

به نام او که وجودم ز وجودش ز وجودش پر وجود آمده است

سه چیز را با احتیاط برداریم : قدم , قلم , قسم
سه چیز را پاک نگه داریم: جسم , خیال , لباس
از سه چیز کار بگیریم: عقل , همت , صبر
سه چیز را نشکنیم : دل , قسم , پیمان
سه چیز را هرگز نخوریم : حسرت , افسوس , غصه
خود را به سه چیز آلوده نکنیم: خیانت , قمار , اعتیاد
از سه چیز خود را دور نگه داریم: حسادت , حماقت , غرور
با سه چیز کار انجام ندهیم : ترس , ریا , غضب
از سه چیز فرار کنیم : تنبلی , شک , تعصب
سه چیز را راحت نریزیم: اشک , خون , آبرو
به سه چیز عادت نکنیم : دوست , تلویزیون , اینترنت
از سه چیز نون نخوریم : دزدی , قرض , تملق
سه کار را زیاد انجام دهیم: زیارت , عبادت , سیاحت

این مجموعه به جز درسنامه و نکات، دربردارنده‌ی بیش از 300 سوال تشریحی از فصول 1 الی 4 کتاب می‌باشد. این سوالات به صورت فصل به فصل تفکیک شده‌اند. همچنین مجموعه‌ی مذکور شامل 1 نمونه سوال اذرماه (پایش) و 2 نمونه سوال دی‌ماه می‌باشد.

امید است دانش آموزان عزیز با بهره‌گیری از مطالب عنوان شده موجبات سرافرازی اینجانب و خود را فراهم آورند.

موفق و پیروز باشید

نوید پورزکی

تابستان 1403

فهرست مطالب

1..... درسنامه فصل 1

39..... سوالات تشریحی فصل 1

59..... درسنامه فصل 2

82 سوالات تشریحی فصل 2

96..... درسنامه فصل 3

122 سوالات تشریحی فصل 3

139..... درسنامه فصل 4

174..... سوالات تشریحی فصل 4

194..... نمونه سوال پایش-آذر 1402

196..... نمونه سوال دی (1)

198..... نمونه سوال دی (2)



درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ی اعداد:

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$: مجموعه اعداد طبیعی

$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = N \cup \{0\}$, $W - N = \{0\}$: مجموعه اعداد حسابی

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه اعداد صحیح

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\} \rightarrow 0, -\frac{2}{3}, -1.3$: مجموعه اعداد گویا

اعداد گنک: مجموعه اعدادی را که نتوان به صورت عدد صحیح نشان داد.

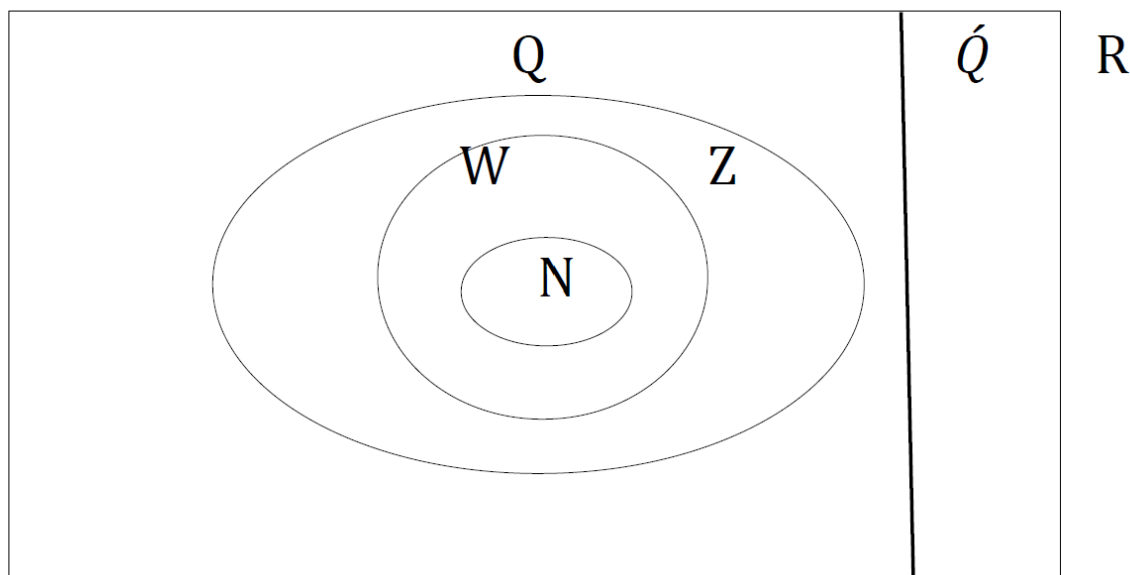
$$\dot{Q} = R - Q \rightarrow \sqrt{2} = 1.4142 \dots$$

اعداد حقیقی: هر نقطه روی محور اعداد، یک عدد حقیقی و هر عدد حقیقی، یک نقطه روی

محور اعداد را نشان می‌دهد.

$$Q \cap \dot{Q} = \emptyset , \quad Q \cup \dot{Q} = R$$

$$\dot{Q} \subseteq R , \quad N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$

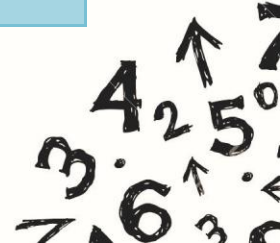




بازه‌ها (فاصله‌ها):

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a,b)	$\{x \in R a < x < b\}$	
بسته	$[a,b]$	$\{x \in R a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a,b)$	$\{x \in R a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a,b]$	$\{x \in R a < x \leq b\}$	

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in R x > a\}$	
نیم باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in R x \geq a\}$	
نیم باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in R x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in R x < a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	R	





مثال: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $-2 \in (-2, 0]$

ب) $0 \in (-2, 0]$

پ) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{2}, 2)$

ت) $-2 \in \{-2, 0\}$

ث) $-1 \in \{-2, 0\}$

ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$

چ) $(-1, 2) \subseteq [-1, 2]$

ح) $Q \subseteq (-17, 0]$

خ) $(-17, 0] \subseteq Q$

د) $6.022 \times 10^{23} \in [3, +\infty)$

ذ) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$

ر) $[2, 5) \subseteq (2, 5)$

ز) $(2, 5) = [2, 5]$

س) $\sqrt{5} \in (0, 2)$

مثال: اگر $A = (-1, 4]$ و $B = (2, +\infty)$ بازه‌های $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$ و $B - A$ را نشان

دهید.





مثال: اگر $A = [-2, 3)$ و $B = [1, 4)$ بازه‌های $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$ و $B - A$ را نشان دهید.

مثال: اگر $A = (-2, 5)$ و $B = [0, +\infty)$ بازه‌های $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$ و $B - A$ را نشان دهید.

مثال: اگر $A = (3, 6]$ و $B = (2, 5)$ بازه‌های $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$ و $B - A$ را نشان دهید.

مثال: اگر $A = [0, 3]$ و $B = (-2, 1]$ بازه‌های $A \cap B$ ، $A \cup B$ ، $A - B$ و $B - A$ را نشان دهید.





مثال: اگر $A = [2, 4]$ و $B = [1, 5]$ بازه‌های $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ و $B - A$ را نشان دهید.

مثال: حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها، روی یک محور بیابید.

الف) $(-3, 0] \cup (-2, 6]$

ب) $(-\infty, 6] \cap (1, 7)$

پ) $(3, +\infty) \cap (5, 10]$

ت) $(-\infty, 2) \cup [2, +\infty)$

ث) $(3, +\infty) - [1, 4)$

ج) $[2, 5) - (3, +\infty)$

مثال: مجموعه‌ی $R - \{-2\}$ را روی محور نشان دهید و به صورت اجتماع دو مجموعه بنویسید.

مثال: مجموعه‌ی $R - [2, 4]$ را روی محور نشان دهید و به صورت اجتماع دو مجموعه بنویسید.

مثال: مجموعه‌ی $R - (-2, 3]$ را روی محور نشان دهید و به صورت اجتماع دو مجموعه بنویسید.





مثال: اگر $A = \{x \in R | x \leq -1\}$ و $B = \{x \in R | -2 \leq x \leq 3\}$ و

$C = \{x \in R | \frac{-x+3}{2} \leq 1\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.

الف) C

ب) $A \cup B$

پ) $B \cap C$

ت) $A - B$

ث) $B - (A \cup C)$

ج) $(A \cap B) \cup C$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی است، مجموعه‌ی متناهی و مجموعه‌هایی که نتوانیم تعداد اعضای آن را با یک عدد حسابی بیان کنیم، مجموعه‌های نامتناهی می‌نامیم. مجموعه‌ی اعداد طبیعی کم‌تر از 4 متناهی (مجموعه A) و مجموعه‌ی اعداد صحیح کم‌تر از 4 نامتناهی است (مجموعه B).

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3\}$$





مثال: وضعیت مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

مجموعه	نامتناهی	متناهی	تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)
مجموعه اعداد اول 1رقمی			4 عضو دارد {2 و 3 و 5 و 7}
مجموعه انسان‌های روی زمین			7/500/000/000
مجموعه اعداد طبیعی			
مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان			530/000/000/000
مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات			
مجموعه دانش آموزان مدرسه مدنی			320
مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی			$10^{10} - 10^9$
مجموعه درخت‌های جنگل‌های شمال			390/000/000/000
مجموعه کسرهای مثبت با صورت دو			
مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد 6			
بازه (1و2)			
مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب			$6/02 \times 10^{23}$





مثال: دو مجموعه‌ی متناهی مثال بزنید که یکی از آن‌ها زیرمجموعه‌ی دیگری باشد.

مثال: دو مجموعه‌ی نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد.

مثال: الف) $\frac{1}{5}$ عددی بین 0 و 1 است. چهار عدد گویای دیگر از بازه‌ی (0 و 1) بنویسید.

ب) آیا می‌توان بین 0 و 1 به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟

پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه‌ی (0 و 1) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q چه می‌توان گفت؟

ث) اگر A دارای یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی باشد، آن گاه A یک مجموعه‌ی خواهد بود و اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن گاه A یک مجموعه‌ی است.

مثال: فرض کنید U مجموعه‌ی تمام مضرب‌های طبیعی عدد 3 باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعه‌ی متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیرمجموعه‌ی نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.

مثال: چه تعداد از مجموعه‌های زیر نامتناهی هستند؟

الف) مجموعه‌ی اعداد حسابی ب) مجموعه شماره‌های طبیعی عدد 24

پ) بازه‌ی $(\frac{1}{8}, \frac{1}{7})$ ت) $A = \{x \in \mathbb{N} | 4 < x < 5\}$

ث) مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد 15

2 (4

3 (3

4 (2

5 (1





مثال: کدام مورد زیر نادرست است؟

$$(a, a) = \emptyset \quad (1)$$

$$[a, a] = \{a\} \quad (2)$$

(3) هیچ دو مجموعه‌ی نامتناهی وجود ندارد که اشتراک آن‌ها تک عضوی باشد.

$$R - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty) \quad (4)$$

مثال: اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد و B مجموعه‌ی اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و غیر تهی است؟

$$A - B \quad (1) \quad B - A \quad (2) \quad A \cap B \quad (3) \quad A - (A \cup B) \quad (4)$$

درس دوم: متمم یک مجموعه

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آن‌گاه مجموعه‌ی $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A^c نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A^c شامل عضوهای U است که در A نیستند. مثال: اگر $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ و $A = \{1, 3\}$ ، آن‌گاه A^c را بیابید.

نکته: اگر U مجموعه مرجع و A زیر مجموعه‌ی دلخواهی از آن باشد.

$$\begin{aligned} \emptyset &= U & , & & U &= \emptyset & , & & A \cup A^c &= U & , & & A \cap A^c &= \emptyset \\ A - A^c &= A & , & & A^c - A &= A^c & , & & A - U &= \emptyset & , & & U - A &= A^c \\ U - A^c &= A \end{aligned}$$

مثال: R مجموعه‌ی مرجع است. متمم مجموعه‌های زیر را به صورت بازه‌ای و روی محور نشان دهید.

الف) $A = [-3, 4)$

ب) $B = (-\infty, 3]$





پ) $C = (1, +\infty)$

ت) $D = \{1, 2, 3, \dots\}$

مثال:

1) اگر $U = Z$ و $F = \{x \in Z \mid -3 < x \leq 2\}$ ، آن گاه: $F' =$

2) اگر $U = R$ و $B = \{x \in R \mid -3 < x \leq 2\}$ ، آن گاه: $B' =$

3) اگر $U = W$ ، آن گاه: $N' =$

4) اگر $U = R$ ، آن گاه: $W' =$

مثال: کدام گزینه درست است؟

- 1) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، همواره متناهی است.
 - 2) اشتراک دو مجموعه‌ی متناهی، همواره متناهی است.
 - 3) متمم یک مجموعه‌ی نامتناهی، همواره متناهی است.
 - 4) اگر دو مجموعه‌ی A و B متناهی باشند، قطعاً اجتماع A و B غیر تهی است.
- نکته: ☺

1) $(A')' = A$

2) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

3) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$B' \subseteq A'$

نکته: ☺ اگر $A \subseteq B$ آن گاه:



تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی:

حتما یادتون هست (😊) که برای نشان دادن تعداد اعضای مجموعه‌ی A از علامت $n(A)$ استفاده می‌کردیم. امسال می‌خواهیم رابطه‌ای برای $n(A \cup B)$ به دست آوریم.

اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی دلخواه باشند:

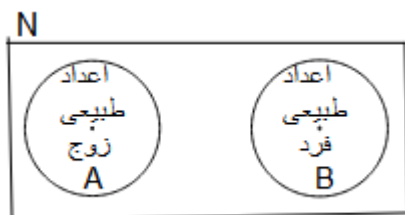
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

و اگر A و B مجزا باشند ($A \cap B = \emptyset$):

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

😊 نکته: به هر دو مجموعه‌ی A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه‌ی جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

$$A \cap B = \emptyset$$



🔗 مثال: اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ ، آنگاه $n(B)$ کدام است:

10 (4

15 (3

25 (2

20 (1

یعنی عضوهایی که در A یا B یا در هر دو آن‌ها است. (حداقل یا دست کم عضو یکی باشد.)		$A \cup B$ (1
---	--	---------------

یعنی عضوهایی که هم در A و هم در B هستند.		$A \cap B$ (2)
یعنی عضوهایی که در A هستند ولی در B نیستند (فقط در A هستند).		$A - B = A \cap B'$ (3)
یعنی عضوهایی که در B هستند ولی در A نیستند (فقط در B هستند).		$B - A = B \cap A'$ (4)
یعنی عضوهایی که نه در A هستند و نه در B		$(A \cup B)' = A' \cap B'$ (5)
یعنی عضوهایی که در هر دو آن‌ها (اشتراک آن‌ها) نیستند.		$(A \cap B)' = A' \cup B'$ (6)



تفاضل مجموعه‌ها: تعداد اعضای که فقط در مجموعه A قرار دارند را با $n(A - B)$ نمایش می‌دهند که می‌توان از رابطه‌ی زیر مقدار آن را محاسبه نمود:

$$n(A - B) = n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B)$$

و همچنین داریم:

$$n(B - A) = n(B \cap A') = n(B) - n(A \cap B)$$

مثال: فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع باشند، به طوری که

$$n(U) = 140, n(A) = 80, n(B) = 65, n(A \cap B) = 10, \text{ مطلوب است:}$$

الف) $n(A \cup B)$

ب) $n(A \cap B)$

پ) $n(A' \cap B)$

ت) $n(A' \cap B')$

ث) $n(A' \cup B')$

ج) $n((A \cup B) - (A \cap B))$

مثال: فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشد به طوری که

$$n(U) = 80, n(A) = 21, n(B) = 35, n(A \cap B) = 12, \text{ مطلوب است:}$$

الف) $n(B')$

ب) $n(A \cup B)$

پ) $n(A - B)$

ت) $n(B \cap A')$

ث) $n(A' \cup B')$

ج) $n(A' \cap B')$





$$\text{چ) } n((A - B) \cup (B - A))$$

مثال: در یک نظرسنجی از 120 مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که 65 نفر آن‌ها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و 59 نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. هم چنین 32 نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این 110 نفر در یک ماه گذشته: (مشابه تمرین 6-صفحه 13 کتاب درسی) الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

مثال: در کلاسی که 28 نفر دانش آموز دارد، 21 نفر حداقل به یکی از رشته‌های فوتبال یا والیبال علاقه دارند. اگر 17 نفر به فوتبال و 9 نفر به والیبال علاقه داشته باشند، چند نفر فقط به یکی از این دو رشته علاقه دارند؟

17 (4)	16 (3)	14 (2)	13 (1)
--------	--------	--------	--------





مثال: در یک کلاس 25 نفری، تعداد 15 نفر عضو تیم فوتبال و 11 نفر عضو تیم بسکتبال هستند. اگر 5 نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند؟

- 5 (1) 6 (2) 20 (3) 10 (4)

مثال: در یک کلاس 35 نفری، 27 نفر به فوتبال و 21 نفر به والیبال علاقه‌مند هستند. اگر 6 نفر به هیچ یک از دو ورزش علاقه‌ای نداشته باشند چند نفر فقط به والیبال علاقه‌مند هستند؟
(گزینه 2-1402)

- 6 (1) 12 (2) 2 (3) 9 (4)

مثال: در یک کلاس 22 نفری، 1 نفر هم به فوتبال و هم به والیبال علاقه‌مند است. اگر 9 نفر به والیبال علاقه‌مند باشند، چند نفر به فوتبال علاقه‌مندند؟ (3 نفر به هیچ کدام از دو رشته علاقه‌ای ندارند.) (گاج-1402)

- 10 (1) 11 (2) 9 (3) 12 (4)



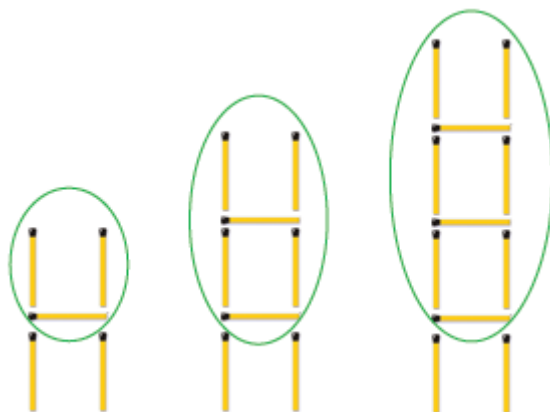


درس سوم: الگو و دنباله

الگو: ساختاری منظم از اشکال یا اعداد است و همه‌ی سعی ما پیدا کردن نظم می‌باشد که در نتیجه بتوانیم جمله‌ی عمومی الگو را به دست آوریم و از آن جا به تمام جملات آن الگو، دسترسی پیدا کنیم.

لأمثال: با توجه به شکل‌های زیر و تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته، جمله عمومی الگو را به دست آورید.

برای به دست آوردن جمله‌ی عمومی (t_n) شکل‌های الگو را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:



$$t_1 = 1(3) + 2, \quad t_2 = 2(3) + 2, \quad t_3 = 3(3) + 2, \quad t_4 = 4(3) + 2$$

$$\dots \Rightarrow t_n = n \times 3 + 2 = 3n + 2$$

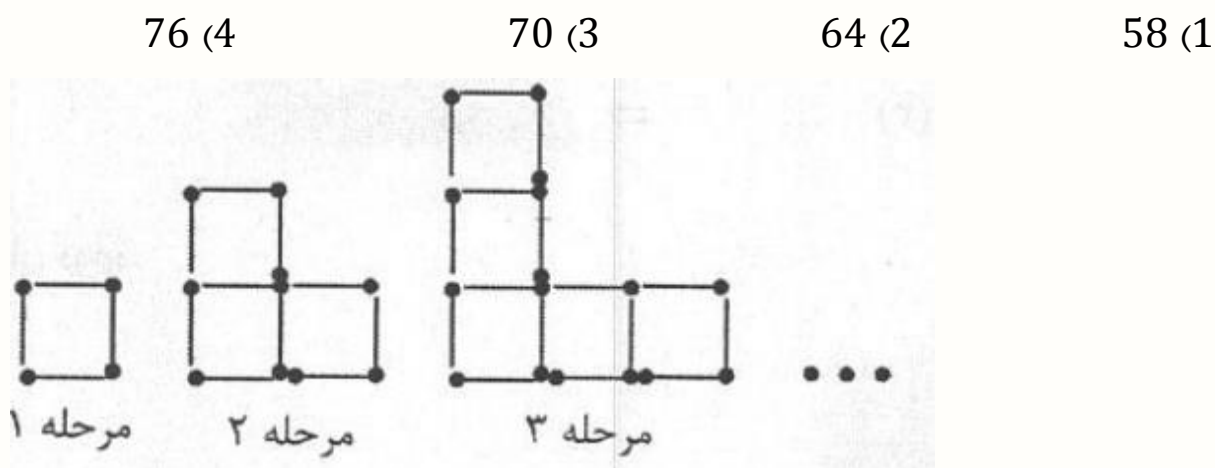
الگوی خطی: وقتی جمله عمومی یک الگو $t_n = an + b$ (a و b حقیقی و ثابت) باشد،

الگو را خطی می‌نامیم. در این الگوها، اختلاف مقدار هر دو جمله متوالی ثابت و برابر a (ضریب n) است.

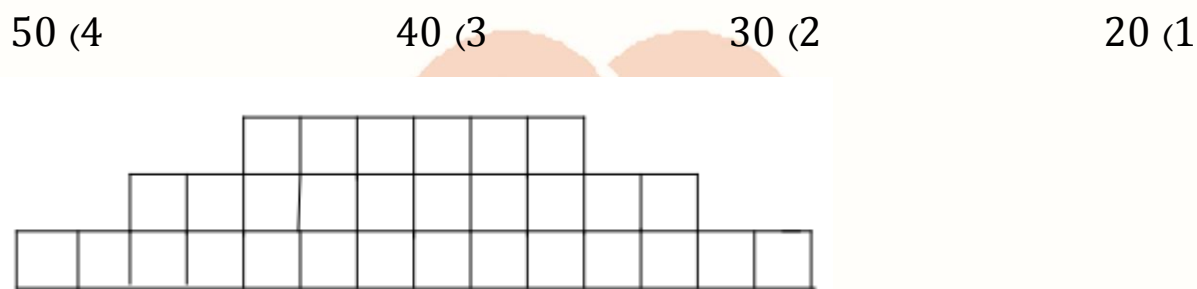
در الگوی خطی نقاط (t_n و n) بر روی خط $y = ax + b$ قرار می‌گیرند.



مثال: تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله‌ی دهم کدام است؟



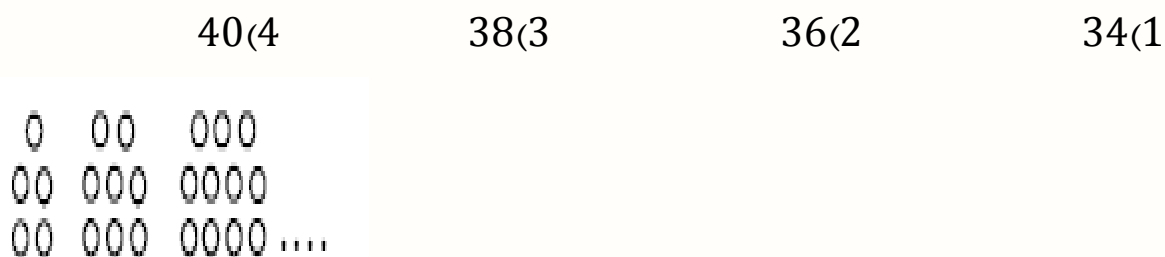
مثال: در شکل، چیدمان صندلی‌ها در یک سالن تئاتر مشخص شده است. تعداد صندلی‌ها در ردیف هفتم چقدر است؟



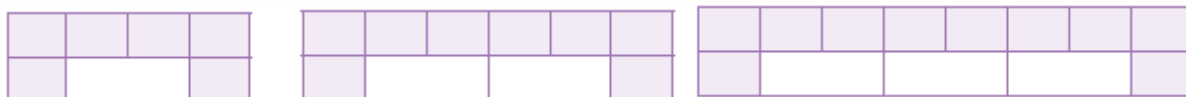
مثال: در الگوی زیر در چه مرحله‌ای تعداد مربع‌های رنگی برابر 144 است؟



مثال: در شکل زیر، تعداد نقطه‌ها در شکل دوازدهم، کدام است؟ (س.خ. 98)



مثال: به الگوی زیر توجه کنید. (تمرین 1-صفحه 20 کتاب درسی)



الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره‌ی آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی هفتم آن بنویسید.

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

ت) برای 100 کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل 50 کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چقدر است؟

مثال: در یک الگوی خطی جملات چهارم و نهم به ترتیب 18 و 43 است. جمله بیستم این الگو را به دست آورید.



مثال: در یک الگوی خطی جملات پنجم و دهم به ترتیب 14 و 29 است. جمله بیست و پنجم این الگو را به دست آورید.

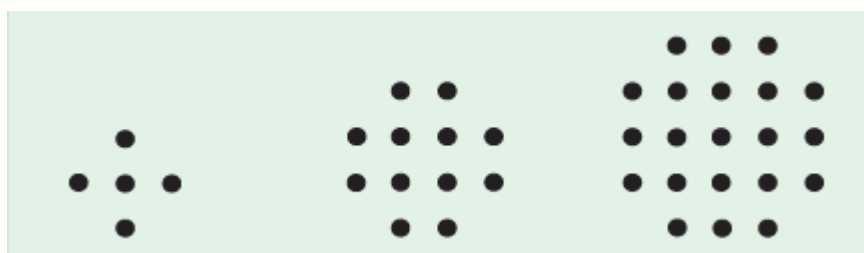
مثال: در یک الگوی خطی جملات سوم و نهم به ترتیب 13 و 37 است. جمله چهلم این الگو را به دست آورید.

مثال: در یک الگوی خطی جمله ی سوم برابر 3 و جمله ی هفتم برابر 11 می باشد، جمله ی چندم این الگو برابر 21 است؟

(1) دهم (2) یازدهم (3) دوازدهم (4) سیزدهم

الگوی غیرخطی: الگوهایی هستند که اختلاف هر دو جمله متوالی آنها، مقدار ثابتی نیست.

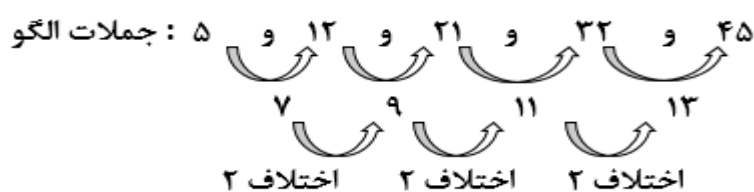
مثال: با توجه به شکل های زیر، جمله ی عمومی الگو را به دست آورید.





الگوی درجه دوم: هر الگو با جمله عمومی $t_n = an^2 + bn + c$ را یک الگوی درجه دوم می‌نامیم. در این الگو اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، خود، یک الگوی خطی تشکیل می‌دهد.

در مثال قبل:



نکته: الگوهای درجه دوم معروف:

دنباله مثلثی: $1, 3, 6, 10, 15, \dots \rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$



دنباله مربعی: $1, 4, 9, 16, 25, \dots \rightarrow a_n = n^2$



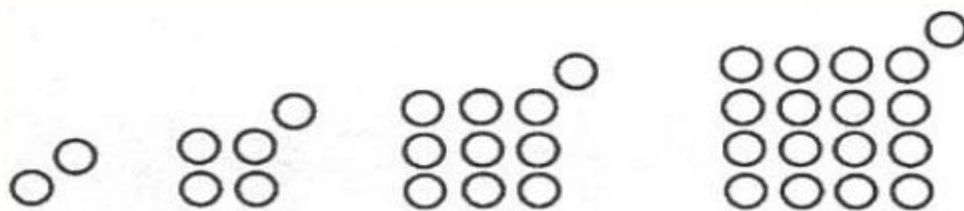
مثال: با توجه به الگوی زیر، a_6 کدام است؟

39 (4)

37 (3)

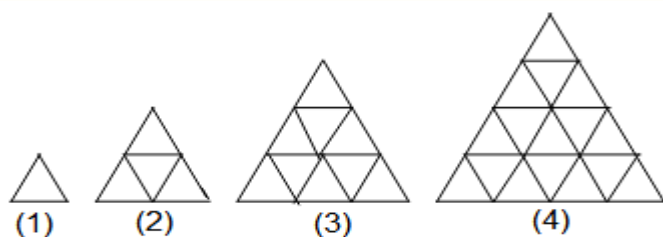
42 (2)

50 (1)



مثال: در الگوی هندسی زیر در کدام مرحله، 81 مثلث داریم؟

7 (1) 8 (2) 9 (3) 10 (4)



دنباله: هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می گیرند، یک دنباله می نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می شوند. در ضمن ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشد مانند: اعداد اول

مثال: جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = \frac{3n-1}{n}$ می باشد. سه جمله ی اول آن را بنویسید.

مثال: جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $b_n = 2n^2 - 1$ می باشد. سه جمله ی اول آن را بنویسید.

مثال: جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $c_n = -n + n^2$ می باشد. سه جمله ی اول آن را بنویسید.

مثال: جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $d_n = 2n - n^2$ می باشد. سه جمله ی اول آن را بنویسید.



مثال: جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد جاهای خالی را پر کنید.

الف) $a_n = n^2 + 1$: 2, 5, ..., 17, ..., 37

ب) $b_n = -n^2 + 2$: 1, -2, ..., -14, ...

ج) $c_n = -n - 3$: -4, ..., ..., -7, ...

د) $c_n = -2 - 3n$: ..., -8, ..., ..., -17

مثال: برای دنباله‌های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله‌ی عمومی هر دنباله را بیابید.

الف) 5, 8, 13, 20, 29, ...

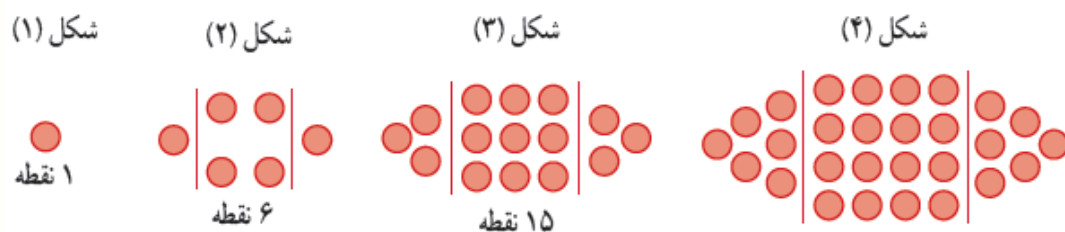
ب) 5, 12, 22, 35, 51, ...

پ) 3, 9, 19, ...

ت) 2, 6, 12, ...



مثال: الگوی زیر را در نظر بگیرید. (تمرین 2- صفحه 20 کتاب درسی)



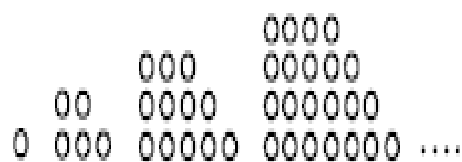
الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی ششم آن بنویسید.

ب) جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

مثال: در شکل زیر، تعداد نقطه‌ها در شکل نهم، کدام است؟ (س.د. 98)

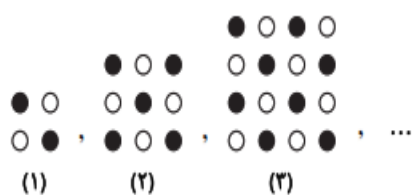
117(1) 120(2) 123(3) 125(4)



مثال: در الگوی زیر، تعداد نقاط توپر در مرحله‌ی دهم از تعداد نقاط توپر مرحله‌ی نهم چه

تعداد بیشتر است؟ (گزینه 2-1402)

19(1) 22(2) 11(3) 21(4)





درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله‌های حسابی: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله‌ی قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله‌ی حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

2, 4, 6, 8, ...

😊 **نکته:** جمله‌ی اول را با t_1 و قدر نسبت را با d نمایش می‌دهیم.

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

😊 **نکته:** در دنباله‌ی حسابی، قدر نسبت از تفریق جمله جلویی و عقبی به دست می‌آید.

$$3, 6, 9, 12, \dots \quad t_1 = 3, \quad d = 6 - 3 = 3$$

😊 **نکته:** جمله‌ی عمومی یک دنباله حسابی، یک دنباله‌ی خطی و به صورت $t_n = an + b$ است که ضریب n همان d است.

مثلاً: اگر $t_n = 20 + 30n$ جمله‌ی عمومی یک دنباله حسابی باشد، $d = 30$ است.

🔗 **مثال:** در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله‌ی بعدی را بنویسید و سپس جمله‌ی عمومی هر کدام را به دست آورید:

الف) 5, 10, 15, ...

ب) 1, 3, 5, ...

پ) 5, 9, 13, ...

ت) 13, 7, 1, ...

🔗 **مثال:** کدام یک از دنباله‌های زیر حسابی نیست؟

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots \quad (4) \quad 1, 2, 4, \dots \quad (3) \quad 2, 2, 2, \dots \quad (2) \quad \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \dots \quad (1)$$





مثال: در دنباله‌ی حسابی $4, 11, 18, 25, \dots$ جمله‌ی شانزدهم چقدر است؟

109 (4

107 (3

105 (2

103 (1

مثال: در دنباله‌ی حسابی $53, 47, 41, \dots$

الف) جمله‌ی 17ام را مشخص کنید.

ب) کدام جمله‌ی دنباله برابر -67 است؟

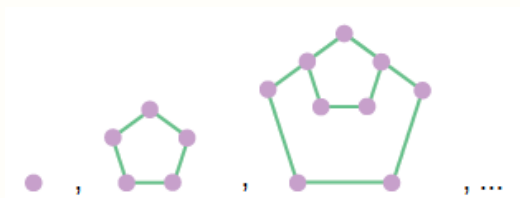
مثال: جمله‌ی چندم الگوی زیر 397 است؟

110 (4

100 (3

98 (2

120 (1



مثال: چندمین جمله‌ی دنباله‌ی حسابی مقابل برابر -89 می‌باشد؟

$23, 16, 9, \dots$





نکته: اگر t_m و t_n دو جمله‌ی دلخواه و مختلف یک دنباله‌ی حسابی باشند (غیر متوالی)،
آن‌گاه قدر نسبت از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید: (تستی)

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$$

مثال: یازدهمین جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی برابر 52 و جمله‌ی نوزدهم آن برابر 92 است.
جمله‌ی بیست و ششم این دنباله‌ی حسابی را به دست آورید.

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی نهم برابر 61 و جمله‌ی شانزدهم برابر 96 است. قدر
نسبت و جمله‌ی سی‌ام این دنباله را به دست آورید.

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب 20 و 56 است. در این دنباله
جمله‌ی دهم چه قدر است؟

56 (4)

99 (3)

72 (2)

83 (1)





مثال: اگر جمله‌ی اول و پنجم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب 3 و 11 باشد، جمله‌ی دهم این دنباله کدام است؟ (س.د.ا.01)

21(1) 22(2) 23(3) 24(4)

مثال: اگر 8 و 5 به ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جمله شانزدهم کدام است؟ (س.د.ت.01)

11.6 (1) 9.6 (2) 2.4 (3) 1.4 (4)

مثال: جمله‌ی پنجم و نهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب 30 و 58 است.

الف) دنباله را مشخص کنید.

ب) جمله‌ی 25ام را به دست آورید؟

ج) جمله‌ی چندم عدد 100 است؟





مثال: در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول 3 و مجموع سه جمله‌ی بعدی آن 39 است. در این دنباله جمله‌ی اول چقدر است؟

4 (1) -3 (2) -4 (3) 3 (4)

مثال: 100 قرص نان را بین 5 نفر چنان تقسیم کرده‌ایم که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی ساخته‌اند و همچنین یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر شده است. بزرگ‌ترین سهم چقدر است؟

30 (1) 35 (2) 27 (3) 42 (4)

واسطه‌ی حسابی: اگر سه عدد a ، b و c تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، آن‌گاه $b = \frac{a+c}{2}$ یا $a + c = 2b$ را واسطه حسابی بین دو عدد a و c می‌گوییم.

$$3, 7, 11, \dots \rightarrow 3 + 11 = 2(7) \rightarrow 14 = 14$$

مثال: x را طوری بیابید که دنباله‌ی $12x-9$ ، $5x$ ، $2x+1$ تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند.





مثال: اعداد $2p + 3$, $3p + 4$, $5p - 1$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند.

قدر نسبت این دنباله کدام است؟

4 (7

3 (6

2 (5

1 (4

نکته: اگر بین a و b و m تا واسطه‌ی حسابی درج کنیم:

$$d = \frac{b - a}{m + 1}$$

مثال: بین 18 و 62 سه عدد را چنان درج می‌کنیم که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند. مجموع این سه واسطه‌ی حسابی چقدر است؟

4 (160

3 (140

2 (120

1 (90

مثال: اگر $2, b, c, d, 10$ پنج جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، حاصل

$b + c + d$ چقدر است؟

مثال: بین 5 و 45 سه عدد را به گونه‌ای قرار دهید که تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند.

مثال: بین 3 و 38 چهار عدد را به گونه‌ای قرار دهید که تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند.





مثال: اگر بین دو عدد 12 و 40 سه عدد قرار دهیم، به طوری که تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، در این صورت اختلاف مشترک را تعیین کنید.

نکته: اگر بین اندیس‌های چهار جمله دلخواه از یک دنباله‌ی حسابی، رابطه‌ی

$m + n = p + q$ برقرار باشد، اصطلاحاً می‌گوییم این جملات متساوی الفاصله هستند و داریم:

$$m + n = p + q \rightarrow t_m + t_n = t_p + t_q$$

مثال: مجموع جملات هفتم و دهم یک دنباله‌ی حسابی 18 می‌باشد. اگر جمله‌ی دوازدهم 6 باشد، جمله‌ی پنجم را بیابید.

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات دهم و بیستم برابر 180 است. در این دنباله حاصل $t_{13} + t_{17}$ کدام است؟

90 (1) 180 (2) 360 (3) 200 (4)

مثال: اگر در یک دنباله‌ی حسابی $t_3 + t_4 = 20$ باشد، حاصل

$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$ کدام است؟

40 (1) 50 (2) 60 (3) 80 (4)





دنباله‌های هندسی: دنباله‌ی هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله‌ی اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدر نسبت دنباله می‌نامیم. (جمله اول را با t_1 و قدر نسبت را با r نمایش می‌دهیم.)

جمله‌ی n ام دنباله‌ی هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله‌ی اول و r قدر نسبت می‌باشد. ($t_1, r \neq 0$)

نکته: در دنباله‌ی هندسی، قدر نسبت از تقسیم هر جمله به جمله‌ی قبل از آن به دست می‌آید.

$$3, -6, 12, -24, \dots \quad t_1 = 3, \quad r = \frac{-6}{3} = -2$$

مثال: در دنباله‌های هندسی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، دو جمله‌ی بعدی را بنویسید و سپس جمله‌ی عمومی هر کدام را به دست آورید:

الف) $2, 6, 18, 54, \dots$

ب) $5, 10, 20, 40, \dots$

پ) $6, -60, 600, -6000, \dots$

ت) $4, 2, 1, \dots$

مثال: کدام یک از دنباله‌های زیر هندسی نیست؟

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \quad (4) \quad 5, 5, 5, \dots \quad (3) \quad 7, 28, 112, \dots \quad (2) \quad 2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, \dots \quad (1)$$

مثال: چند دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{5}$ می‌توان ساخت؟

(1) محدود (2) نامحدود

(3) تعداد بستگی به جمله‌ی اول دارد. (4) غیر قابل بررسی است.





❗مثال: چه تعداد گزاره‌های زیر درست است؟

الف) هر دنباله یا حسابی است یا هندسی.

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

ج) در دنباله‌های هندسی یا همه‌ی جملات مثبت و یا همه‌ی جملات منفی هستند.

❗مثال: با توجه به دنباله‌ی روبرو به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$$

الف) نوع دنباله را مشخص کنید و قدر نسبت آن را به دست آورید.

ب) جمله‌ی عمومی دنباله را مشخص کنید.

❗مثال: با توجه به دنباله‌ی هندسی $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ حاصل عبارت $\frac{t10}{t7}$ را به دست آورید.

❗مثال: در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی اول $\frac{1}{6}$ و قدرنسبت دنباله 6 است. چندمین جمله از

این دنباله برابر 216 می‌باشد.





مثال: در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی اول 1024 و قدر نسبت دنباله $\frac{1}{2}$ است، چندمین جمله‌ی دنباله برابر 64 می‌باشد.

مثال: علی دوچرخه‌ای را به قیمت A تومان خرید. فرض کنید دوچرخه‌ی دسته دوم، در هر سال 20 درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد. دوچرخه‌ی او 5 سال بعد چه قیمتی خواهد داشت؟ (تمرین 4 - صفحه 27 کتاب درسی)

(1) $A \left(\frac{4}{5}\right)^5$ (2) $A \left(\frac{4}{5}\right)^4$ (3) $A \left(\frac{1}{5}\right)^5$ (4) $A \left(\frac{1}{5}\right)^4$

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی، حاصل ضرب جملات سوم و هفتم، هشت برابر جمله‌ی چهارم است. جمله‌ی ششم این دنباله کدام است؟

(1) 4 (2) 6 (3) 8 (4) 10

مثال: جمله‌ی بیستم از دنباله‌ی حسابی $3, 0, -3, \dots$ ، با جمله‌ی چندم از دنباله‌ی هندسی $2, 6, 18, \dots$ برابر است؟

(1) چهارم (2) پنجم (3) هفتم (4) هشتم





نکته: اگر t_m و t_n دو جمله‌ی دلخواه و مختلف یک دنباله‌ی هندسی باشند (غیر متوالی)،
آن‌گاه قدر نسبت از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید: (تستی)

$$r^{m-n} = \frac{t_m}{t_n}$$

مثال: جمله‌ی سوم یک دنباله‌ی هندسی 9 و جمله‌ی ششم آن 243 است. جمله‌ی دهم
این دنباله‌ی هندسی را به دست آورید.

مثال: جملات سوم و ششم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب 12 و 96 است. جمله‌ی دهم این
دنباله کدام است؟ (تمرین 6 – صفحه 27 کتاب درسی)

3072 (1) 768 (2) 2048 (3) 1536 (4)

مثال: جمله‌ی سوم یک دنباله‌ی هندسی 6 و جمله‌ی ششم آن 48 است. جمله‌ی دهم این
دنباله‌ی هندسی را به دست آورید.





مثال: جمله ی پنجم یک دنباله ی هندسی برابر $\frac{16}{9}$ و جمله ی دوم آن برابر 6 می باشد. قدر نسبت دنباله کدام است؟

$$(1) \frac{2}{3} \quad (2) \frac{3}{4} \quad (3) \frac{3}{2} \quad (4) \frac{4}{3}$$

واسطه ی هندسی: اگر سه عدد a ، b و c تشکیل دنباله هندسی دهند، آن گاه:

$$a, b, c \rightarrow b^2 = ac$$

$$3, 6, 12, \dots \rightarrow (\pm 6)^2 = 3 \times 12 \rightarrow 36 = 36$$

مثال: بین دو عدد 3 و 48 یک واسطه ی هندسی درج کنید؟ آیا جواب ها یکتاست؟

مثال: پنج عدد $\frac{5}{3}, a, b, c, \frac{5}{12}$ به ترتیب جمله های متوالی یک دنباله ی هندسی هستند. b کدام است؟

$$(1) \frac{2}{3} \quad (2) \frac{5}{6} \quad (3) \frac{3}{4} \quad (4) \frac{4}{5}$$

مثال: اگر سه جمله ی $x + 4, x, x - 2$ تشکیل یک دنباله ی هندسی بدهند، جمله ی نخستین آن کدام است؟ ($x - 2$ جمله ی اول است).

$$(1) 2 \quad (2) 8 \quad (3) 4 \quad (4) 7$$





مثال: اگر $x, x+2, x+3$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، x را بیابید.

مثال: عدد کدام گزینه، واسطه‌ی هندسی بین جمله‌های دهم و شانزدهم دنباله‌ی حسابی زیر است؟

4, 8, 12, ...

16 (1)

32 (2)

$8\sqrt{10}$ (3)

$16\sqrt{10}$ (4)

نکته: اگر بخواهیم بین دو عدد a و b تعداد m عدد دیگر، طوری قرار دهیم که با این دو عدد تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند، این عمل را درج m واسطه‌ی هندسی بین دو عدد a و b می‌نامیم و داریم:

$$r^{m+1} = \frac{b}{a}$$

مثال: بین $\frac{1}{3}$ و 27 سه عدد مثبت قرار داده‌ایم به طوری که با آن دو عدد تشکیل دنباله‌ی هندسی داده اند. مجموع این سه عدد چقدر است؟ (جمله‌ی اول $\frac{1}{3}$ است).

11 (1)

13 (2)

15 (3)

9 (4)





مثال: بین اعداد 8 و $\frac{81}{2}$ سه واسطه‌ی هندسی مثبت درج کرده‌ایم. جمله‌ی دوم این دنباله کدام است؟ (جمله‌ی اول 8 است.)

- (1) 12 (2) 14 (3) 16 (4) 18

مثال: در دنباله‌ی هندسی $a, b, c, d, e, \dots$ ، مقدار e کدام است؟ ($d > 0$) (س.خ.ا. 01)

- (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{12}$ (3) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (4) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$

نکته: اگر بین اندیس‌های چهار جمله از یک دنباله‌ی هندسی، رابطه‌ی $p + q = n + m$ برقرار باشد، آن‌گاه اصطلاحاً می‌گوییم جملات متساوی الفاصله هستند و داریم:

$$p + q = n + m \rightarrow t_p \times t_q = t_n \times t_m$$

مثال: اگر در یک دنباله‌ی هندسی حاصل ضرب جملات دوم و هفتم برابر 6 باشد، حاصل $t_3 \times t_4 \times t_5 \times t_6$ را بیابید.

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی $t_2 t_4 = 2t_5$ ، جمله‌ی اول کدام است؟ ($t_5 \neq 0$)

- (1) $\sqrt{2}$ (2) 2 (3) 4 (4) $2\sqrt{2}$





مثال: حاصل ضرب بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی ... 2,4,8, کدام است؟

(تمرین 5 - صفحه 27 کتاب درسی)

(1) 2^{460} (2) 2^{420} (3) 2^{105} (4) 2^{210}

مثال: حاصل ضرب سی جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی ... 5,25,125, کدام است؟

(1) 5^{30} (2) 5^{450} (3) 5^{465} (4) 5^{300}

نکته: اگر t_l ، t_m و t_n سه جمله از یک دنباله‌ی حسابی و نیز به ترتیب جملات متوالی

یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت r باشند، r برابر است با:

$$r = \frac{n-m}{m-l}$$

مثال: جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله‌ی حسابی، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از

یک دنباله‌ی هندسی باشند، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

(1) $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{7}{4}$ (3) $\frac{7}{3}$ (4) $\frac{9}{4}$

مثال: جملات چهارم، ششم و چهاردهم یک دنباله‌ی حسابی غیر ثابت، سه جمله‌ی متوالی از

دنباله‌ای هندسی می‌باشد. قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟ (گاج-01)

(1) 6 (2) 4 (3) 3 (4) 5

