



نویدپورزکی

فصل اول : هندسه تحلیلی و جبر

درس اول : هندسه تحلیلی

۱) اگر $A(7, -2)$ و $B(12, 10)$ باشد.

الف- مختصات نقطه ی وسط AB را بدست آورید.

ب - طول پاره خط AB را محاسبه کنید.

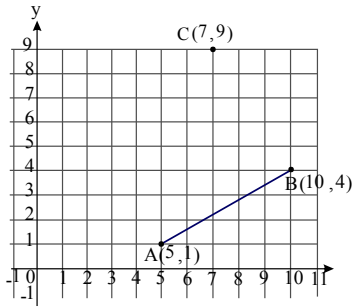
۲) فاصله ی دو خط $3x + 4y + 18 = 0$ و $6x + 8y = 4$ را بدست آورید.

۳) دایره ای به مرکز $O(3, -1)$ از نقطه ی $A(8, 6)$ گذشته است. مساحت دایره چقدر است؟

۴) قرینه ی نقطه ی $C(3, -1)$ نسبت به نقطه ی $M(5, 2)$ را بدست آورید.



۵) مربع $ABCD$ در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است، به طوری که $A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ دو رأس مجاور آن هستند.



الف - شیب ضلع AB را بنویسید.

ب - شیب ضلع AD را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را بنویسید.

پ - اگر بدانیم نقطهٔ $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

ت) مربع را به طور کامل رسم کنید.

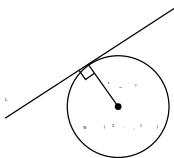
۶) اگر $A(3, 7)$ و $B(5, -1)$ باشد، معادلهٔ عمودمنصف پاره خط AB را بدست آورید.

۷) اگر $A(3, 5)$ و $B(-2, 1)$ و $C(1, -1)$ رأس‌های مثلث ABC باشند. معادلهٔ میانهٔ BM را بنویسید.

۸) فاصلهٔ بین دو خط موازی $3x - 4y + 10 = 0$ و $(2m + 1)x - 3my - 15 = 0$ چقدر است؟

۹) یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = -2x - 1$ واقع است. اگر $A(4, 1)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را بدست آورید.

۱۰) خط $L: 3x - 4y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.





۱۱) نقاط $A(2, 3)$ ، $B(-2, -1)$ و $C(-4, -3)$ سه رأس از یک مستطیل هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید.

۱۲) فاصله نقطه $A(4, 7)$ را از خط به معادله $2x - y = -4$ بدست آورید.

۱۳) دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(4, 7)$ و $B(-2, 3)$ هستند.

الف- اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب- آیا نقطه $C(-1, 8)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۱۴) خط L به معادله $2y - 3x = 1$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادله $y = mx + 5$ را در نظر بگیرید.

الف - m ، را طوی بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

ب - به ازای چه مقداری از m ، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

۱۵) نشان دهید مثلث با رأس‌های $A(1, 2)$ و $B(2, 5)$ و $C(4, 1)$ یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است.

۱۶) نشان دهید مثلث با رئوس $A(-2, 1)$ و $B(2, 3)$ و $C(4, -1)$ یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است.

۱۷) وضعیت هر جفت از خط‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$$\ell: 3x - y = 7 \quad d: y = 3x - 1 \quad \Delta: x + 3y = 4$$

۱۸) نقاط $A(4, 0)$ ، $B(0, 3)$ و $C(1, 1)$ رأس‌های یک مثلث هستند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB چقدر است؟



۱۹ دو نقطه $A(14, 3)$ و $B(10, -13)$ را در نظر بگیرید.

الف - فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB بدست آورید.

ب - معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

۲۰ فاصله ی دو خط به معادلات $12x - 5y + 20 = 0$ و $10y - 24x + 12 = 0$ را بدست آورید.

درس دوم : معادله ی درجه ی دوم و تابع درجه ی دوم

۲۱ $\max$ یا $\min$ تابع $g(x) = -(x+1)^2 + 3$ را بدست آورید.

۲۲ کمترین یا بیشترین مقدار تابع $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 20x$ را بدست آورید.

۲۳ استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد

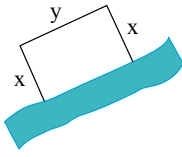
مستطیل را طوری بیابید که:

الف - مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب - مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.



۲۴) قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.



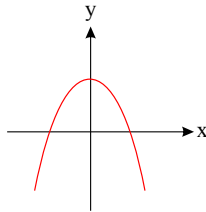
۲۵) راکتی که به طور عمودی روبه بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله آن به صورت مقابل است.

$$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$$

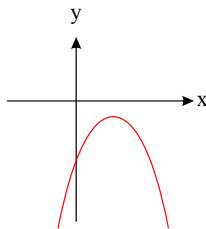
الف) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی‌گردد؟



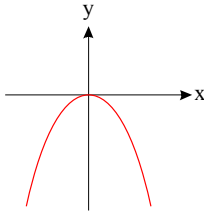
۲۶) در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید.



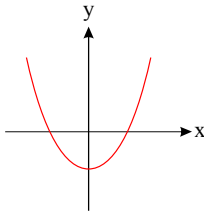
۲۷) در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید.



۲۸ در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید.



۲۹ در شکل زیر روی علامت a ، b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید.



۳۰ بیشترین مقدار تفاضل $\frac{1}{9}$ مربع عددی، از ۶ برابر آن عدد، چقدر است؟

۳۱ بدون حل معادله در وجود و علامت ریشه‌های معادله $5x^2 - 7x - 5 = 0$ بحث کنید.

۳۲ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3\beta + \alpha\beta^3$ را بدست آورید.

۳۳ در معادله‌ی درجه دوم $6x^2 + (k+1)x + k = 0$ اگر مجموع دو ریشه‌ی حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشه‌های این معادله را بیابید.

۳۴ اگر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ معکوس یکدیگر باشند، مجموع این دو ریشه را بیابید.



۳۵) اگر در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ ، یکی از ریشه‌ها ۲ واحد بزرگتر از ریشه‌ی دیگر باشد، مقدار m چقدر است؟

۳۶) معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش به صورت $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ و $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ باشند.

۳۷) معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ باشند.

۳۸) در معادله‌ی درجه دوم $(m - 2)x^2 + 3x - 5 = 0$ مقدار m را چنان بیابید که:

الف- ریشه‌های معادله معکوس هم باشند.

ب- مجموع ریشه‌ها برابر با ۲ باشد.

۳۹) مساحت یک اتاق ۲۴ متر مربع و محیط اتاق ۲۰ متر است. ابعاد اتاق را بدست آورید.

۴۰) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

۴۱) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = u$$



۴۲) معادله‌ی زیر را حل کنید.

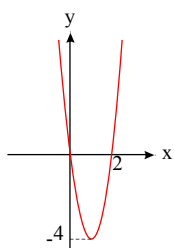
$$(2x^2 + 1)^2 - 12(2x^2 + 1) + 27 = 0$$

۴۳) ریشه‌های حقیقی معادله‌ی زیر را بدست آورید.

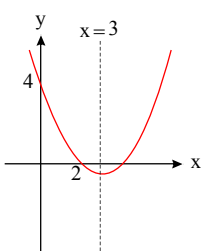
$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$$

۴۴) معادله‌ی سهمی‌های زیر را بنویسید.

الف)



ب)



پ

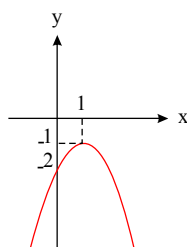
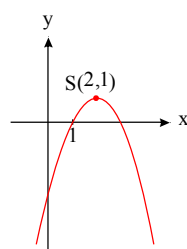
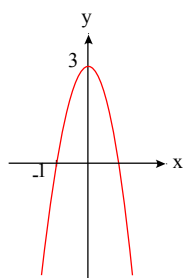
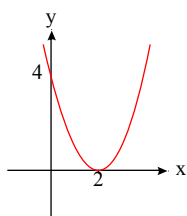
ت

ث

ج

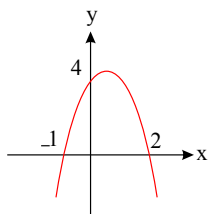


نوید پورزکی

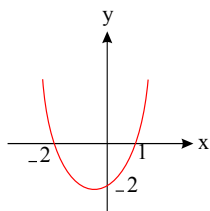




۴۵) معادله‌ی سهمی شکل زیر را بدست آورید.



۴۶) باتوجه به نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ضرایب a و b و c را بدست آورید.



۴۷) معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن برابر مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 4x - 6 = 0$ باشد.

۴۸) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار عددی عبارت $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ را بدست آورید.

۴۹) مقدار m چقدر باشد تا ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگر باشند؟

درس سوم : معادلات گویا و معادلات رادیکالی

۵۰) معادلات زیر را حل کنید.



الف

$$2\sqrt{2t-1} - t = 1$$

ب

$$2x = 1 - \sqrt{2-x}$$

پ

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1$$

ت

$$\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$$

ث

$$2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$$

۵۱) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sqrt{(x-2)^2 + 9} = 5$$

۵۲) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x+9}$$



۵۳) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x - \sqrt{x} = 20$$

۵۴) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$$

۵۵) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{2 - x}{x^2 - x}$$

۵۶) علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله‌ی ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی جمله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود یک ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از جمله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

۵۷) الف - عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد، مسئله چند جواب دارد؟

ب - عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن عدد باشد، مسئله چند جواب دارد؟

۵۸) اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد

$$t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$$

داشت؛ به‌طوری که این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟



۵۹ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\frac{3}{x^2} - 12 = 0$$

ب

$$\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2 + 2k}$$

پ

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$$

۶۰ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5$$



ب.

$$\frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5$$

پ.

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3}$$

ت.

$$\sqrt{t+4} = 3$$

ث.

$$k = \sqrt{6k-8}$$

ج.

$$x + \sqrt{x} = 6$$

چ.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$$



ج

$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$$



پاسخنامه تشریحی

۱
الف

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7 + 12}{2} \rightarrow x_M = \frac{19}{2} \rightarrow M(9.5, 4)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 10}{2} \rightarrow y_M = 4$$

ب

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(7 - 12)^2 + (-2 - 10)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} \rightarrow \boxed{AB = 13}$$

۲

$$3x + 4y + 18 = 0 \rightarrow a = 3, b = 4, c = 18$$

$$6x + 8y - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} 3x + 4y - 2 = 0 \rightarrow a = 3, b = 4, c' = -2$$

$$\rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|18 - (-2)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} \rightarrow \boxed{d = 4}$$

۳

$$AO = \text{شعاع دایره} \rightarrow AO = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(8 - 3)^2 + (6 - (-1))^2}$$

$$\rightarrow AO = \sqrt{25 + 49} \rightarrow AO = \sqrt{74} \rightarrow r = \sqrt{74}$$

$$\text{مساحت دایره } S = \pi r^2 = \pi(\sqrt{74})^2 \rightarrow \boxed{S = 74\pi}$$

۴) گزینه‌ی نقطه‌ی C نسبت به نقطه‌ی M، نقطه‌ی D است بطوری که نقطه‌ی M وسط پاره خط DC است.

$$x_M = \frac{x_D + x_C}{2} \rightarrow 5 = \frac{x_D + 3}{2} \rightarrow x_D + 3 = 10 \rightarrow \boxed{x_D = 7}$$

$$y_M = \frac{y_D + y_C}{2} \rightarrow 2 = \frac{y_D - 1}{2} \rightarrow y_D - 1 = 4 \rightarrow \boxed{y_D = 5}$$

$$\rightarrow \boxed{D(7, 5)}$$

۵

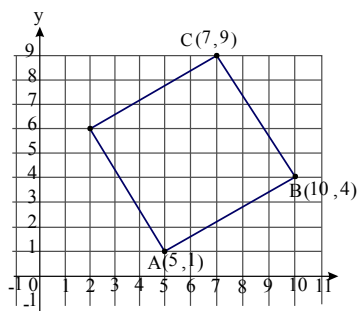
$$\text{الف) } m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 4}{5 - 10} = \frac{-3}{-5} \rightarrow m_{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\text{ب) } AB \perp AD \rightarrow m_{AD} \cdot m_{AB} = -1 \rightarrow m_{AD} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{3}{5}} \rightarrow m_{AD} = -\frac{5}{3}$$

پ) مربع نوعی از متوازی‌الاضلاع است و داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 + 7 = 10 + x_D \\ 1 + 9 = 4 + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 6 \end{cases} \rightarrow D(2, 6)$$

ت



۶

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5 + 10}{2} \Rightarrow x_M = 7.5$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 4}{2} \Rightarrow y_M = 2.5$$

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 4}{5 - 10} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} \Rightarrow m_{AB} = \frac{3}{5}$$

$$m \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m(-\frac{3}{5}) = -1 \Rightarrow m = \frac{5}{3}$$

شیب خط عمودمنصف

معادله‌ی عمودمنصف: $y - y_M = m(x - x_M) \rightarrow y - 2.5 = \frac{5}{3}(x - 7.5) \rightarrow y - 2.5 = \frac{5}{3}x - 12.5 \rightarrow y = \frac{5}{3}x - 10$

۷

میانۀ BM از رأس B به وسط ضلع AC رسم می‌شود:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{5 + 7}{2} = 6, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5 \Rightarrow M(6, 5), \quad B(10, 4)$$

$$m_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{5 - 4}{6 - 10} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4} \rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\rightarrow y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 10) \rightarrow y - 4 = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{2}$$

۸

دو خط موازی $\rightarrow \frac{2m + 1}{3} = \frac{-3m}{-4} \rightarrow 9m = 8m + 4 \rightarrow 9m - 8m = 4 \rightarrow m = 4$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 10 = 0 \\ 9x - 12y - 15 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\div 3} \begin{cases} 3x - 4y + 10 = 0 \\ 3x - 4y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow a = 3, \quad b = -4, \quad c = 10, \quad c' = -5$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|10 - (-5)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} \rightarrow d = 3$$

فاصله رأس از ضلع = طول ضلع مربع

۹

$$y = -2x - 1 \rightarrow 2x + y + 1 = 0, \quad A(4, 1)$$

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad x_0 = 4, \quad y_0 = 1$$



$$d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \times 4 + 1 \times 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow \text{طول ضلع مربع} = \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\rightarrow \text{مساحت مربع} = (2\sqrt{5})^2 = 20$$

۱۰ خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است، پس داریم:

$$d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(2) - 4(-1) + 0|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} \rightarrow R = 2$$

۱۱ در مستطیل قطرهای یکدیگر را نصف می کنند پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} x_O &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = -1 \\ y_O &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3 + (+3)}{2} = 3 \end{aligned} \right\} O(-1, 3)$$

$$x_O = \frac{x_B + x_D}{2} \rightarrow 2x_O = x_B + x_D \rightarrow 2(-1) = -2 + x_D \rightarrow \boxed{x_D = 0}$$

$$y_O = \frac{y_B + y_D}{2} \rightarrow 2y_O = y_B + y_D \rightarrow 2(3) = -1 + y_D \rightarrow \boxed{y_D = 5}$$

$$\rightarrow \boxed{D(0, 5)}$$

$$2x - y + 4 = 0, A(4, 7)$$

$$a = 2, b = -1, c = 4, x_o = 4, y_o = 7$$

$$d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(4) - 1(7) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \rightarrow \boxed{d = \sqrt{5}}$$

$$\text{الف) } AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{4 \times 13} \rightarrow AB = 2\sqrt{13}, AB = 2R \rightarrow 2R = 2\sqrt{13} \rightarrow \boxed{R = \sqrt{13}}$$



$$\left. \begin{aligned} x_O &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1 \\ y_O &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7 + 3}{2} = 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\text{مرکز دایره } O(1, 5)}$$

$$\text{ب) } OC = \sqrt{(x_O - x_C)^2 + (y_O - y_C)^2} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (5 - 8)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$OC = \sqrt{13} \rightarrow OC = R \rightarrow \text{نقطه } C \text{ روی محیط دایره قرار دارد}$$

۱۴

$$2y - 3x = 1 \rightarrow 2y = 3x + 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \rightarrow m' = \frac{3}{2}$$

$$\text{الف} \rightarrow m = m' \rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$\text{ب) دو خط عمود} \rightarrow m \cdot m' = -1 \rightarrow m = \frac{-1}{m'} \rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

۱۵

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{1 + 9} \rightarrow AB = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{9 + 1} \rightarrow AC = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{4 + 16} \rightarrow BC = \sqrt{20}$$

$$AB = AC, \quad AB^2 + AC^2 = BC^2 \rightarrow \text{متساوی الساقین قائم الزاویه} \quad = \triangle ABC$$

۱۶

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

$$AB = BC, \quad AB^2 + BC^2 = AC^2 \rightarrow \text{متساوی الساقین قائم الزاویه} \quad = \triangle ABC$$

۱۷

$$\ell: 3x - y = 7 \rightarrow y = 3x - 7 \rightarrow \boxed{m_1 = 3}$$

$$d: y = 3x - 1 \rightarrow \boxed{m_2 = 3}$$

$$\Delta: x + 3y = 4 \rightarrow 3y = -x + 4 \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \rightarrow \boxed{m_3 = -\frac{1}{3}}$$

$$m_1 = m_2 \rightarrow \ell \parallel d$$

$$m_1 \times m_3 = 3 \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow L \perp \Delta$$



$$m_p \times m_p = 3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow d \perp \Delta$$

۱۸ طول و ارتفاع وارد بر ضلع AB = فاصله‌ی نقطه‌ی C از خط AB

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 0}{0 - 4} \rightarrow m_{AB} = -\frac{3}{4}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \rightarrow y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 4) \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3$$

$$\rightarrow 4y = -3x + 12 \rightarrow 3x + 4y - 12 = 0 \quad \text{معادله‌ی خط } AB$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(1) + 4(1) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} \rightarrow d = 1 \rightarrow CH = 1$$

۱۹

$$\left. \begin{array}{l} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{14 + 10}{2} \rightarrow x_M = 12 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-13)}{2} \rightarrow y_M = -5 \end{array} \right\} \rightarrow M(12, -5)$$

$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} \rightarrow OM = 13$$

$$\text{ب) } m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - (-13)}{14 - 10} = \frac{16}{4} \rightarrow m_{AB} = 4$$

$$\text{معادله‌ی عمودمنصف } AB = m' \rightarrow m' = \frac{-1}{m_{AB}} \rightarrow m' = -\frac{1}{4}$$

$$y - y_M = m'(x - x_M) \rightarrow y - (-5) = -\frac{1}{4}(x - 12)$$

$$\rightarrow y + 5 = -\frac{1}{4}x + 3 \rightarrow y = -\frac{1}{4}x - 2$$

۲۰

$$12x - 5y + 20 = 0 \rightarrow a = 12, b = -5, c = 20$$

$$10y - 24x + 12 = 0 \xrightarrow{\div(-2)} 12x - 5y - 6 = 0 \rightarrow a = 12, b = -5, c' = -6$$

$$\rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|20 - (-6)|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{26}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} \rightarrow d = 2$$

۲۱

$$g(x) = -(x + 1)^2 + 3 = -(x^2 + 2x + 1) + 3 \rightarrow g(x) = -x^2 - 2x + 2$$

تابع نقطه‌ی max دارد $a = -1 < 0$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(-1)} = \frac{2}{-2} \rightarrow x = -1$$



$$g(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 2 = -1 + 2 + 2 = 3 \rightarrow y_{\max} = 3$$

۲۲

$$a = -\frac{1}{2} < 0 \rightarrow \text{تابع نقطه‌ی max دارد}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-\frac{1}{2})} = \frac{20}{1} \rightarrow x = 20$$

$$f(20) = -\frac{(20)^2}{2} + 20(20) = -200 + 400 = 200 \rightarrow y_{\max} = 200$$

$P =$ محیط استادیوم

$$P = 2y + \pi x \rightarrow 2y + \pi x = 1500 \rightarrow 2y = -\pi x + 1500$$

$$\rightarrow y = \frac{-\pi x}{2} + 750$$

$$S_1 = xy = x(\frac{-\pi x}{2} + 750) = -\frac{\pi}{2}x^2 + 750x, \quad a < 0$$

$$x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{750}{2(-\frac{\pi}{2})} \rightarrow x_{\max} = \frac{750}{\pi} \approx 238.85$$

$$y_{\max} = -\frac{\pi}{2}(\frac{750}{\pi}) + 750 = -375 + 750 \rightarrow y_{\max} = 375$$

$$S_2 = xy + \pi(\frac{x}{2})^2 = x(\frac{-\pi x}{2} + 750) + \pi\frac{x^2}{4}$$

$$\rightarrow S_2 = -\frac{\pi x^2}{2} + 750x + \frac{\pi x^2}{4} \rightarrow S_2 = -\frac{\pi x^2}{4} + 750x, \quad a < 0$$

$$\rightarrow x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{750}{2(-\frac{\pi}{4})} \rightarrow x_{\max} = \frac{1500}{\pi} \approx 477.70$$

$$y_{\max} = -\frac{\pi}{4}(\frac{1500}{\pi}) + 750 \rightarrow y_{\max} = -375 + 750 \rightarrow y_{\max} = 375$$

۲۴

$$2x + y = 100 \rightarrow y = 100 - 2x$$

$$f(x) = x \cdot y = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$$

$$\rightarrow f(x) = -2x^2 + 100x \rightarrow x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-2)} \rightarrow x_{\max} = 25, \quad y_{\max} = 50$$

$$\rightarrow \text{بیشترین مساحت } S_{\max} = 1250$$

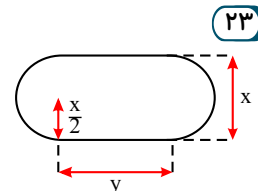
۲۵

$$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$$

$$\text{الف) } t_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-5)} = \frac{100}{10} \rightarrow t_{\max} = 10 \quad \text{ثانیه}$$

$$\text{ب) ارتفاع اوج } h(10) = 100(10) - 5(10)^2 = 1000 - 500 \rightarrow h_{\max} = 500 \quad \text{متر}$$

$$\text{پ) } h(t) = 0 \rightarrow 100t - 5t^2 = 0 \rightarrow 5t(20 - t) = 0$$





$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow \text{زمان شروع پرتاب} \\ t = 20 \rightarrow \text{زمان بازگشت به زمین} \end{cases} \quad \boxed{t = 20} \text{ ثانیه}$$

۲۶

دو ریشه‌ی حقیقی متمایز $\Delta > 0 \rightarrow$

$$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow c > 0$$

$$y \text{ محور} \rightarrow \frac{-b}{2a} = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow x' = -x''$$

۲۷

ریشه‌ی حقیقی ندارد $\Delta < 0 \rightarrow$

$$\frac{-b}{2a} > 0 \rightarrow b > 0$$

$$b^2 - 4ac < 0 \rightarrow ac > 0 \rightarrow c < 0$$

۲۸

دو ریشه‌ی مساوی $\Delta = 0 \rightarrow$

$$\frac{c}{a} = 0 \rightarrow c = 0 \quad x' = x'' = 0$$

$$-\frac{b}{a} = 0 \rightarrow b = 0$$

۲۹

دو ریشه‌ی حقیقی متمایز $\Delta > 0 \rightarrow$

$$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow c < 0$$

$$y \text{ محور} \rightarrow \frac{-b}{2a} = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow x' = -x''$$

۳۰

$$y = -\frac{1}{9}x^2 + 6x, a = -\frac{1}{9} < 0 \rightarrow \text{تابع نقطه‌ی max دارد}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-\frac{1}{9})} = \frac{6}{\frac{2}{9}} \rightarrow \boxed{x = 27}$$

$$y = -\frac{1}{9}(27)^2 + 6(27) = -3 \times 27 + 6 \times 27 \rightarrow \boxed{y_{\max} = 81}$$

$$y \text{ روش دوم} = -\frac{1}{9}x^2 + 6x$$

$$y_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(6^2 - 4(-\frac{1}{9})(0))}{4(-\frac{1}{9})} = \frac{-36}{-\frac{4}{9}} \rightarrow \boxed{y_{\max} = 81}$$



۳۱

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(5)(-5) = 49 + 100 \rightarrow \Delta = 149 > 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{5} = \frac{7}{5} > 0$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-5}{5} = -1 < 0$$

معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز غیر هم‌علامت است که قدر مطلق ریشه‌ی مثبت بزرگتر از قدر مطلق ریشه‌ی منفی است.

۳۲

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} \rightarrow S = \alpha + \beta = 6, \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} \rightarrow P = \alpha\beta = 4$$

$$\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = P(S^2 - 2P) = 4(6^2 - 2(4)) = 4 \times 28 = 112$$

۳۳

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \rightarrow \frac{1}{6} = -\frac{k+1}{6} \rightarrow 1 = -k-1 \rightarrow \boxed{k = -2}$$

$$\rightarrow 6x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(6)(-2) = 1 + 48 = 49$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2(6)} \rightarrow x = \frac{1 \pm 7}{12} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

۳۴

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \rightarrow \alpha\beta = 1 \rightarrow \frac{2m+6}{2} = 1 \rightarrow 2m+6 = 2 \rightarrow 2m = -4 \rightarrow \boxed{m = -2}$$

$$\rightarrow 2x^2 - 6x + 2 = 0 \rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-6}{2} \rightarrow \boxed{S = 3}$$

۳۵

$$\beta = \alpha + 2 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \\ \alpha + \beta = \alpha + \alpha + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha + \beta = 2\alpha + 2 \end{cases} \rightarrow 2\alpha + 2 = 5 \rightarrow \alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{7}{2}$$

$$\rightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{m}{3} \rightarrow \frac{21}{4} = \frac{m}{3} \rightarrow \boxed{m = \frac{63}{4}}$$

۳۶

$$\alpha = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}, \beta = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{S = 2}$$

$$P = \alpha\beta = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4 - 3}{4} \rightarrow \boxed{P = \frac{1}{4}}$$

$$x^2 - sx + p = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0} \quad \text{یا} \quad \boxed{4x^2 - 8x + 1 = 0}$$



۳۷

$$\alpha = 2 + \sqrt{3}, \beta = 2 - \sqrt{3} \rightarrow S = \alpha + \beta = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} \rightarrow \boxed{S = 4}$$

$$P = \alpha\beta = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 \rightarrow \boxed{P = 1}$$

$$\rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - 4x + 1 = 0}$$

۳۸ الف -

$$\text{ریشه ها معکوس} \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow c = a \rightarrow -\Delta = 2(m - 2)$$

$$\rightarrow -\Delta = 2m - 4 \rightarrow -1 = 2m \rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{2}}$$

ب -

$$S = 2 \rightarrow -\frac{b}{a} = 2 \rightarrow \frac{-3}{2(m - 2)} = 2$$

$$\rightarrow -3 = 4(m - 2) \rightarrow -3 = 4m - 8 \rightarrow \Delta = 4m \rightarrow \boxed{m = \frac{5}{4}}$$

۳۹

$$\alpha, \beta = \text{طول و عرض اتاق} \rightarrow \begin{cases} \alpha\beta = 24 \\ 2(\alpha + \beta) = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha\beta = 24 \\ \alpha + \beta = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P = 24 \\ S = 10 \end{cases}$$

$$\rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0 \rightarrow (x - 4)(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 6 \end{cases}$$

← طول اتاق ۶ متر و عرض اتاق ۴ متر

۴۰

$$\rightarrow x + \frac{1}{x} = u \rightarrow u^2 - 2u = 0 \rightarrow u(u - 2) = 0 \rightarrow u = 0, u = 2$$

معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد

$$u = 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 0^2 - 4(1)(1) = -4 < 0 \rightarrow$$

$$u = 2 \rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 1}$$

۴۱

$$\rightarrow u^2 - 3u + 2 = 0 \rightarrow (u - 2)(u - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} u - 2 = 0 \rightarrow u = 2 \\ u - 1 = 0 \rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$u = 2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{2}}, \boxed{x = -\sqrt{2}}$$

$$u = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = 1}, \boxed{x = -1}$$

$$2x^2 + 1 = k \rightarrow k^2 - 12k + 27 = 0 \rightarrow (k - 9)(k - 3) = 0 \rightarrow k = 9, k = 3$$

$$k = 9 \rightarrow 2x^2 + 1 = 9 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

۴۲



$$k = 3 \rightarrow 2x^2 + 1 = 3 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

۴۳

$$x^2 + x = u \rightarrow u^2 - 18u + 72 = 0 \rightarrow (u - 12)(u - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} u - 12 = 0 \rightarrow u = 12 \\ u - 6 = 0 \rightarrow u = 6 \end{cases}$$

$$u = 12 \rightarrow x^2 + x = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3} \\ x + 4 = 0 \rightarrow \boxed{x = -4} \end{cases}$$

$$u = 6 \rightarrow x^2 + x = 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = -3} \\ x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \end{cases}$$

۴۴

الف

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 0 \\ y_{\min} = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 0 \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{c = 0} \\ 4a + 2b = 0 \\ \frac{-b^2 + 4a(0)}{4a} = -4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -b^2 = -16a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 = 16a \rightarrow (-2a)^2 = 16a \rightarrow 4a^2 = 16a \end{cases}$$

$$\rightarrow 4a^2 - 16a = 0 \rightarrow 4a(a - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \boxed{a = 4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{غ} \\ \boxed{b = -8} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = 4x^2 - 8x}$$

ب

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(2) = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 4 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 0 \\ -b = 6a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{c = 4} \\ 4a + 2b + 4 = 0 \\ b = -6a \end{cases}$$

$$\rightarrow 4a + 2(-6a) + 4 = 0 \rightarrow 4a - 12a + 4 = 0 \rightarrow -8a + 4 = 0 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$, \boxed{b = -3} \rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4}$$

پ

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ f(0) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) = a(x - 2)^2 \\ 4 = a(0 - 2)^2 \rightarrow 4 = 4a \rightarrow \boxed{a = 1} \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = 1(x - 2)^2 \rightarrow \boxed{f(x) = x^2 - 4x + 4}$$

ت



$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(-1) = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 3 \\ a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + 3 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = -3 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = -3x^2 + 3$$

ث

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 1 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(1)^2 + b(1) + c = 0 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 1 \\ -b = 4a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ b = -4a \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a - 4a + c = 0 \\ 4a + 2(-4a) + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a + c = 0 \\ -4a + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a + c = 0 \\ 4a - c = -1 \end{cases} +$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ c = -3 \end{cases} \rightarrow b = 4$$

$$\rightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

ج

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = -1 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = -2 \\ a(1)^2 + b(1) + c = -1 \\ -b = 2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ a + b - 2 = -1 \\ b = -2a \end{cases}$$

$$\rightarrow a + (-2a) = 1 \rightarrow -a = 1 \rightarrow a = -1, b = 2$$

$$\rightarrow f(x) = -x^2 + 2x - 2$$

۴۵

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(-1) = 0 \\ f(0) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -4 \\ a - b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -4 \\ a - b = -4 \end{cases} +$$

$$3a = -6 \rightarrow a = -2, b = 2$$

$$\rightarrow y = f(x) = -2x^2 + 2x + 4$$

۴۶

$$\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ a + b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a - 2b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a - b = 1 \end{cases} +$$

$$3a = 3 \rightarrow a = 1, b = 1$$

$$\rightarrow F(x) = x^2 + x - 2$$



۴۷

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 4x - 6 = 0 &\begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} S &= \alpha + \beta = -\frac{-4}{2} \rightarrow S = 2 \\ P &= \alpha\beta = \frac{-6}{2} \rightarrow P = -3 \end{aligned} \\
 \text{معادله جدید } X &= \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \rightarrow S' = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} = \frac{2^2 - 2(-3)}{(-3)^2} \rightarrow \boxed{S' = \frac{10}{9}} \\
 P' &= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{P^2} = \frac{1}{(-3)^2} \rightarrow \boxed{P' = \frac{1}{9}} \\
 \rightarrow x^2 - S'x + P &= 0 \rightarrow x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{1}{9} = 0 \rightarrow \boxed{9x^2 - 10x + 1 = 0}
 \end{aligned}$$

۴۸

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \rightarrow S = \alpha + \beta = 5 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow P = \alpha\beta = 2 \end{cases} \\
 \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2PS}{P} = \frac{5^2 - 2(2)(5)}{2} = \frac{125 - 20}{2} = \frac{95}{2} \rightarrow \boxed{\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = 47.5}
 \end{aligned}$$

۴۹

$$\begin{aligned}
 mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0 &\rightarrow \text{ریشه‌ها معکوس} \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow \frac{m^2 - 2}{m} = 1 \rightarrow m^2 - 2 = m \\
 \rightarrow m^2 - m - 2 = 0 &\rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \begin{cases} m - 2 = 0 \rightarrow m = 2 \\ m + 1 = 0 \rightarrow m = -1 \end{cases} \\
 m = 2 \rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 &\rightarrow \Delta = 3^2 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7 < 0 \rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \\
 m = -1 \rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 &\rightarrow \Delta = 3^2 - 4(-1)(-1) = 9 - 4 = 5 > 0 \rightarrow \boxed{m = -1} \text{ ریشه‌ی حقیقی دارد}
 \end{aligned}$$

۵۰

الف

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{2t-1} - t = 1 &\rightarrow 2\sqrt{2t-1} = t + 1 \\
 \rightarrow (2\sqrt{2t-1})^2 &= (t + 1)^2 \rightarrow 4(2t - 1) = (t + 1)^2 \\
 \rightarrow 8t - 4 = t^2 + 2t + 1 &\rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \rightarrow (t - 1)(t - 5) = 0 \\
 \rightarrow t - 1 = 0 &\rightarrow \boxed{t = 1}, \quad t - 5 = 0 \rightarrow \boxed{t = 5}
 \end{aligned}$$

ب

$$\begin{aligned}
 2x = 1 - \sqrt{2-x} &\rightarrow \sqrt{2-x} = 1 - 2x \\
 \rightarrow 2 - x = (1 - 2x)^2 &\rightarrow 2 - x = 1 - 4x + 4x^2 \rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \\
 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(4)(-1) = 9 + 16 = 25 &\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{8} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ غ ق ق}
 \end{aligned}$$

پ



$$\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1 \rightarrow (\sqrt{x+7})^2 = (\sqrt{x} + 1)^2 \rightarrow x+7 = x+2\sqrt{x}+1$$

$$\rightarrow 6 = 2\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x} = 3 \rightarrow x = 9$$

ت

$$\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{u-3}} = \frac{2}{\sqrt{u}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{u-3}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{u}}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{u-3} = \frac{4}{u} \rightarrow u = 4(u-3) \rightarrow u = 4u - 12$$

$$\rightarrow 12 = 3u \rightarrow u = 4$$

ث

$$\rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 2})^2 = (x - 2)^2$$

$$\rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \begin{cases} x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$\rightarrow (\sqrt{(x-2)^2 + 9})^2 = (5)^2 \rightarrow (x-2)^2 + 9 = 25 \rightarrow (x-2)^2 = 25 - 9$$

$$\rightarrow (x-2)^2 = 16 \begin{cases} x-2=4 \rightarrow \boxed{x=6} \\ x-2=-4 \rightarrow \boxed{x=-2} \end{cases}$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{1+x})^2 = (\sqrt{x+9})^2 \rightarrow 4 + 4\sqrt{1+x} + 1 + x = x + 9$$

$$\rightarrow 4\sqrt{1+x} = 4 \rightarrow \sqrt{1+x} = 1 \rightarrow 1+x = 1 \rightarrow \boxed{x=0}$$

$$x - \sqrt{x} = 20 \rightarrow x - 20 = \sqrt{x}$$

$$\rightarrow (x-20)^2 = (\sqrt{x})^2 \rightarrow x^2 - 40x + 400 = x \rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$$

$$\rightarrow (x-25)(x-16) = 0 \begin{cases} x-25=0 \rightarrow x=25 \\ x-16=0 \rightarrow x=16 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$\rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 2})^2 = (x - 2)^2$$

$$\rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

۵۱

۵۲

۵۳

۵۴



$$\rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

غیر قابل قبول $x = -1$

۵۵

$$\rightarrow \frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)} \rightarrow x(x-1)(x+1) \rightarrow x \neq 0$$

$$\rightarrow x \neq 1$$

$$\rightarrow x \neq -1$$

$$\rightarrow x(x-1)(x+1) \times \left[\frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)} \right]$$

$$\rightarrow 2x(x) + 2x(x-1) = (2-x)(x+1)$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2x^2 - 2x = 2x + 2 - x^2 - x \rightarrow 4x^2 - 2x = -x^2 + x + 2$$

$$\rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(5)(-2) = 9 + 40 = 49$$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2(5)} \rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{10} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

غیر قابل قبول $x = 1$

۵۶

$$x = \text{زمان ویرایش رضا}, \quad 1 \frac{20}{60} = 1 \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow \text{سرعت ویرایش دو نفر} = \text{سرعت ویرایش رضا} + \text{سرعت ویرایش علی}$$

$$\frac{16}{2} + \frac{16}{x} = \frac{16}{\frac{4}{3}} \rightarrow 8 + \frac{16}{x} = 12 \rightarrow \frac{16}{x} = 4 \rightarrow x=4$$

ساعت $x=4$

۵۷

$$\text{الف) } \sqrt{x} - x = \frac{x}{2} \rightarrow \sqrt{x} = x + \frac{x}{2} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{3x}{2} \rightarrow x = \frac{9x^2}{4}$$

$$\rightarrow 4x = 9x^2 \rightarrow 9x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(9x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{4}{9} \end{cases}$$

غیر قابل قبول $x=0$

$$\text{ب) } x - \sqrt{x} = \frac{x}{2} \rightarrow x - \frac{x}{2} = \sqrt{x} \rightarrow \frac{x}{2} = \sqrt{x} \rightarrow \frac{x^2}{4} = x$$

$$\rightarrow x^2 = 4x \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

۵۸

$$t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \xrightarrow{t=2} 2 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 4 = 10 - \frac{h}{5}$$

$$\rightarrow \frac{h}{5} = 10 - 4 \rightarrow h = 30m$$



الف

$$\frac{3}{x^2} - 12 = 0 \rightarrow \frac{3}{x^2} - \frac{12}{1} = 0$$

$$\text{کمم مخرجها} = x^2 \rightarrow x \neq 0 \rightarrow x^2 \times \left[\frac{3}{x^2} - \frac{12}{1} = 0 \right] \rightarrow 3 - 12x^2 = 0$$

$$1 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 3(1 - 4x^2) = 0 \rightarrow 3(1 - 2x)(1 + 2x) = 0$$

$$1 + 2x = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ب

$$\rightarrow \frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k(k+2)} \rightarrow \text{کمم مخرجها} = k(k+2) \begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow k(k+2) \times \left[\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k(k+2)} \right]$$

$$\rightarrow 2(k+2) - 3k^2 = k \rightarrow 2k + 4 - 3k^2 = k \rightarrow 3k^2 - k - 4 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(3)(-4) = 1 + 48 = 49$$

$$\rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2(3)} = \frac{1 \pm 7}{6} \begin{cases} k = \frac{4}{3} \\ k = -1 \end{cases}$$

پ

$$\rightarrow \frac{3}{x} - \frac{2}{(x-3)} = \frac{-12}{(x-3)(x+3)} \rightarrow \text{کمم مخرجها} = x(x-3)(x+3) \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow x(x-3)(x+3) \times \left[\frac{3}{x} - \frac{2}{(x-3)} = \frac{-12}{(x-3)(x+3)} \right]$$

$$\rightarrow 3(x-3)(x+3) - 2x(x+3) = -12x$$

$$\rightarrow 3x^2 - 27 - 2x^2 - 6x = -12x \rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)(x+9) = 0 \begin{cases} x-3=0 \rightarrow x=3 \text{ غیر قابل قبول} \\ x+9=0 \rightarrow x=-9 \text{ قابل قبول} \end{cases}$$



الف

$$\rightarrow \text{کمم مخرجها} = x(x-2) \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow x(x-2) \times \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{5}{1} \right] \rightarrow (x-2) + x = 5x(x-2)$$

$$\rightarrow 2x - 2 = 5x^2 - 10x \rightarrow 5x^2 - 12x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4(5)(2) = 144 - 40 = 104$$

$$\rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{104}}{2(5)} = \frac{12 \pm 2\sqrt{26}}{10} \begin{cases} x = \frac{6 + \sqrt{26}}{5} \\ x = \frac{6 - \sqrt{26}}{5} \end{cases}$$

ب

$$\frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5 \rightarrow \text{کمم مخرجها} = 6r \rightarrow r \neq 0$$

$$6r \times \left[\frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5 \right] \rightarrow 60 - 45r = 40 - 30r \rightarrow 60 - 40 = 45r - 30r$$

$$\rightarrow 20 = 15r \rightarrow r = \frac{4}{3}$$

پ

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3} \rightarrow \text{کمم مخرجها} = (x-3)(x+4) \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$\rightarrow (x-3)(x+4) \times \left[\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3} \right]$$

$$\rightarrow 2x(x+4) + (x-3)(x+1) = (x+4)(x-1)$$

$$\rightarrow 2x^2 + 8x + x^2 - 2x - 3 = x^2 + 3x - 4$$

$$\rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 3^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1$$

$$\rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2(2)} \rightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{4} \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

ت

$$\sqrt{t+4} = 3 \rightarrow (\sqrt{t+4})^2 = (3)^2$$



$$\rightarrow t + 4 = 9 \rightarrow \boxed{t = 5}$$

ث

$$k = \sqrt{6k - 8} \rightarrow (k)^2 = (\sqrt{6k - 8})^2$$

$$\rightarrow k^2 = 6k - 8 \rightarrow k^2 - 6k + 8 = 0 \rightarrow (k - 2)(k - 4) = 0$$

$$\begin{array}{l} \nearrow k - 2 = 0 \rightarrow \boxed{k = 2} \\ \searrow k - 4 = 0 \rightarrow \boxed{k = 4} \end{array}$$

ج

$$x + \sqrt{x} = 6 \rightarrow \sqrt{x} = 6 - x$$

$$\rightarrow (\sqrt{x})^2 = (6 - x)^2 \rightarrow x = 36 - 12x + x^2 \rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$\rightarrow (x - 4)(x - 9) = 0$$

$$\begin{array}{l} \nearrow x - 4 = 0 \rightarrow \boxed{x = 4} \\ \searrow x - 9 = 0 \rightarrow x = 9 \text{ غیر قابل قبول} \end{array}$$

ج

$$\rightarrow \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{2x-5} \rightarrow (\sqrt{x+1} - 1)^2 = (\sqrt{2x-5})^2$$

$$\rightarrow x + 1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = 2x - 5 \rightarrow x + 2 - 2\sqrt{x+1} = 2x - 5$$

$$\rightarrow -x + 7 = 2\sqrt{x+1} \rightarrow (-x + 7)^2 = (2\sqrt{x+1})^2$$

$$\rightarrow x^2 - 14x + 49 = 4(x + 1) \rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$\rightarrow (x - 3)(x - 15) = 0$$

$$\begin{array}{l} \nearrow x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3} \\ \searrow x - 15 = 0 \rightarrow x = 15 \text{ غیر قابل قبول} \end{array}$$

ح

$$\rightarrow (\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}})^2 = 2^2 \rightarrow m + 2\sqrt{m}(\frac{1}{\sqrt{m}}) + \frac{1}{m} = 4$$

$$\rightarrow m + 2 + \frac{1}{m} = 4 \rightarrow m - 2 + \frac{1}{m} = 0 \rightarrow \frac{m^2 - 2m + 1}{m} = 0$$

$$\rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow (m - 1)^2 = 0 \rightarrow m - 1 = 0 \rightarrow \boxed{m = 1}$$