



فصل اول : جبر و معادله

۱) در دنباله ی حسابی $۳, ۸, ۱۳, \dots$ حداقل چند جمله ی اول آن را با هم جمع کنیم تا حاصل بیشتر از ۵۰۰ شود؟

۲) اگر مجموع $۱ + ۲ + ۳ + \dots + n$ برابر ۵۰۵۰ شود، مقدار n را بیابید.

۳) در دنباله ی اعداد $۱, ۴, ۷, ۱۰, \dots$ مجموع اعدادی که از جمله ی هفتم شروع و به جمله ی هجدهم ختم می شود را محاسبه کنید.

۴) چند جمله از دنباله ی حسابی $۳, ۶, ۹, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل برابر ۸۴ شود.

۵) در یک دنباله ی هندسی مجموع چهار جمله ی اول برابر ۱۰ و جمله ی پنجم از جمله ی اول ده واحد بیشتر است. قدر نسبت را بیابید.

۶

مجموع چند جمله از دنباله‌ی هندسی $۱۲, ۲۴, ۰۰۰ - ۶$ برابر ۱۰۲۶ است.

۷

روی محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه‌ی متمایز وجود دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز را به دست آورید.

۸

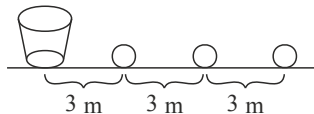
مجموع صد جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی $۳, ۷, ۱۱, ۱۵, \dots$ را به دست آورید.

۹

مجموع همه‌ی عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

۱۰

در یک مسابقه تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله‌ی ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله‌ی توپ اول تا سبد ۳ متر است (شکل زیر). دوندۀ ای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی برود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. اگر این دونده مجموعاً ۹۱۸ متر دویده باشد، تعیین کنید او چند توپ در سبد انداخته است؟

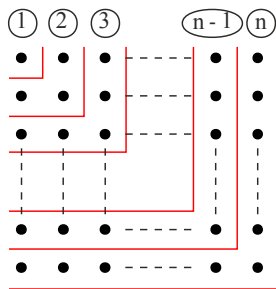


۱۱) مجموع ۱۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی مقابل را به دست آورید:

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$$

۱۲) برای محافظت از تابش مضر مواد رادیواکتیویته لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آنها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر ۹۷ درصد کاهش یابد؟

۱۳) در دنباله‌ی حسابی ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ... حداقل چند جمله‌ی آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟



۱۴) الف) به کمک شکل روبرو حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) =$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود را در قسمت الف بررسی کنید.

۱۵) مجموع همه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟

۱۶) در ۲۰ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله‌ی اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۱۷) جمله ی عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ می باشد. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع ۲۵۵ شود؟

۱۸) طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

۱۹) برای عددی حقیقی a ($a \neq 1$) و عدد طبیعی n :

الف) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

۲۰) اگر $S_n = \frac{1}{5}(n^2 + n)$ مجموع n جمله ی اول یک دنباله ی حسابی باشد، جمله ی عمومی این دنباله را بیابید.

پاسخنامه تشریحی

۱

$$\begin{aligned} 3, 8, 13, \dots &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 8 - 3 = 5 \end{cases} \\ S_n > 500 &\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[2 \times 3 + (n-1) \times 5] > 500 \\ S_n &= \frac{n}{2}[6 + 5n - 5] > 500 \Rightarrow \frac{n}{2}[5n + 1] > 500 \\ \Rightarrow n(5n + 1) > 1000 &\Rightarrow 5n^2 + n - 1000 > 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 1 + 2000 = 2001 \rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{2001}}{10} = \frac{-1 \pm 44.72}{10}$$

تعیین علامت		$\frac{-1-141,42}{10}$		$\frac{-1+141,42}{10}$	
→		10		10	
	+	o	-	o	+

$$n > \frac{-1 + 44.72}{10} \Rightarrow n > 4.37 \rightarrow n \geq 5$$

حداقل ۵ جمله

۲

$$S = \frac{n(n+1)}{2} = 5050 \Rightarrow n(n+1) = 10100 = 100 \times 101 \Rightarrow n = 100$$

۳

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

روش اول:

$$a_1 = 1, \quad d = 3$$

$$a_7 = 1 + 6(3) = 19$$

$$\text{تعداد جملات: } (18 - 7) + 1 = 12$$

$$s_{12} = \frac{12}{2}(2(19) + 11(3)) = 426$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} a_7 + a_8 + \dots + a_{18} &= S_{18} - S_6 = \frac{18}{2}(2a_1 + 17d) - \frac{6}{2}(2a_1 + 5d) \\ &= 12a_1 + 138d = 12 + 138 \times 3 = 426 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_r = 6 \end{cases} \Rightarrow d = a_r - a_1 = 6 - 3 = 3$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow \frac{n}{2}(2(3) + (n-1)3) = 168 \Rightarrow 6n + 3n^2 - 3n = 168$$

$$\Rightarrow 3n^2 + 3n - 168 = 0 \Rightarrow n^2 + n - 56 = 0 \Rightarrow (n+8)(n-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -8 \text{ قی} \\ n = 7 \text{ قی} \end{cases}$$

در هر دنباله هندسی $a_n = a_1 q^{n-1}$ و $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ می باشد.

$$a_5 = a_1 + 10$$

$$\Rightarrow a_1 q^4 = a_1 + 10 \Rightarrow a_1(1 - q^4) = -10$$

$$S_5 = 10 \Rightarrow S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = 10 \Rightarrow \frac{-10}{1-q} = 10 \Rightarrow 1-q = -1 \Rightarrow q = 2$$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow \frac{6(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = 1026$$

$$\Rightarrow 513 = 1 - (-2)^n \Rightarrow (-2)^n = -512 \Rightarrow n = 9$$

نقطه‌ی اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل کردن نقطه‌ی دوم به نقاط دیگر به غیر از نقطه‌ی اول ۱۸ وتر به دست می‌آید. سپس نقطه‌ی سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه‌ی این عمل داریم:

$$19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1 = \frac{19(19+1)}{2} = 190$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{یادآوری:}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$a_1 = 3, d = 4, S_{100} = \frac{100}{2}(2a_1 + 99d) = 50(6 + 99 \times 4) \Rightarrow S_{100} = 50 \times 402 = 20100$$

$$10 \leq 4k \leq 99 \Rightarrow 2,5 \leq k \leq 24,75$$

$$k = 3, 4, 5, \dots, 24 \Rightarrow n = 24 - 3 + 1 = 22$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$12, 16, 20, \dots, 96 \quad a_1 = 12, \quad d = 4$$

$$S_{22} = \frac{22}{2}(a_1 + a_{22}) = 11(12 + 96) = 1188$$

۱۰) دهنده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید $3 + 3 = 6$ متر طی کند، برای توپ دوم باید $6 + 6 = 12$ متر و برای توپ سوم $9 + 9 = 18$ متر و... طی کند. پس داریم:

$$6, 12, 18, \dots \quad a_1 = 6, \quad d = 6$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 918 \Rightarrow \frac{n}{2}(12 + 6n - 6) = 918$$

$$3n(n+1) = 918 \Rightarrow \underbrace{n(n+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} = 306 = \underbrace{17 \times 18}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} \Rightarrow n = 17$$

۱۱)

$$a_1 = \frac{1}{8}, \quad q = 2 \quad S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{8}(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{1023}{8}$$

۱۲) اولین لایه مواد مضر را نصف می‌کند، دومین لایه از نصف باقی‌مانده $\frac{1}{4}$ مواد مضر را برطرف می‌کند و... دنباله‌ای این اعداد بصورت زیر است:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} \rightarrow n \geq 6 \rightarrow \text{حداقل ۶ لایه}$$

۱۳)

$$a_1 = 5, \quad d = 3 \rightarrow S_n > 493 \rightarrow \frac{n}{2}(10 + 3n - 3) > 493$$

$$3n^2 + 7n - 986 > 0 \quad \Delta = 49 + 12 \times 986 = 11881$$

$$n = \frac{-7 \pm 109}{6} = -\frac{58}{3}, \quad 17 \Rightarrow n < -\frac{58}{3} \quad \text{یا} \quad n > 17 \Rightarrow n \geq 18 \quad \text{حداقل ۱۸ جمله}$$

غ ق ق

۱۴)

(الف)

نقطه‌های مسیر $n + \dots +$ نقطه‌های مسیر (۳) + نقطه‌های مسیر (۲) + نقطه‌های مسیر (۱) = تعداد کل نقطه‌ها

$n \times n = n^2$ جدول $n \times n$ از نقطه ها = تعداد کل نقطه ها

$$\Rightarrow n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

(ب) $2n - 1$ برابر با n امین عدد فرد است پس: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ مجموع n جمله ی اول دنباله ی اعداد فرد است پس داریم:

$$a_1 = 1, d = 2 \rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2 + (n - 1) \times 2) = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$$

$$\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

۱۵

$$166,5 \leq k \leq 166,6 \rightarrow 999 \leq 6k \leq 1000 \rightarrow 6k = \text{مضارب شش}$$

$$k = 17, 18, \dots, 166 \rightarrow \text{تعداد } n = 166 - 17 + 1 = 150$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$102, 108, \dots, 996$$

$$S_{150} = \frac{150}{2}(a_1 + a_{150}) = \frac{150}{2}(102 + 996) = 82350$$

(۱۶) جملات فرد دنباله ی حسابی با جمله ی اول a_1 و قدر نسبت $2d$ می باشد و تعداد آنها ۱۰ تا است. پس:

$$\text{فرد } S = \frac{10}{2}(2a_1 + 9 \times 2d) = 135 \rightarrow 2a_1 + 18d = 27$$

جملات زوج نیز دنباله ای حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت $2d$ می باشد و تعداد آنها ۱۰ تا است پس:

$$\text{زوج } S = \frac{10}{2}(2a_1 + 9 \times 2d) = 150 \rightarrow 2(a_1 + d) + 18d = 30 \rightarrow a_1 + 10d = 15$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 18d = 27 \\ a_1 + 10d = 15 \end{cases} \Rightarrow d = 1,5, a_1 = 0$$

روش دوم:

$$\begin{cases} a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = 150 \\ a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 135 \end{cases}$$

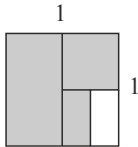
$$\underbrace{a_2 - a_1}_d + \underbrace{a_4 - a_3}_d + \dots + \underbrace{a_{20} - a_{19}}_d = 150 - 135 \Rightarrow 10d = 15 \rightarrow d = 1,5$$

$$S_{20} = 135 + 150 \rightarrow 10(2a_1 + 19d) = 285 \Rightarrow 2a_1 + 19 \times 1,5 = 28,5 \rightarrow a_1 = 0$$

۱۷

$$a_n = 1 \times 2^{n-1} \Rightarrow a_1 = 1, q = 2 \rightarrow \text{دنباله } 1, 2, 4, 8, \dots$$

$$S_n = 255 \rightarrow \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 255 \Rightarrow 2^n = 256 \rightarrow n = 8$$



دنباله‌ی مساحت‌های رنگ شده: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ $a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

$$S_n \geq \frac{99}{100} \times 1 \rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \rightarrow 2^n \geq 100 \rightarrow n \geq 7 \rightarrow \text{حداقل ۷ مرحله}$$

۱۹ الف) مجموع $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول یک و قدر نسبت a می‌باشد.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & a & + & a^2 & + \dots + & a^{n-1} & a_1 = 1, q = a \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{جمله اول} & & \text{جمله دوم} & & \text{جمله سوم} & & \text{جمله } n \text{ ام} & \end{array}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1(a^n - 1)}{a - 1} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

(ب)

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{5}(1 + 1) = \frac{2}{5} \Rightarrow S_1 = a_1 \rightarrow a_1 = \frac{2}{5} \\ S_2 &= \frac{1}{5}(4 + 2) = \frac{6}{5} \rightarrow a_1 + a_2 = \frac{6}{5} \rightarrow \frac{2}{5} + a_2 = \frac{6}{5} \rightarrow a_2 = \frac{4}{5} \\ d &= a_2 - a_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \rightarrow a_n = \frac{2}{5} + (n - 1) \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}n \end{aligned}$$

نکته: در فرمول S_n دنباله‌ی حسابی، ضریب پشت n^2 برابر با نصف قدر نسبت دنباله‌ی حسابی است.

$$S_n = \frac{1}{5}n^2 + \frac{1}{5}n \rightarrow \frac{d}{2} = \frac{1}{5} \rightarrow d = \frac{2}{5}$$



نویدپورزکی

فصل اول : هندسه تحلیلی و جبر

درس اول : هندسه تحلیلی

۱) اگر $A(7, -2)$ و $B(12, 10)$ باشد.

الف- مختصات نقطه ی وسط AB را بدست آورید.

ب - طول پاره خط AB را محاسبه کنید.

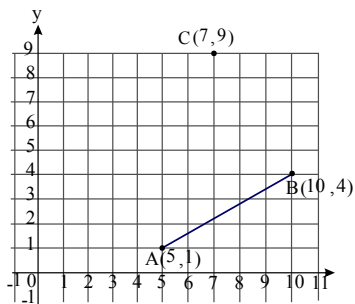
۲) فاصله ی دو خط $3x + 4y + 18 = 0$ و $6x + 8y = 4$ را بدست آورید.

۳) دایره ای به مرکز $O(3, -1)$ از نقطه ی $A(8, 6)$ گذشته است. مساحت دایره چقدر است؟

۴) قرینه ی نقطه ی $C(3, -1)$ نسبت به نقطه ی $M(5, 2)$ را بدست آورید.



۵) مربع $ABCD$ در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است، به طوری که $A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ دو رأس مجاور آن هستند.



الف - شیب ضلع AB را بنویسید.

ب - شیب ضلع AD را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را بنویسید.

پ - اگر بدانیم نقطهٔ $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

ت) مربع را به طور کامل رسم کنید.

۶) اگر $A(3, 7)$ و $B(5, -1)$ باشد، معادلهٔ عمودمنصف پاره خط AB را بدست آورید.

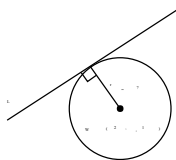
۷) اگر $A(3, 5)$ و $B(-2, 1)$ و $C(1, -1)$ رأس‌های مثلث ABC باشند. معادلهٔ میانهٔ BM را بنویسید.

۸) فاصلهٔ بین دو خط موازی $3x - 4y + 10 = 0$ و $(2m + 1)x - 3my - 15 = 0$ چقدر است؟

۹) یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = -2x - 1$ واقع است. اگر $A(4, 1)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را بدست

آورید.

۱۰) خط $L: 3x - 4y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.





۱۱) نقاط $A(2, 3)$ ، $B(-2, -1)$ و $C(-4, -3)$ سه رأس از یک مستطیل هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید.

۱۲) فاصله نقطه $A(4, 7)$ را از خط به معادله $2x - y = -4$ بدست آورید.

۱۳) دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(4, 7)$ و $B(-2, 3)$ هستند.

الف- اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب- آیا نقطه $C(-1, 8)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۱۴) خط L به معادله $2y - 3x = 1$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادله $y = mx + 5$ را در نظر بگیرید.

الف - m ، را طوی بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

ب - به ازای چه مقداری از m ، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

۱۵) نشان دهید مثلث با رأس‌های $A(1, 2)$ و $B(2, 5)$ و $C(4, 1)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم‌الزاویه است.

۱۶) نشان دهید مثلث با رئوس $A(-2, 1)$ و $B(2, 3)$ و $C(4, -1)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم‌الزاویه است.

۱۷) وضعیت هر جفت از خط‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$$\ell: 3x - y = 7 \quad d: y = 3x - 1 \quad \Delta: x + 3y = 4$$

۱۸) نقاط $A(4, 0)$ ، $B(0, 3)$ و $C(1, 1)$ رأس‌های یک مثلث هستند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB چقدر است؟



۱۹ دو نقطه $A(14, 3)$ و $B(10, -13)$ را در نظر بگیرید.

الف - فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB بدست آورید.

ب - معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

۲۰ فاصله ی دو خط به معادلات $12x - 5y + 20 = 0$ و $10y - 24x + 12 = 0$ را بدست آورید.

درس دوم : معادله ی درجه ی دوم و تابع درجه ی دوم

۲۱ max یا min تابع $g(x) = -(x+1)^2 + 3$ را بدست آورید.

۲۲ کمترین یا بیشترین مقدار تابع $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 20x$ را بدست آورید.

۲۳ استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد

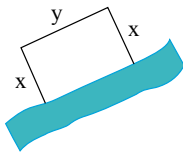
مستطیل را طوری بیابید که:

الف - مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب - مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.



۲۴) قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.



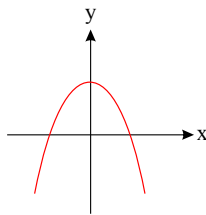
۲۵) راکتی که به طور عمودی روبه بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله آن به صورت مقابل است.

$$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$$

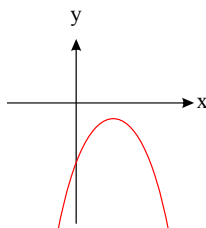
الف) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی‌گردد؟



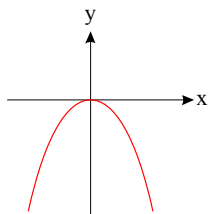
۲۶) در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید.



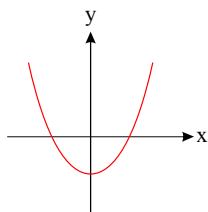
۲۷) در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید.



۲۸ در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید.



۲۹ در شکل زیر روی علامت a ، b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید.



۳۰ بیشترین مقدار تفاضل $\frac{1}{9}$ مربع عددی، از ۶ برابر آن عدد، چقدر است؟

۳۱ بدون حل معادله در وجود و علامت ریشه‌های معادله $5x^2 - 7x - 5 = 0$ بحث کنید.

۳۲ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3\beta + \alpha\beta^3$ را بدست آورید.

۳۳ در معادله‌ی درجه دوم $6x^2 + (k+1)x + k = 0$ اگر مجموع دو ریشه‌ی حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشه‌های این معادله را بیابید.

۳۴ اگر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ معکوس یکدیگر باشند، مجموع این دو ریشه را بیابید.



۳۵) اگر در معادله ی $3x^2 - 15x + m = 0$ ، یکی از ریشه ها ۲ واحد بزرگتر از ریشه ی دیگر باشد، مقدار m چقدر است؟

۳۶) معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه هایش به صورت $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ و $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ باشند.

۳۷) معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه هایش $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ باشند.

۳۸) در معادله ی درجه دوم $(m - 2)x^2 + 3x - 5 = 0$ مقدار m را چنان بیابید که:

الف- ریشه های معادله معکوس هم باشند.

ب- مجموع ریشه ها برابر با ۲ باشد.

۳۹) مساحت یک اتاق ۲۴ متر مربع و محیط اتاق ۲۰ متر است. ابعاد اتاق را بدست آورید.

۴۰) معادله ی زیر را حل کنید.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

۴۱) معادله ی زیر را حل کنید.

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = u$$



۴۲) معادله‌ی زیر را حل کنید.

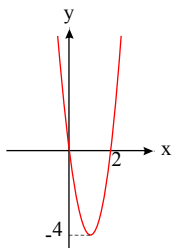
$$(2x^2 + 1)^2 - 12(2x^2 + 1) + 27 = 0$$

۴۳) ریشه‌های حقیقی معادله‌ی زیر را بدست آورید.

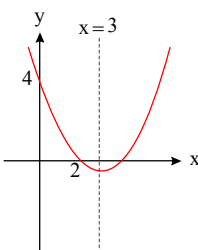
$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$$

۴۴) معادله‌ی سهمی‌های زیر را بنویسید.

الف)



ب)

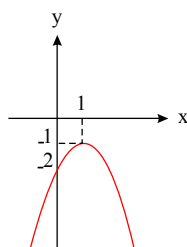
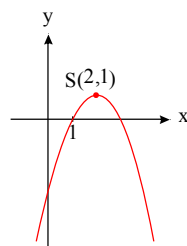
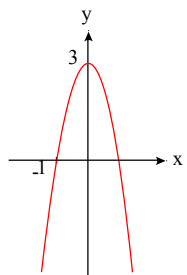
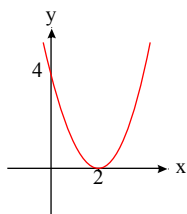


ج

ث

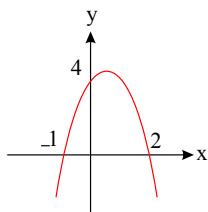
ت

پ

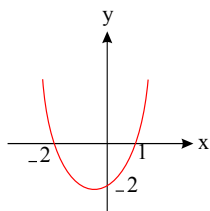




۴۵) معادله‌ی سهمی شکل زیر را بدست آورید.



۴۶) باتوجه به نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ضرایب a و b و c را بدست آورید.



۴۷) معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن برابر مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 4x - 6 = 0$ باشد.

۴۸) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار عددی عبارت $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ را بدست آورید.

۴۹) مقدار m چقدر باشد تا ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگر باشند؟

درس سوم : معادلات گویا و معادلات رادیکالی

۵۰) معادلات زیر را حل کنید.



الف

$$2\sqrt{2t-1} - t = 1$$

ب

$$2x = 1 - \sqrt{2-x}$$

پ

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1$$

ت

$$\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$$

ث

$$2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$$

۵۱) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sqrt{(x-2)^2 + 9} = 5$$

۵۲) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x+9}$$



۵۳) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x - \sqrt{x} = 20$$

۵۴) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$$

۵۵) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{2 - x}{x^2 - x}$$

۵۶) علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله‌ی ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی جمله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود یک ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از جمله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

۵۷) الف - عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد، مسئله چند جواب دارد؟

ب - عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن عدد باشد، مسئله چند جواب دارد؟

۵۸) اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد

$$t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$$

داشت؛ به‌طوری که این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟



۵۹) معادلات زیر را حل کنید.

الف)

$$\frac{3}{x^2} - 12 = 0$$

ب)

$$\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2 + 2k}$$

پ)

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$$

۶۰) هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5$$



ب.

$$\frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5$$

پ.

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3}$$

ت.

$$\sqrt{t+4} = 3$$

ث.

$$k = \sqrt{6k-8}$$

ج.

$$x + \sqrt{x} = 6$$

چ.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$$



ج

$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$$



پاسخنامه تشریحی

۱ الف

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7 + 12}{2} \rightarrow x_M = \frac{19}{2} \rightarrow M(9.5, 4)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 10}{2} \rightarrow y_M = 4$$

ب

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(7 - 12)^2 + (-2 - 10)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} \rightarrow \boxed{AB = 13}$$

۲

$$3x + 4y + 18 = 0 \rightarrow a = 3, b = 4, c = 18$$

$$6x + 8y - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} 3x + 4y - 2 = 0 \rightarrow a = 3, b = 4, c' = -2$$

$$\rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|18 - (-2)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} \rightarrow \boxed{d = 4}$$

۳

$$AO = \text{شعاع دایره} \rightarrow AO = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(8 - 3)^2 + (6 - (-1))^2}$$

$$\rightarrow AO = \sqrt{25 + 49} \rightarrow AO = \sqrt{74} \rightarrow r = \sqrt{74}$$

$$\text{مساحت دایره } S = \pi r^2 = \pi(\sqrt{74})^2 \rightarrow \boxed{S = 74\pi}$$

۴ قرینه‌ی نقطه‌ی C نسبت به نقطه‌ی M، نقطه‌ی D است بطوری که نقطه‌ی M وسط پاره‌خط DC است.

$$x_M = \frac{x_D + x_C}{2} \rightarrow 5 = \frac{x_D + 3}{2} \rightarrow x_D + 3 = 10 \rightarrow \boxed{x_D = 7}$$

$$y_M = \frac{y_D + y_C}{2} \rightarrow 2 = \frac{y_D - 1}{2} \rightarrow y_D - 1 = 4 \rightarrow \boxed{y_D = 5}$$

$$\rightarrow \boxed{D(7, 5)}$$

۵

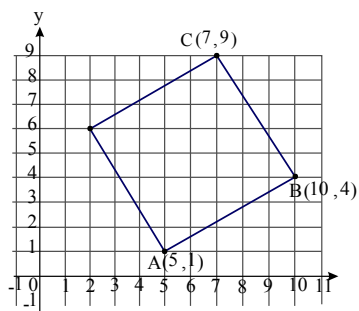
$$\text{الف) } m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 4}{5 - 10} = \frac{-3}{-5} \rightarrow m_{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\text{ب) } AB \perp AD \rightarrow m_{AD} \cdot m_{AB} = -1 \rightarrow m_{AD} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{3}{5}} \rightarrow m_{AD} = -\frac{5}{3}$$

پ) مربع نوعی از متوازی‌الاضلاع است و داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 + 7 = 10 + x_D \\ 1 + 9 = 4 + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 6 \end{cases} \rightarrow D(2, 6)$$

ت



۶

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5 + 10}{2} \Rightarrow x_M = 7.5$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 4}{2} \Rightarrow y_M = 2.5$$

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 4}{5 - 10} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

$$m \cdot m_{AB} = -1 \rightarrow m(-\frac{3}{5}) = -1 \rightarrow m = \frac{5}{3}$$

شیب خط عمودمنصف

معادله‌ی عمودمنصف: $y - y_M = m(x - x_M) \rightarrow y - 2.5 = \frac{5}{3}(x - 7.5) \rightarrow y - 2.5 = \frac{5}{3}x - 12.5 \rightarrow y = \frac{5}{3}x - 10$

۷

میانۀ BM از رأس B به وسط ضلع AC رسم می‌شود:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{5 + 7}{2} = 6, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5 \rightarrow M(6, 5), \quad B(10, 4)$$

$$m_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{5 - 4}{6 - 10} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 6) \rightarrow y - 5 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{2}$$

۸

دو خط موازی $\rightarrow \frac{2m + 1}{3} = \frac{-3m}{-4} \rightarrow 9m = 8m + 4 \rightarrow 9m - 8m = 4 \rightarrow m = 4$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 10 = 0 \\ 9x - 12y - 15 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\div 3} \begin{cases} 3x - 4y + 10 = 0 \\ 3x - 4y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow a = 3, \quad b = -4, \quad c = 10, \quad c' = -5$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|10 - (-5)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} \rightarrow d = 3$$

فاصله رأس از ضلع = طول ضلع مربع

۹

$$y = -2x - 1 \rightarrow 2x + y + 1 = 0, \quad A(4, 1)$$

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad x_0 = 4, \quad y_0 = 1$$



$$d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \times 4 + 1 \times 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow \text{طول ضلع مربع} = \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\rightarrow \text{مساحت مربع} = (2\sqrt{5})^2 = 20$$

۱۰ خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است، پس داریم:

$$d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(2) - 4(-1) + 0|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} \rightarrow R = 2$$

۱۱ در مستطیل قطرهای یکدیگر را نصف می کنند پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} x_O &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = -1 \\ y_O &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3 + (+3)}{2} = 3 \end{aligned} \right\} O(-1, 3)$$

$$x_O = \frac{x_B + x_D}{2} \rightarrow 2x_O = x_B + x_D \rightarrow 2(-1) = -2 + x_D \rightarrow \boxed{x_D = 0}$$

$$y_O = \frac{y_B + y_D}{2} \rightarrow 2y_O = y_B + y_D \rightarrow 2(3) = -1 + y_D \rightarrow \boxed{y_D = 5}$$

$$\rightarrow \boxed{D(0, 5)}$$

۱۲

$$2x - y + 4 = 0, A(4, 7)$$

$$a = 2, b = -1, c = 4, x_o = 4, y_o = 7$$

$$d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(4) - 1(7) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \rightarrow \boxed{d = \sqrt{5}}$$

۱۳

$$\text{الف) } AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{4 \times 13} \rightarrow AB = 2\sqrt{13}, AB = 2R \rightarrow 2R = 2\sqrt{13} \rightarrow \boxed{R = \sqrt{13}}$$



$$\left. \begin{aligned} x_O &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1 \\ y_O &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7 + 3}{2} = 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\text{مرکز دایره } O(1, 5)}$$

$$\text{ب) } OC = \sqrt{(x_O - x_C)^2 + (y_O - y_C)^2} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (5 - 8)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$OC = \sqrt{13} \rightarrow OC = R \rightarrow \text{نقطه } C \text{ روی محیط دایره قرار دارد}$$

۱۴

$$2y - 3x = 1 \rightarrow 2y = 3x + 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \rightarrow m' = \frac{3}{2}$$

$$\text{الف} \rightarrow m = m' \rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$\text{ب) دو خط عمود} \rightarrow m \cdot m' = -1 \rightarrow m = \frac{-1}{m} \rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

۱۵

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{1 + 9} \rightarrow AB = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{9 + 1} \rightarrow AC = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{4 + 16} \rightarrow BC = \sqrt{20}$$

$$AB = AC, \quad AB^2 + AC^2 = BC^2 \rightarrow \text{متساوی الساقین قائم الزاویه} \quad = \triangle ABC$$

۱۶

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

$$AB = BC, \quad AB^2 + BC^2 = AC^2 \rightarrow \text{متساوی الساقین قائم الزاویه} \quad = \triangle ABC$$

۱۷

$$\ell: 3x - y = 7 \rightarrow y = 3x - 7 \rightarrow \boxed{m_1 = 3}$$

$$d: y = 3x - 1 \rightarrow \boxed{m_2 = 3}$$

$$\Delta: x + 3y = 4 \rightarrow 3y = -x + 4 \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow \boxed{m_3 = -\frac{1}{3}}$$

$$m_1 = m_2 \rightarrow \ell \parallel d$$

$$m_1 \times m_3 = 3 \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow L \perp \Delta$$



$$m_p \times m_p = 3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow d \perp \Delta$$

۱۸ طول و ارتفاع وارد بر ضلع AB = فاصله‌ی نقطه‌ی C از خط AB

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 0}{0 - 4} \rightarrow m_{AB} = -\frac{3}{4}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \rightarrow y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 4) \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3$$

$$\rightarrow 4y = -3x + 12 \rightarrow 3x + 4y - 12 = 0 \quad \text{معادله‌ی خط } AB$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(1) + 4(1) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} \rightarrow d = 1 \rightarrow CH = 1$$

۱۹

$$\left. \begin{array}{l} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{14 + 10}{2} \rightarrow x_M = 12 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-13)}{2} \rightarrow y_M = -5 \end{array} \right\} \rightarrow M(12, -5)$$

$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} \rightarrow OM = 13$$

$$\text{ب) } m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - (-13)}{14 - 10} = \frac{16}{4} \rightarrow m_{AB} = 4$$

$$\text{معادله‌ی عمودمنصف } AB = m' \rightarrow m' = \frac{-1}{m_{AB}} \rightarrow m' = -\frac{1}{4}$$

$$y - y_M = m'(x - x_M) \rightarrow y - (-5) = -\frac{1}{4}(x - 12)$$

$$\rightarrow y + 5 = -\frac{1}{4}x + 3 \rightarrow y = -\frac{1}{4}x - 2$$

۲۰

$$12x - 5y + 20 = 0 \rightarrow a = 12, b = -5, c = 20$$

$$10y - 24x + 12 = 0 \xrightarrow{\div(-2)} 12x - 5y - 6 = 0 \rightarrow a = 12, b = -5, c' = -6$$

$$\rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|20 - (-6)|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{26}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} \rightarrow d = 2$$

۲۱

$$g(x) = -(x + 1)^2 + 3 = -(x^2 + 2x + 1) + 3 \rightarrow g(x) = -x^2 - 2x + 2$$

تابع نقطه‌ی max دارد $a = -1 < 0$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(-1)} = \frac{2}{-2} \rightarrow x = -1$$



$$g(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 2 = -1 + 2 + 2 = 3 \rightarrow y_{\max} = 3$$

۲۲

$$a = -\frac{1}{2} < 0 \rightarrow \text{تابع نقطه‌ی max دارد}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{20}{1} \rightarrow x = 20$$

$$f(20) = -\frac{(20)^2}{2} + 20(20) = -200 + 400 = 200 \rightarrow y_{\max} = 200$$

$P =$ محیط استادیوم

$$P = 2y + \pi x \rightarrow 2y + \pi x = 1500 \rightarrow 2y = -\pi x + 1500$$

$$\rightarrow y = \frac{-\pi x}{2} + 750$$

$$\text{مساحت مستطیل (الف)} \quad S_1 = xy = x\left(\frac{-\pi x}{2} + 750\right) = -\frac{\pi}{2}x^2 + 750x, \quad a < 0$$

$$x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{750}{2(-\frac{\pi}{2})} \rightarrow x_{\max} = \frac{750}{\pi} \approx 238.85$$

$$y_{\max} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{750}{\pi}\right) + 750 = -375 + 750 \rightarrow y_{\max} = 375$$

$$\text{مساحت استادیوم (ب)} \quad S_2 = xy + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x\left(\frac{-\pi x}{2} + 750\right) + \pi\frac{x^2}{4}$$

$$\rightarrow S_2 = -\frac{\pi x^2}{2} + 750x + \frac{\pi x^2}{4} \rightarrow S_2 = -\frac{\pi x^2}{4} + 750x, \quad a < 0$$

$$\rightarrow x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{750}{2(-\frac{\pi}{4})} \rightarrow x_{\max} = \frac{1500}{\pi} \approx 477.70$$

$$y_{\max} = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1500}{\pi}\right) + 750 \rightarrow y_{\max} = -375 + 750 \rightarrow y_{\max} = 375$$

۲۴

$$2x + y = 100 \rightarrow y = 100 - 2x$$

$$\text{مساحت مستطیل} \quad f(x) = x \cdot y = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$$

$$\rightarrow f(x) = -2x^2 + 100x \rightarrow x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-2)} \rightarrow x_{\max} = 25, \quad y_{\max} = 50$$

$$\rightarrow \text{بیشترین مساحت} \quad S_{\max} = 1250$$

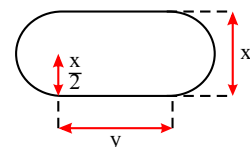
۲۵

$$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$$

$$\text{الف)} \quad t_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-5)} = \frac{100}{10} \rightarrow t_{\max} = 10 \quad \text{ثانیه}$$

$$\text{ب)} \quad \text{ارتفاع اوج} \quad h(10) = 100(10) - 5(10)^2 = 1000 - 500 \rightarrow h_{\max} = 500 \quad \text{متر}$$

$$\text{پ)} \quad h(t) = 0 \rightarrow 100t - 5t^2 = 0 \rightarrow 5t(20 - t) = 0$$





$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow \text{زمان شروع پرتاب} \\ t = 20 \rightarrow \text{زمان بازگشت به زمین} \end{cases} \quad \boxed{t = 20} \text{ ثانیه}$$

۲۶

دو ریشه‌ی حقیقی متمایز $\Delta > 0 \rightarrow$

$$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow c > 0$$

$$y \text{ محور} \rightarrow \frac{-b}{2a} = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow x' = -x''$$

۲۷

ریشه‌ی حقیقی ندارد $\Delta < 0 \rightarrow$

$$\frac{-b}{2a} > 0 \rightarrow b > 0$$

$$b^2 - 4ac < 0 \rightarrow ac > 0 \rightarrow c < 0$$

۲۸

دو ریشه‌ی مساوی $\Delta = 0 \rightarrow$

$$\frac{c}{a} = 0 \rightarrow c = 0 \quad x' = x'' = 0$$

$$-\frac{b}{a} = 0 \rightarrow b = 0$$

۲۹

دو ریشه‌ی حقیقی متمایز $\Delta > 0 \rightarrow$

$$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow c < 0$$

$$y \text{ محور} \rightarrow \frac{-b}{2a} = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow x' = -x''$$

۳۰

$$y = -\frac{1}{9}x^2 + 6x, a = -\frac{1}{9} < 0 \rightarrow \text{تابع نقطه‌ی max دارد}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-\frac{1}{9})} = \frac{6}{\frac{2}{9}} \rightarrow \boxed{x = 27}$$

$$y = -\frac{1}{9}(27)^2 + 6(27) = -3 \times 27 + 6 \times 27 \rightarrow \boxed{y_{\max} = 81}$$

$$y \text{ روش دوم} = -\frac{1}{9}x^2 + 6x$$

$$y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(6^2 - 4(-\frac{1}{9})(0))}{4(-\frac{1}{9})} = \frac{-36}{-\frac{4}{9}} \rightarrow \boxed{y_{\max} = 81}$$



۳۱

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(5)(-5) = 49 + 100 \rightarrow \Delta = 149 > 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{5} = \frac{7}{5} > 0$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-5}{5} = -1 < 0$$

معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز غیر هم‌علامت است که قدر مطلق ریشه‌ی مثبت بزرگتر از قدر مطلق ریشه‌ی منفی است.

۳۲

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} \rightarrow S = \alpha + \beta = 6, \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} \rightarrow P = \alpha\beta = 4$$

$$\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = P(S^2 - 2P) = 4(6^2 - 2(4)) = 4 \times 28 = 112$$

۳۳

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \rightarrow \frac{1}{6} = -\frac{k+1}{6} \rightarrow 1 = -k-1 \rightarrow \boxed{k = -2}$$

$$\rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(6)(-2) = 1 + 48 = 49$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2(6)} \rightarrow x = \frac{1 \pm 7}{12} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

۳۴

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \rightarrow \alpha\beta = 1 \rightarrow \frac{2m+6}{2} = 1 \rightarrow 2m+6 = 2 \rightarrow 2m = -4 \rightarrow \boxed{m = -2}$$

$$\rightarrow 2x^2 - 6x + 2 = 0 \rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-6}{2} \rightarrow \boxed{S = 3}$$

۳۵

$$\beta = \alpha + 2 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \\ \alpha + \beta = \alpha + \alpha + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha + \beta = 2\alpha + 2 \end{cases} \rightarrow 2\alpha + 2 = 5 \rightarrow \alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{7}{2}$$

$$\rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{m}{3} \rightarrow \frac{21}{4} = \frac{m}{3} \rightarrow \boxed{m = \frac{63}{4}}$$

۳۶

$$\alpha = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}, \beta = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{S = 2}$$

$$P = \alpha\beta = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4 - 3}{4} \rightarrow \boxed{P = \frac{1}{4}}$$

$$x^2 - sx + p = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0} \quad \text{یا} \quad \boxed{4x^2 - 8x + 1 = 0}$$



۳۷

$$\alpha = 2 + \sqrt{3}, \beta = 2 - \sqrt{3} \rightarrow S = \alpha + \beta = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} \rightarrow \boxed{S = 4}$$

$$P = \alpha\beta = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 \rightarrow \boxed{P = 1}$$

$$\rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - 4x + 1 = 0}$$

۳۸ الف -

$$\text{ریشه ها معکوس} \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow c = a \rightarrow -\Delta = 2(m - 2)$$

$$\rightarrow -\Delta = 2m - 4 \rightarrow -1 = 2m \rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{2}}$$

ب -

$$S = 2 \rightarrow -\frac{b}{a} = 2 \rightarrow \frac{-3}{2(m - 2)} = 2$$

$$\rightarrow -3 = 4(m - 2) \rightarrow -3 = 4m - 8 \rightarrow \Delta = 4m \rightarrow \boxed{m = \frac{\Delta}{4}}$$

۳۹

$$\alpha, \beta = \text{طول و عرض اتاق} \rightarrow \begin{cases} \alpha\beta = 24 \\ 2(\alpha + \beta) = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha\beta = 24 \\ \alpha + \beta = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P = 24 \\ S = 10 \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0 \rightarrow (x - 4)(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 6 \end{cases}$$

← طول اتاق ۶ متر و عرض اتاق ۴ متر

۴۰

$$\rightarrow x + \frac{1}{x} = u \rightarrow u^2 - 2u = 0 \rightarrow u(u - 2) = 0 \rightarrow u = 0, u = 2$$

معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد

$$u = 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 0^2 - 4(1)(1) = -4 < 0 \rightarrow$$

$$u = 2 \rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 1}$$

۴۱

$$\rightarrow u^2 - 3u + 2 = 0 \rightarrow (u - 2)(u - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} u - 2 = 0 \rightarrow u = 2 \\ u - 1 = 0 \rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$u = 2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{2}}, \boxed{x = -\sqrt{2}}$$

$$u = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = 1}, \boxed{x = -1}$$

$$2x^2 + 1 = k \rightarrow k^2 - 12k + 27 = 0 \rightarrow (k - 9)(k - 3) = 0 \rightarrow k = 9, k = 3$$

$$k = 9 \rightarrow 2x^2 + 1 = 9 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

۴۲



$$k = 3 \rightarrow 2x^2 + 1 = 3 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

۴۳

$$x^2 + x = u \rightarrow u^2 - 18u + 72 = 0 \rightarrow (u - 12)(u - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} u - 12 = 0 \rightarrow u = 12 \\ u - 6 = 0 \rightarrow u = 6 \end{cases}$$

$$u = 12 \rightarrow x^2 + x = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3} \\ x + 4 = 0 \rightarrow \boxed{x = -4} \end{cases}$$

$$u = 6 \rightarrow x^2 + x = 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = -3} \\ x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \end{cases}$$

۴۴

الف

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 0 \\ y_{\min} = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 0 \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{c = 0} \\ 4a + 2b = 0 \\ \frac{-b^2 + 4a(0)}{4a} = -4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -b^2 = -16a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 = 16a \rightarrow (-2a)^2 = 16a \rightarrow 4a^2 = 16a \end{cases}$$

$$\rightarrow 4a^2 - 16a = 0 \rightarrow 4a(a - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \boxed{a = 4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{غ} \\ \boxed{b = -8} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = 4x^2 - 8x}$$

ب

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(2) = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 4 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 0 \\ -b = 6a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{c = 4} \\ 4a + 2b + 4 = 0 \\ b = -6a \end{cases}$$

$$\rightarrow 4a + 2(-6a) + 4 = 0 \rightarrow 4a - 12a + 4 = 0 \rightarrow -8a + 4 = 0 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$, \boxed{b = -3} \rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4}$$

پ

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ f(0) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) = a(x - 2)^2 \\ 4 = a(0 - 2)^2 \rightarrow 4 = 4a \rightarrow \boxed{a = 1} \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = 1(x - 2)^2 \rightarrow \boxed{f(x) = x^2 - 4x + 4}$$

ت



$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(-1) = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 3 \\ a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + 3 = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = -3x^2 + 3$$

ث

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 1 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(1)^2 + b(1) + c = 0 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 1 \\ -b = 4a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ b = -4a \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a - 4a + c = 0 \\ 4a + 2(-4a) + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a + c = 0 \\ -4a + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a + c = 0 \\ 4a - c = -1 \end{cases} +$$

$$\begin{matrix} a = -1 \\ c = -3 \end{matrix} \rightarrow b = 4$$

$$\rightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

ج

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = -1 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = -2 \\ a(1)^2 + b(1) + c = -1 \\ -b = 2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ a + b - 2 = -1 \\ b = -2a \end{cases}$$

$$\rightarrow a + (-2a) = 1 \rightarrow -a = 1 \rightarrow a = -1, b = 2$$

$$\rightarrow f(x) = -x^2 + 2x - 2$$

۴۵

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(-1) = 0 \\ f(0) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -4 \\ a - b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -4 \\ a - b = -4 \end{cases} +$$

$$3a = -6 \rightarrow a = -2, b = 2$$

$$\rightarrow y = f(x) = -2x^2 + 2x + 4$$

۴۶

$$\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ a + b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a - 2b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a - b = 1 \end{cases} +$$

$$3a = 3 \rightarrow a = 1, b = 1$$

$$\rightarrow F(x) = x^2 + x - 2$$



۴۷

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 4x - 6 = 0 &\begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} S &= \alpha + \beta = -\frac{-4}{2} \rightarrow S = 2 \\ P &= \alpha\beta = \frac{-6}{2} \rightarrow P = -3 \end{aligned} \\
 \text{معادله جدید } X &= \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \rightarrow S' = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} = \frac{2^2 - 2(-3)}{(-3)^2} \rightarrow \boxed{S' = \frac{10}{9}} \\
 P' &= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{P^2} = \frac{1}{(-3)^2} \rightarrow \boxed{P' = \frac{1}{9}} \\
 \rightarrow x^2 - S'x + P &= 0 \rightarrow x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{1}{9} = 0 \rightarrow \boxed{9x^2 - 10x + 1 = 0}
 \end{aligned}$$

۴۸

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \rightarrow S = \alpha + \beta = 5 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow P = \alpha\beta = 2 \end{cases} \\
 \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2PS}{P} = \frac{5^2 - 2(2)(5)}{2} = \frac{125 - 20}{2} = \frac{95}{2} \rightarrow \boxed{\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = 47.5}
 \end{aligned}$$

۴۹

$$\begin{aligned}
 mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0 &\rightarrow \text{ریشه‌ها معکوس} \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow \frac{m^2 - 2}{m} = 1 \rightarrow m^2 - 2 = m \\
 \rightarrow m^2 - m - 2 = 0 &\rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \begin{cases} m - 2 = 0 \rightarrow m = 2 \\ m + 1 = 0 \rightarrow m = -1 \end{cases} \\
 m = 2 \rightarrow 2x^2 + 3x + 2 &= 0 \rightarrow \Delta = 3^2 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7 < 0 \rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \\
 m = -1 \rightarrow -x^2 + 3x - 1 &= 0 \rightarrow \Delta = 3^2 - 4(-1)(-1) = 9 - 4 = 5 > 0 \rightarrow \boxed{m = -1} \text{ ریشه‌ی حقیقی دارد}
 \end{aligned}$$

۵۰

الف

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{2t-1} - t = 1 &\rightarrow 2\sqrt{2t-1} = t + 1 \\
 \rightarrow (2\sqrt{2t-1})^2 &= (t + 1)^2 \rightarrow 4(2t - 1) = (t + 1)^2 \\
 \rightarrow 8t - 4 = t^2 + 2t + 1 &\rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \rightarrow (t - 1)(t - 5) = 0 \\
 \rightarrow t - 1 = 0 &\rightarrow \boxed{t = 1}, \quad t - 5 = 0 \rightarrow \boxed{t = 5}
 \end{aligned}$$

ب

$$\begin{aligned}
 2x = 1 - \sqrt{2-x} &\rightarrow \sqrt{2-x} = 1 - 2x \\
 \rightarrow 2 - x = (1 - 2x)^2 &\rightarrow 2 - x = 1 - 4x + 4x^2 \rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \\
 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(4)(-1) &= 9 + 16 = 25 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{8} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ غ ق ق}
 \end{aligned}$$

پ



$$\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1 \rightarrow (\sqrt{x+7})^2 = (\sqrt{x} + 1)^2 \rightarrow x+7 = x+2\sqrt{x}+1$$

$$\rightarrow 6 = 2\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x} = 3 \rightarrow x = 9$$

ت

$$\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{u-3}} = \frac{2}{\sqrt{u}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{u-3}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{u}}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{u-3} = \frac{4}{u} \rightarrow u = 4(u-3) \rightarrow u = 4u - 12$$

$$\rightarrow 12 = 3u \rightarrow u = 4$$

ث

$$\rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 2})^2 = (x - 2)^2$$

$$\rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \begin{cases} x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$\rightarrow (\sqrt{(x-2)^2 + 9})^2 = (5)^2 \rightarrow (x-2)^2 + 9 = 25 \rightarrow (x-2)^2 = 25 - 9$$

$$\rightarrow (x-2)^2 = 16 \begin{cases} x-2=4 \rightarrow \boxed{x=6} \\ x-2=-4 \rightarrow \boxed{x=-2} \end{cases}$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{1+x})^2 = (\sqrt{x+9})^2 \rightarrow 4 + 4\sqrt{1+x} + 1 + x = x + 9$$

$$\rightarrow 4\sqrt{1+x} = 4 \rightarrow \sqrt{1+x} = 1 \rightarrow 1+x = 1 \rightarrow \boxed{x=0}$$

$$x - \sqrt{x} = 20 \rightarrow x - 20 = \sqrt{x}$$

$$\rightarrow (x-20)^2 = (\sqrt{x})^2 \rightarrow x^2 - 40x + 400 = x \rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$$

$$\rightarrow (x-25)(x-16) = 0 \begin{cases} x-25=0 \rightarrow x=25 \\ x-16=0 \rightarrow x=16 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$\rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 2})^2 = (x - 2)^2$$

$$\rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

۵۱

۵۲

۵۳

۵۴



$$\rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

غیر قابل قبول $x = -1$

۵۵

$$\rightarrow \frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)} \rightarrow x(x-1)(x+1) \rightarrow x \neq 0$$

$$\rightarrow x \neq 1$$

$$\rightarrow x \neq -1$$

$$\rightarrow x(x-1)(x+1) \times \left[\frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)} \right]$$

$$\rightarrow 2x(x) + 2x(x-1) = (2-x)(x+1)$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2x^2 - 2x = 2x + 2 - x^2 - x \rightarrow 4x^2 - 2x = -x^2 + x + 2$$

$$\rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(5)(-2) = 9 + 40 = 49$$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2(5)} \rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{10} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

غیر قابل قبول $x = 1$

۵۶

$$x = \text{زمان ویرایش رضا}, \quad 1 \frac{20}{60} = 1 \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow \text{سرعت ویرایش دو نفر} = \text{سرعت ویرایش رضا} + \text{سرعت ویرایش علی}$$

$$\frac{16}{2} + \frac{16}{x} = \frac{16}{\frac{4}{3}} \rightarrow 8 + \frac{16}{x} = 12 \rightarrow \frac{16}{x} = 4 \rightarrow x=4$$

ساعت $x=4$

۵۷

$$\text{الف) } \sqrt{x} - x = \frac{x}{2} \rightarrow \sqrt{x} = x + \frac{x}{2} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{3x}{2} \rightarrow x = \frac{9x^2}{4}$$

$$\rightarrow 4x = 9x^2 \rightarrow 9x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(9x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{4}{9} \end{cases}$$

غیر قابل قبول $x=0$

$$\text{ب) } x - \sqrt{x} = \frac{x}{2} \rightarrow x - \frac{x}{2} = \sqrt{x} \rightarrow \frac{x}{2} = \sqrt{x} \rightarrow \frac{x^2}{4} = x$$

$$\rightarrow x^2 = 4x \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

۵۸

$$t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \xrightarrow{t=2} 2 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 4 = 10 - \frac{h}{5}$$

$$\rightarrow \frac{h}{5} = 10 - 4 \rightarrow h = 30m$$



الف

$$\frac{3}{x^2} - 12 = 0 \rightarrow \frac{3}{x^2} - \frac{12}{1} = 0$$

$$\text{کمم مخرجها} = x^2 \rightarrow x \neq 0 \rightarrow x^2 \times \left[\frac{3}{x^2} - \frac{12}{1} = 0 \right] \rightarrow 3 - 12x^2 = 0$$

$$1 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 3(1 - 4x^2) = 0 \rightarrow 3(1 - 2x)(1 + 2x) = 0$$

$$1 + 2x = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ب

$$\rightarrow \frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k(k+2)} \rightarrow \text{کمم مخرجها} = k(k+2) \begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow k(k+2) \times \left[\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k(k+2)} \right]$$

$$\rightarrow 2(k+2) - 3k^2 = k \rightarrow 2k + 4 - 3k^2 = k \rightarrow 3k^2 - k - 4 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(3)(-4) = 1 + 48 = 49$$

$$\rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2(3)} = \frac{1 \pm 7}{6} \begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ k = -1 \end{cases}$$

پ

$$\rightarrow \frac{3}{x} - \frac{2}{(x-3)} = \frac{-12}{(x-3)(x+3)} \rightarrow \text{کمم مخرجها} = x(x-3)(x+3) \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow x(x-3)(x+3) \times \left[\frac{3}{x} - \frac{2}{(x-3)} = \frac{-12}{(x-3)(x+3)} \right]$$

$$\rightarrow 3(x-3)(x+3) - 2x(x+3) = -12x$$

$$\rightarrow 3x^2 - 27 - 2x^2 - 6x = -12x \rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)(x+9) = 0 \begin{cases} x-3=0 \rightarrow x=3 \text{ غیر قابل قبول} \\ x+9=0 \rightarrow x=-9 \text{ قابل قبول} \end{cases}$$



الف

$$\rightarrow \text{کمم مخرجها} = x(x-2) \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow x(x-2) \times \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{5}{1} \right] \rightarrow (x-2) + x = 5x(x-2)$$

$$\rightarrow 2x - 2 = 5x^2 - 10x \rightarrow 5x^2 - 12x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4(5)(2) = 144 - 40 = 104$$

$$\rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{104}}{2(5)} = \frac{12 \pm 2\sqrt{26}}{10} \begin{cases} x = \frac{6 + \sqrt{26}}{5} \\ x = \frac{6 - \sqrt{26}}{5} \end{cases}$$

ب

$$\frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5 \rightarrow \text{کمم مخرجها} = 6r \rightarrow r \neq 0$$

$$6r \times \left[\frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5 \right] \rightarrow 60 - 45r = 40 - 30r \rightarrow 60 - 40 = 45r - 30r$$

$$\rightarrow 20 = 15r \rightarrow r = \frac{4}{3}$$

پ

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3} \rightarrow \text{کمم مخرجها} = (x-3)(x+4) \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$\rightarrow (x-3)(x+4) \times \left[\frac{2x}{(x-3)} + \frac{(x+1)}{(x+4)} = \frac{(x-1)}{(x-3)} \right]$$

$$\rightarrow 2x(x+4) + (x-3)(x+1) = (x+4)(x-1)$$

$$\rightarrow 2x^2 + 8x + x^2 - 2x - 3 = x^2 + 3x - 4$$

$$\rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 3^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1$$

$$\rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2(2)} \rightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{4} \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

ت

$$\sqrt{t+4} = 3 \rightarrow (\sqrt{t+4})^2 = (3)^2$$



$$\rightarrow t + 4 = 9 \rightarrow \boxed{t = 5}$$

ث

$$k = \sqrt{6k - 8} \rightarrow (k)^2 = (\sqrt{6k - 8})^2$$

$$\rightarrow k^2 = 6k - 8 \rightarrow k^2 - 6k + 8 = 0 \rightarrow (k - 2)(k - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} k - 2 = 0 \rightarrow \boxed{k = 2} \\ k - 4 = 0 \rightarrow \boxed{k = 4} \end{cases}$$

ج

$$x + \sqrt{x} = 6 \rightarrow \sqrt{x} = 6 - x$$

$$\rightarrow (\sqrt{x})^2 = (6 - x)^2 \rightarrow x = 36 - 12x + x^2 \rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$\rightarrow (x - 4)(x - 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \rightarrow \boxed{x = 4} \\ x - 9 = 0 \rightarrow x = 9 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

ج

$$\rightarrow \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{2x-5} \rightarrow (\sqrt{x+1} - 1)^2 = (\sqrt{2x-5})^2$$

$$\rightarrow x + 1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = 2x - 5 \rightarrow x + 2 - 2\sqrt{x+1} = 2x - 5 \rightarrow 2\sqrt{x+1} = -x + 7$$

$$\rightarrow -x + 7 = 2\sqrt{x+1} \rightarrow (-x + 7)^2 = (2\sqrt{x+1})^2$$

$$\rightarrow x^2 - 14x + 49 = 4(x + 1) \rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$\rightarrow (x - 3)(x - 15) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3} \\ x - 15 = 0 \rightarrow x = 15 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

ح

$$\rightarrow (\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}})^2 = 2^2 \rightarrow m + 2\sqrt{m}(\frac{1}{\sqrt{m}}) + \frac{1}{m} = 4$$

$$\rightarrow m + 2 + \frac{1}{m} = 4 \rightarrow m - 2 + \frac{1}{m} = 0 \rightarrow \frac{m^2 - 2m + 1}{m} = 0$$

$$\rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow (m - 1)^2 = 0 \rightarrow m - 1 = 0 \rightarrow \boxed{m = 1}$$



فصل اول : جبر و معادله

۱) عبارت $y = |x - 1| + |x - 2|$ را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید.

۲) به کمک تعیین علامت عبارت های داخل قدر مطلق، ضابطه ی توابع زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x) = x|x|$

ب) $f(x) = |x + 1| - 2$

ج) $y = |x - 1| + |x + 2|$

۳) اگر $x \leq 1$ باشد، ضابطه ی تابع $y = |x - 3| + |x - 1|$ را بدون قدر مطلق بنویسید.

۴) به کمک تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق، ضابطه ی $f(x) = x|x - 2|$ را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید.

۵ با استفاده از تعیین علامت، ضابطه هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

الف) $f(x) = x|x|$

ب) $g(x) = |x^2 - 1|$

پ) $h(x) = |x - 1| + |x + 1|$

۶ ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 3|$ را در بازه ی $[2, 4]$ رسم کنید سپس به کمک آن، نمودار تابع $f(-x)$ را رسم کنید.

۷ تابع $y = |1 - x| - 3$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد آن را معلوم کنید.

۸ تابع $y = |1 - x| - 3$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید، به کمک نمودار برد آن را معلوم کنید.

۹ ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 1|$ را با دامنه ی $[0, 2]$ رسم کنید. سپس نمودار $y = f(x) + 1$ را رسم کرده و برد آن را به دست آورید.

۱۰ تابع $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد تابع را معلوم کنید.

۱۱

ابتدا ضابطه‌ی تابع $y = |x - 1| + |2 - x|$ را بدون قدر مطلق بنویسید، سپس نمودار آن را رسم کنید.

۱۲

نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$y = ||x| - 2|$$

۱۳

نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$|2x + 5| < 3$$

۱۴

جاهای خالی را با عدد یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید.

الف) جواب‌های معادله‌ی $|x + 1| = 4$ برابر با و است.

ب) مجموعه جواب نامعادله‌ی $|2x - 1| \leq 7$ بازه‌ی است.

۱۵

بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه به طول‌های ۱- و ۳ روی محور x ها برابر ۶

باشد؟

قدر مطلق و ویژگی‌های آن

۱۶) هریک از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد قدرمطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است.

ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است.

پ) فاصله بین x و ۳- بزرگتر از ۲ است.

۱۷) دو معادله زیر را حل کنید.

الف) $\frac{2-x}{|x-3|} = 1$

ب) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$

۱۸) نمودار هریک از دو تابع زیر را رسم کنید. سپس به ازای $y = 3$ معادله‌های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$

ب) $y = x^2 - 6x$

۱۹) نمودار تابع $f(x) = ||x| - 2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

۲۰) نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم کنید. سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2 - 2x| = 2$ را حل نمایید.

پاسخنامه تشریحی

۱

$$\begin{cases} x < 1 \Rightarrow y = -x + 1 - x + 2 = -2x + 3 \\ 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow y = x - 1 - x + 2 = 1 \\ x > 2 \Rightarrow y = x - 1 + x - 2 = 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} -2x + 3 & x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x - 3 & x > 2 \end{cases}$$

۲

الف) $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

ب) $f(x) = \begin{cases} x + 1 - 2 = x - 1 & x \geq -1 \\ -x - 1 - 2 = -x - 3 & x < -1 \end{cases}$

x	-2	1
x - 1	-	-
x + 2	-	+

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -2 \leq x \leq 1 \\ x > 1 \end{cases} \begin{aligned} &: y = -(x - 1 + x + 2) = -2x - 1 \\ &: y = -x + 1 + x + 2 = 3 \\ &: y = x - 1 + x + 2 = 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} -2x - 1 & x < -2 \\ 3 & -2 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1 & x > 1 \end{cases}$$

ج)

$$x \leq 1 \rightarrow x - 1 \leq 0 \rightarrow |x - 1| = -x + 1$$

$$x \leq 1 \rightarrow x - 3 \leq -2 \rightarrow |x - 3| = -x + 3$$

$$y = |x - 3| + |x - 1| = -x + 3 - x + 1 = -2x + 4$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\begin{aligned} x < 2 \Rightarrow f(x) &= x(2 - x) = -x^2 + 2x \\ x \geq 2 \Rightarrow f(x) &= x(x - 2) = x^2 - 2x \end{aligned} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x < 2 \\ x^2 - 2x & x \geq 2 \end{cases}$$

الف) $f(x) = x|x| = \begin{cases} x(-x) & x < 0 \\ x \cdot x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

ب) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < -1 \\ -x^2 + 1 & -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

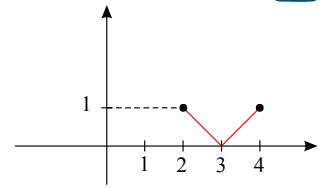
۵

قدر مطلق و ویژگی های آن

پ)
$$h(x) = \begin{cases} -(x-1) - (x+1) & x < -1 \\ -(x-1) + x+1 & -1 \leq x < 1 \\ x-1 + x+1 & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

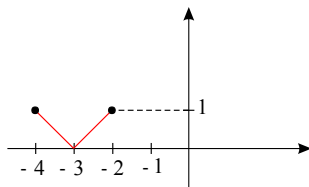
۶ نمودار $f(-x)$ با قرینه کردن نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور y بدست می آید.

$$f(x) = |x-3| \rightarrow \begin{cases} f(2) = 1 \\ f(4) = 1 \end{cases}$$



$$f(x) = |x-3|$$

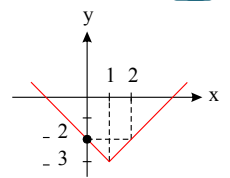
حال نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم.



$$y = |1-x| - 3 = \begin{cases} 1-x-3 & x < 1 \\ -1+x-3 & x \geq 1 \end{cases}$$

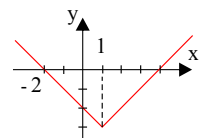
$$\rightarrow y = \begin{cases} -x-2 & x < 1 \\ x-4 & x \geq 1 \end{cases}$$

بردار تابع $[-3, +\infty)$

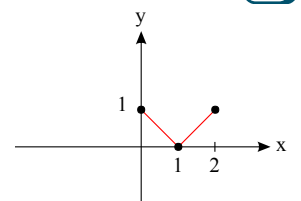


$$y = \begin{cases} x-4 & x \geq 1 \\ -x-2 & x < 1 \end{cases}$$

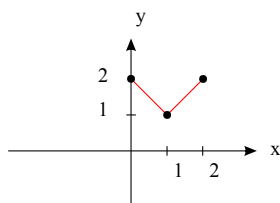
بردار تابع: $[-3, +\infty)$



$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} -x+1 & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



برای رسم نمودار $y = f(x) + 1$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد در راستای مثبت محور y ها منتقل کنیم.



$$R_f = [1, 2]$$

۱۰

$$f(x) = |x+1| + |x-1| \quad \begin{array}{l} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-1=0 \Rightarrow x=+1 \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x-1-x+1 & x < -1 \\ x+1-x+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1+x-1 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

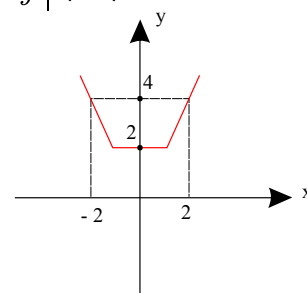
$$R_f = [2, +\infty)$$

x	-1	$+1$
$x+1$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$

x	-1	-2
y	2	4

x	-1	1
y	2	2

x	1	2
y	2	4



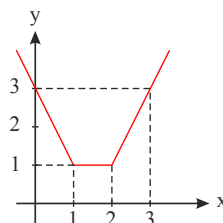
۱۱

$$x < 1 \rightarrow y = -x + 1 + 2 - x = -2x + 3$$

$$1 \leq x < 2 \rightarrow y = x - 1 + 2 - x = 1$$

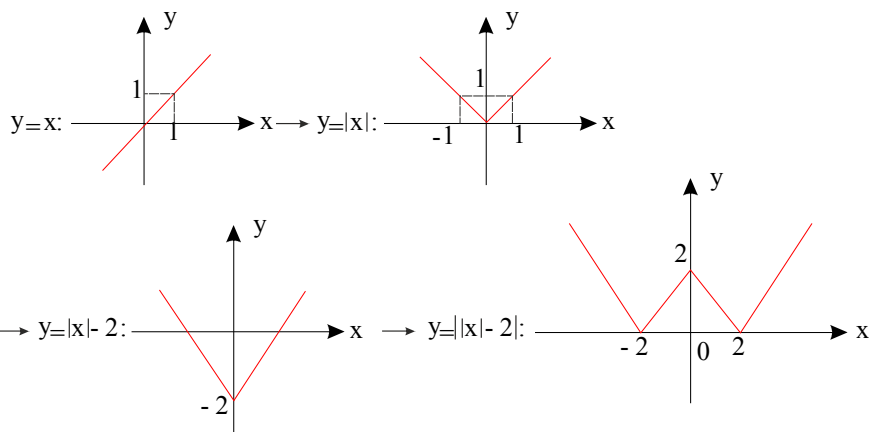
$$x \geq 2 \rightarrow y = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$$

$$y = \begin{cases} -2x + 3 & x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2x - 3 & x \geq 2 \end{cases}$$



۱۲

برای رسم تابع $y = ||x| - 2|$ ابتدا تابع $y = |x|$ را رسم می‌کنیم و سپس آن قسمتی که پائین محور x هاست را به بالا قرینه می‌کنیم تا به $|x|$ برسیم و سپس آنرا ۲ واحد به پائین انتقال می‌دهیم تا به $|x| - 2$ برسیم و سپس آن قسمتی که پائین محور x ها قرار دارد را به بالا انتقال می‌دهیم تا به $||x| - 2|$ برسیم.



۱۳

$$|2x + 5| < 3 \Rightarrow -3 < 2x + 5 < 3 \Rightarrow -8 < 2x < -2 \Rightarrow -4 < x < -1$$

۱۴

الف) $|x + 1| = 4 \rightarrow x + 1 = \pm 4 \rightarrow x = -5, 3$

ب) $|2x - 1| \leq 7 \rightarrow -7 \leq 2x - 1 \leq 7 \rightarrow -6 \leq 2x \leq 8 \Rightarrow -3 \leq x \leq 4$

۱۵) اگر نقطه‌های مورد نظر را x در نظر بگیریم، داریم:

$$|x - (-1)| + |x - 3| = 6 \Rightarrow |x + 1| + |x - 3| = 6$$

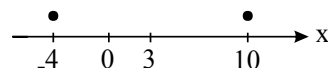
$x < -1 \Rightarrow -x - 1 - x + 3 = 6 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = -2}$ قابل قبول

$-1 \leq x < 3 \Rightarrow x + 1 - x + 3 = 6 \Rightarrow 4 = 6$ غلط

$x \geq 3 \Rightarrow x + 1 + x - 3 = 6 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 4}$ قابل قبول

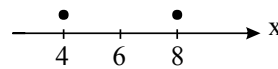
۱۶) الف) فاصله بین x و ۳ برابر با $|x - 3|$ می‌باشد پس:

$$|x - 3| = 7 \Rightarrow x - 3 = \pm 7 \Rightarrow x = 10, x = -4$$



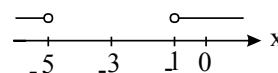
ب)

$$2|x - 6| = 4 \Rightarrow |x - 6| = 2 \Rightarrow x - 6 = \pm 2 \Rightarrow x = 8, x = 4$$



پ)

$$-3) |x + 3| > 2 \Rightarrow |x + 3| > 2 \Rightarrow x + 3 < -2 \text{ یا } x + 3 > 2 \Rightarrow x < -5 \text{ یا } x > -1$$



۱۷

الف) $\frac{2-x}{|x-3|} = 1$

$$x < 3 \Rightarrow \frac{2-x}{-(x-3)} = 1 \Rightarrow 2-x = -x+3 \Rightarrow 2=3 \text{ غلط} \Rightarrow \text{جواب ندارد.}$$

$$x > 3 \Rightarrow \frac{2-x}{x-3} = 1 \Rightarrow x-3 = 2-x \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ غیر قابل قبول}$$

چون $x = \frac{5}{2}$ در شرط $x > 3$ صدق نمی کند پس غیر قابل قبول است.

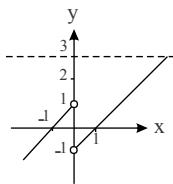
$$\text{ب) } \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 2x + 1 \Rightarrow |x-1| = 2x + 1$$

$$x < 1 \Rightarrow -(x-1) = 2x+1 \Rightarrow 2x+1 = -x+1 \Rightarrow x = 0 \text{ قابل قبول}$$

$$x \geq 1 \Rightarrow x-1 = 2x+1 \Rightarrow x = -2 \text{ غیر قابل قبول}$$

۱۸

$$\text{الف) } y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x - \frac{x}{-x} & x < 0 \\ x - \frac{x}{x} & x > 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$$



خط $y = 3$ نمودار تابع را در یک نقطه قطع می کند، پس معادله $y = 3$ یک ریشه مثبت دارد.

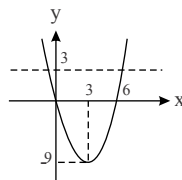
$$x - \frac{x}{|x|} = 3 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \Rightarrow x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 \\ x > 0 \Rightarrow x-1 = 3 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$\text{ب) } y = x^2 - 6x \rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$$

معادله $y = 3$ دارای یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت است.

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

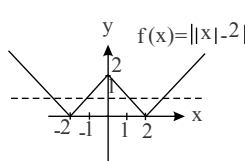
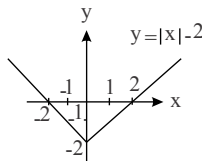
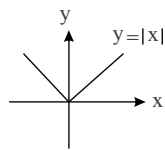
$$\text{رأس } y = 9 - 18 = -9$$



$$y = 3 \rightarrow x^2 - 6x = 3 \Rightarrow x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$\Delta = 36 + 12 = 48 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2}$$

۱۹



خط $y = 1$ نمودار تابع f را در ۴ نقطه قطع می کند پس معادله $f(x) = 1$ دارای ۴ ریشه است، دو ریشه مثبت و دو ریشه منفی.

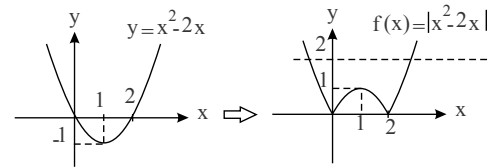
$$f(x) = 1 \Rightarrow ||x| - 2| = 1 \Rightarrow |x| - 2 = \pm 1 \Rightarrow |x| = 3, |x| = 1$$

$$|x| = 3 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}, \quad |x| = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$\text{رأس } y = 1 - 2 = -1$$



چون خط $y = 2$ نمودار تابع f را در ۲ نقطه قطع می‌کند. معادله $|x^2 - 2x| = 2$ دارای ۲ ریشه است، یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت دارد.

$$|x^2 - 2x| = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = \pm 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 + 8 = 12 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x^2 - 2x = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.}$$