضی متفاوت نیز به ۴! حالت می‌توانند کنار هم باشند، پس داریم:

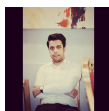
$$\begin{array}{ccc} \square & \square \square \square \square & \square \\ \downarrow & \text{ریاضی} & \downarrow \\ \text{فیزیک} & & \text{فیزیک} \end{array} \Rightarrow 2 \times 4! = 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$$

۲۲- گزینه ۳ معلمین و معاونین به ترتیب به ۳! و ۲! حالت می‌توانند در کنار هم جایگشت داشته باشند. از طرفی معلمین می‌توانند در ابتدا قرار گیرند و معاونین به دنبال آن‌ها و برعکس، پس در دو حالت نیز ترتیب آن‌ها را داریم؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{تعداد کل حالات} = 2 \times 3! \times 2! = 2 \times (3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1) = 24$$

۲۳- گزینه ۴ دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: به دو نفر دو کتاب برسد و به یک نفر یک کتاب برسد.



$$\binom{5}{2} \binom{3}{2} \binom{1}{1} \times \begin{matrix} 3 \\ \downarrow \end{matrix} = 10 \times 3 \times 1 \times 3 = 90$$

$$\begin{cases} 2 & 2 & 1 \\ A, B, C \\ 2 & 1 & 2 \\ A, B, C \\ 1 & 2 & 2 \\ A, B, C \end{cases}$$

حالت دوم: به دو نفر یک کتاب برسد و به یک نفر سه کتاب برسد.

$$\binom{5}{1} \binom{4}{1} \times \binom{3}{3} \times \begin{matrix} 3 \\ \downarrow \end{matrix} = 5 \times 4 \times 1 \times 3 = 60$$

$$\begin{cases} 1 & 1 & 3 \\ A, B, C \\ 1 & 3 & 1 \\ A, B, C \\ 1 & 1 & 3 \\ A, B, C \end{cases}$$

بنابراین کل حالات $90 + 60 = 150$ است.

۲۴- گزینه ۳ برای حل این سؤال از متمم استفاده می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \text{کل حالات: } \binom{9}{5} &= \frac{9!}{5!4!} = 126 \\ \text{هر دو نفر دعوت شوند (سه نفر از بقیه انتخاب شوند): } \binom{7}{3} &= \frac{7!}{3!4!} = 35 \end{aligned} \right\} \rightarrow 126 - 35 = 91$$

۲۵- گزینه ۳

اگر n تیم در یک لیگ بازی کنند؛ به طوری که هر دو تیم با هم دقیقاً یک بازی انجام دهند، تعداد بازی‌ها، برابر است با:

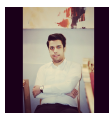
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 78 \Rightarrow n(n-1) = 156 \Rightarrow n^2 - n - 156 = 0$$

جمله مشترک $\rightarrow (n-13)(n+12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n-13=0 \Rightarrow n=13 \checkmark \\ n+12=0 \Rightarrow n=-12 \end{cases}$ غ.ق. (تعداد بازی‌ها نمی‌تواند منفی باشد).

۲۶- گزینه ۳

۳ نفره: $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} = 20$



۲۷- گزینه ۳۱ نفر خاص، قبلاً انتخاب شده‌اند، پس باید ۲ نفر دیگر را از بین ۶، $(9 - 3 = 6)$ نفر باقی‌مانده انتخاب کنیم. چون ترتیب انتخاب‌ها مهم نیست به کمک فرمول ترکیب خواهیم نوشت:

$$\text{پس تعداد کل راه‌های ممکن برابر است با } 20 \times 3 \times 1 = 60$$

۲۸- گزینه ۳ برای درست کردن دسته گل حداقل ۳ و حداکثر ۶ گل انتخاب می‌کند. بنابراین:

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = 56 + 70 + 56 + 28 = 210$$

۲۹- گزینه ۳ چون دانش‌آموزان کلاس دوم حق حضور در این انتخاب را ندارند. در واقع باید سه نفر از بین ۹ نفر دیگر را انتخاب نمود.

$$C(9, 3) = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$$

۳۰- گزینه ۴ برای این که حاصل جمع دو عدد، عددی زوج شود، باید هر دو عدد زوج یا هر دو عدد فرد باشند:

$$\begin{aligned} \text{هر دو عدد زوج یا هر دو عدد فرد} &= \binom{5}{2} + \binom{4}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} + \frac{4!}{2! \times 2!} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} + \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} = 10 + 6 = 16 \end{aligned}$$

۳۱- گزینه ۳

$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{دو سیاه}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{یک سفید}} = \frac{5!}{2! (5-2)!} \times \frac{4!}{1! (4-1)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} \times \frac{4 \times 3!}{1 \times 3!} = 10 \times 4 = 40$$

۳۲- گزینه ۲ پله یکم:

$$\binom{n+1}{4} = 2 \binom{7}{3} \Rightarrow \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2 \times 35$$

$$\Rightarrow (n+1)(n)(n-1)(n-2) = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \Rightarrow n = 7$$

پله دوم:

$$\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

۳۳- گزینه ۱ چشم‌انداز: باید از میان n نقطه ۳ تای آن را انتخاب کنیم به طوری که یکی از نقاط انتخابی A باشد، پس انتخاب ۲ نقطه از بقیه مورد نظر است.



پله یکم:

$$\binom{n-1}{2} = 55 \Rightarrow \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 55 \Rightarrow (n-1)(n-2) = 10 \times 11 \Rightarrow n-2 = 10 \\ \Rightarrow n = 12$$

پله دوم:

$$\binom{n-1}{3} = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3} = 165$$

۳۴- گزینه ۳

از ترکیب استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} \text{دو مهره سیاه باشد: } \binom{3}{2} \times \binom{7}{1} &= 3 \times 7 = 21 \\ \text{سه مهره سیاه باشد: } \binom{3}{3} \times \binom{7}{0} &= 1 \times 1 = 1 \end{aligned} \Rightarrow 21 + 1 = 22$$

۳۵- گزینه ۴

$$\begin{aligned} \text{تعداد زیرمجموعه های } r \text{ عضوی یک مجموعه ای } n \text{ عضوی} &= \binom{n}{r} \\ \Rightarrow \binom{n}{2} = 10 &\Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!2!} = 10 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 10 \rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow n^2 - n = 20 &\Rightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow (n-5)(n+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n-5=0 \Rightarrow n=5 & \text{ق ق} \\ n+4=0 \Rightarrow n=-4 & \text{غ ق} \end{cases} \\ \text{تعداد زیرمجموعه های } 3 \text{ عضوی مجموعه ای } 5 \text{ عضوی} &= \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 10 \end{aligned}$$

۳۶- گزینه ۱ پله یکم: برای ساخت مثلث باید ۳ نقطه از بین این ۹ نقطه انتخاب کنیم:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3! \times 6!} = 84$$

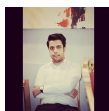
پله دوم: از بین این ۸۴ حالت، حالتی که در آن سه نقطه روی یک خط راست قرار می گیرند، قابل قبول نیست؛ زیرا تشکیل مثلث نمی دهند. سه حالت افقی، سه حالت عمودی و دو حالت قطری حالت های نامطلوب است. پس تعداد مثلث هایی که ساخته می شود، برابر است با:

$$84 - 8 = 76$$

۳۷- گزینه ۲ می خواهیم هیچ دو دکتری کنار هم نباشد. پس برای این کار ابتدا مهندس ها را در یک ردیف قرار می دهیم و هر دایره را جایگاهی برای دکترها در نظر می گیریم.

$$\bigcirc m_1 \bigcirc m_2 \bigcirc m_3 \bigcirc m_4 \bigcirc m_5 \bigcirc m_6 \bigcirc$$

باید از هفت جای خالی، ۴ جای خالی انتخاب کنیم و دکترها را در آن جایگاهها قرار دهیم، پس داریم:



$$\binom{7}{4} \times \underbrace{4!}_{\text{جایگشت دکترها}} \times \underbrace{6!}_{\text{جایگشت مهندسها}} = \frac{7!}{4! \times 3!} \times 4! \times 6! = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} \times 6! = 7 \times 5 \times 6! = 5 \times 7!$$

۳۸- گزینه ۳ از روش غیرمستقیم (متمم) استفاده می‌کنیم. در شکل ۵ خط مستقیم وجود دارد که روی هر کدام ۴ نقطه در یک راستا هستند. اگر ۳ نقطه از این ۴ نقطه انتخاب شوند، تشکیل مثلث نمی‌دهند، پس:

$$\binom{10}{3} - 5 \times \binom{4}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} - 5 \times 4 = 120 - 20 = 100$$

۳۹- گزینه ۴۱ حالت زیر ممکن است رخ دهد:

حالت ۱: هر ۵ نفر از بین a_5 و a_1 انتخاب شوند:

$$\binom{6}{5} = 6$$

حالت ۲: ۴ نفر از بین a_5 و a_1 و یک نفر از برادران a_1 و a_2 انتخاب شود.

$$\binom{6}{4} \binom{2}{1} = 15 \times 2 = 30$$

حالت ۳: ۴ نفر از بین a_5 تا a_1 و یک نفر از برادران a_3 و a_4 انتخاب شود.

$$\binom{6}{4} \binom{2}{1} = 15 \times 2 = 30$$

حالت ۴: ۳ نفر از بین a_5 تا a_1 و یک نفر از a_1 و a_2 و یک نفر از a_3 و a_4 انتخاب شود.

$$\binom{6}{3} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 20 \times 2 \times 2 = 80$$

کل حالات:

طبق اصل جمع

$$\rightarrow 6 + 30 + 30 + 80 = 146$$

۴۰- گزینه ۴ می‌دانیم برای رسم یک مستطیل دلخواه باید دو خط افقی و دو خط عمودی داشته باشیم. پس در این مثال

تعداد کل مستطیل‌ها می‌شود:

$$\binom{6}{2} \times \binom{8}{2} = 15 \times 28 = 420$$

	۱	۲	...	۷
۱			...	
۲				
۳				
۴				
۵				

پاسخنامه کلیدی

(۱) - ۳	(۸) - ۴	(۱۵) - ۱	(۲۲) - ۳	(۲۹) - ۳	(۳۶) - ۱
(۲) - ۲	(۹) - ۴	(۱۶) - ۳	(۲۳) - ۴	(۳۰) - ۴	(۳۷) - ۲
(۳) - ۲	(۱۰) - ۲	(۱۷) - ۴	(۲۴) - ۳	(۳۱) - ۳	(۳۸) - ۳
(۴) - ۲	(۱۱) - ۴	(۱۸) - ۱	(۲۵) - ۳	(۳۲) - ۲	(۳۹) - ۱
(۵) - ۲	(۱۲) - ۱	(۱۹) - ۲	(۲۶) - ۳	(۳۳) - ۱	(۴۰) - ۴
(۶) - ۱	(۱۳) - ۲	(۲۰) - ۱	(۲۷) - ۱	(۳۴) - ۳	
(۷) - ۱	(۱۴) - ۳	(۲۱) - ۴	(۲۸) - ۳	(۳۵) - ۴	