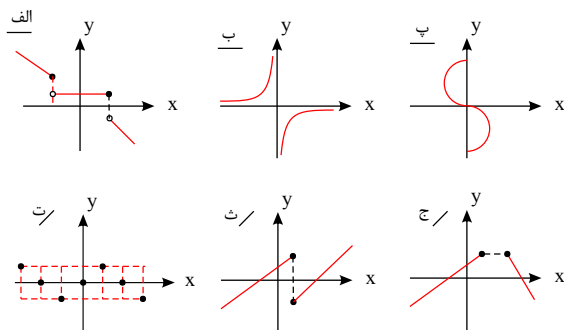


نوید پورزکی

فصل سوم : توابع

۱) کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟



۲) به ازای چه مقادیری از a و b رابطه‌ی زیر یک تابع است؟

$$f = \{(2, a - b), (a, 2b + a), (2, 3), (a, 2a - 1)\}$$

۳) نمایش جبری تابع f را بنویسید در صورتی که تابع f خطی باشد و از نقاط $(2, 5)$ و $(-1, -7)$ بگذرد.

۴) دامنه‌ی توابع زیر را بدست آورید.



الف

$$f(x) = \frac{\sqrt{5}}{x}$$

ب

$$f(x) = \frac{x}{x+5}$$

پ

$$g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x-1}$$

ت

$$h(x) = \frac{x-3}{x^2+4}$$

ث

$$k(x) = \frac{4x^2 + 3}{x^2 - 3x - 10}$$

ج

$$l(x) = \frac{3}{x^2 + x + 2}$$



ج

$$r(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x^2 - 4x + 4}$$

ح

$$u(x) = \frac{6x + 15}{x^2 + 2x - 15}$$

خ

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 5x^2 + 4}$$

۵ دامنه‌ی توابع زیر را بدست آورید.

ب) $g(x) = \frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-1}}$

ت) $k(x) = \sqrt{\frac{2x-16}{2-x}}$

ج) $f(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}$

الف) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{10-2x}$

پ) $h(x) = \frac{\sqrt{3x-6}}{\sqrt{2x-6}}$

ث) $y = \sqrt{4 - \sqrt{1-2x}}$

۶ آیا دو تابع $f(x) = \frac{3(x^2-1)}{x-1}$ و $g(x) = 3x+3$ با هم برابرند؟

۷ آیا دو تابع $f(x) = (\sqrt{x})^2$ و $g(x) = |x|$ با هم برابرند؟



۸ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$$

۹ آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $h(x) = |x|$ با هم برابرند؟

۱۰ اگر $x = -\frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت $||[7x] - [[5x]]||$ را بدست آورید.

۱۱ مجموعه جواب معادلات زیر را بیابید.

$$[x + 2] = 5$$

$$-2[x - 1] = 6$$

$$[2x - 3] = 1$$

۱۲ نمودار تابع $y = 2[x] + 1$ را در بازه‌ی $[-1, 2]$ رسم کنید.

۱۳ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بدست آورید.

$$[\sqrt{2} + 3]$$

$$\left[\frac{\pi}{2} + 4\right]$$

$$[1,5 + \sqrt{2}]$$

$$\left[-\frac{\pi}{3}\right]$$

$$[2\sqrt{3} - 1]$$

$$\left[-\frac{49}{16}\right]$$

$$[-\sqrt{7} - 2]$$



۱۴) حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

$$[300,4002]$$

$$[-103,003]$$

$$[-2309,54]$$

۱۵) اگر تابع $f = \{(3, 5), (4, -6), (a+1, 5), (2a, 3b)\}$ یک به یک باشد، a و b را بدست آورید.

۱۶) اگر f تابعی یک به یک باشد و $f(-2) = 5$ و $f^{-1}(4a-7) = -2$ باشد، مقدار a را بدست آورید.

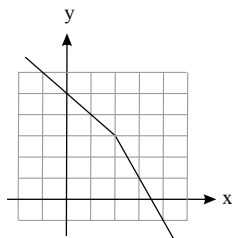
۱۷) یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید و در صورت امکان وارون آنها را بنویسید.

$$f = \{(1, 4), (2, 7), (6, 9), (5, 12)\}$$

$$g = \{(2, 3), (4, 9), (7, -1), (5, 9)\}$$

۱۸) اگر تابع $f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\}$ یک به یک باشد، a و m را بدست آورید.

۱۹) اگر نمودار تابع f به صورت روبرو باشد، حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

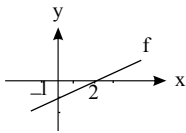


الف) $f^{-1}(1) + f^{-1}(-1) =$

ب) $2f^{-1}(4) + 3f^{-1}(3) =$



۲۰) اگر نمودار تابع f بصورت شکل روبرو باشد، ضابطه وارون آن را بدست آورید.



۲۱) وارون هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{5}$$

$$g(x) = -3x + 1$$

$$3y + 4x + 12 = 0$$

۲۲) وارون تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 3$ را بدست آورید.

۲۳) اگر تابع خطی f از نقاط $(-1, 4)$, $(2, -2)$ بگذرد، ضابطه تابع وارون آن را بدست آورید.

۲۴) ضابطه وارون تابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^{\geq 2} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \\ f(x) = (x - 2)^2 \end{cases}$$

۲۵) ضابطه وارون تابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^3 \end{cases}$$



۲۶ ضابطه‌ی وارون تابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = (x+1)^3 - 4 \end{cases}$$

۲۷ اگر وارون تابع خطی f از نقاط $(-3, 2)$ و $(9, -1)$ بگذرد، ضابطه‌ی تابع f را بنویسید.

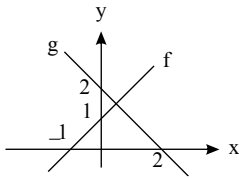
۲۸ اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $f^{-1}(x)$ را رسم کنید.

۲۹ اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، $f^{-1}(x)$ را بدست آورید.

۳۰ اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ باشد، مقدار $(2f-g)(3)$ را بدست آورید.

۳۱ اگر $f = \{(1, -4), (2, 7), (3, 5), (4, 9)\}$ و $g = \{(-1, 3), (0, 2), (2, 4), (3, 1)\}$ باشند، آنگاه توابع $f+g$ و $f-g$ دامنه‌ی هر یک را مشخص کنید.

۳۲ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$ باشد، دامنه‌ی تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ را بدست آورید.



۳۳ اگر نمودار دو تابع f و g بصورت روبرو باشد، مقدار $(f + 2g)(3)$ را بدست آورید.

۳۴ اگر $f = \{(-1, 4), (0, 5), (1, 2), (3, 10), (4, -2)\}$ و $g = \{(-2, 6), (0, 3), (1, -2), (3, 2), (5, 1)\}$ باشند، ابتدا تابع $2g - f$ را بصورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و سپس مقدار $(\frac{f}{g})(3)$ را بدست آورید.

۳۵ اگر $f(x) = |x^2 - 5|$ و $g(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ باشد مقدار $\frac{1 + f(-2)}{g(2)}$ را بدست آورید.

۳۶ اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x & x \geq -2 \\ x-1 & x < -2 \end{cases}$ باشد، حاصل $(f + 2g)(x)$ به ازای $x = f(0)$ چقدر است؟

۳۷ تابع $y = \sqrt{x+4} - 1$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بدست آورید.

۳۸ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{3-x} + 2$ را رسم کنید.

۳۹ نمودار سهمی $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ را ۲ واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم، معادله‌ی آن را پس از انتقال بنویسید.



۴۰) نمودار توابع زیر را با کمک نمودار تابع $y = |x|$ رسم کنید.

الف) $y = 2|x + 1|$

ب) $y = 2 - |x|$

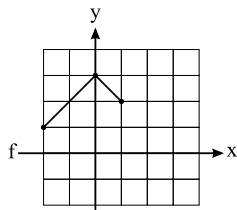
پ) $y = 3 - |x + 2|$

۴۱) با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$y = \sqrt{x} - 2$, $y = -3 + \sqrt{x - 4}$, $y = \sqrt{x + 1} + 3$

$y = -\sqrt{x} - 1$, $y = -\sqrt{x + 6} - 1$

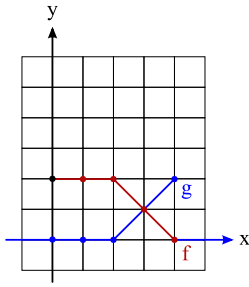
۴۲) نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.



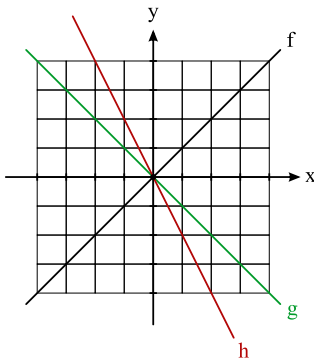
۴۳) تابع با ضابطه $f(x) = [x + 2]$ و دامنه $D = [-3, 3]$ را رسم کنید.



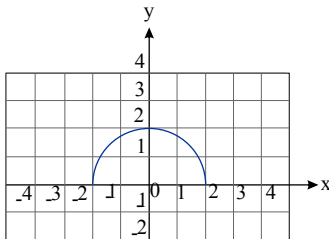
۴۴ در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید.



۴۵ با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام یک از آن‌ها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟

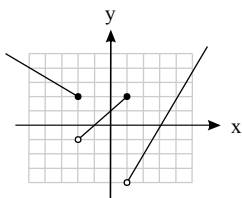


۴۶ با حذف بخشی از نمودار نیم دایره داده شده، نمودار یک تابع یک به یک را مشخص کنید.





ضابطه و دامنه و برد تابع مربوط به نمودار روبرو را بنویسید. (۴۷)



اگر f یک تابع خطی باشد به طوری که $f(1) = 5$ و $f^{-1}(9) = 3$ ، آنگاه ضابطه f و f^{-1} را بدست آورید. (۴۸)

در تابع $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ اگر $f^{-1}(4) = a$ باشد، مقدار a را بدست آورید. (۴۹)

اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 - 4$ باشد، ابتدا تابع $\frac{f}{g}$ و دامنه آن را بدست آورده و سپس مقدار $(g - 3f)(5)$ را محاسبه کنید. (۵۰)

اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = -3x + 3$ باشد، دامنه و ضابطه $\frac{f}{g}$ را بدست آورده و سپس مقدار $(2f - g)(0)$ را محاسبه کنید. (۵۱)

اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ دو تابع باشند، آنگاه مطلوبت محاسبه: (۵۲)

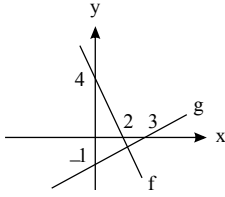
الف - دامنه و ضابطه $\frac{f}{g}$ تابع $\frac{f}{g}$ ب - دامنه و ضابطه $\frac{g}{f}$ تابع $\frac{g}{f}$

پ - $(4f - 3g)(6)$



۵۳ اگر نمودار تابع f و g بصورت روبرو باشند، مطلوبست:

الف - ضابطه و دامنه‌ی تابع $f + g$ ب - مقدار $(6)(3g - f)$



۵۴ نمودار سهمی $y = x^2 + 4x$ را ۳ واحد به سمت راست و یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، معادله‌ی آن را پس از انتقال بنویسید.

۵۵ در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق در تابع داده شده را بیابید.

الف

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

ب

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$g(x) = x + 2$$

پ

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = -\sqrt{x}$$



ت

$$f(x) = \frac{x-2}{x+5}$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 1$$

ت

$$g = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0)\}$$

$$f = \{(2, 5), (3, 4), (0, -2)\}$$



پاسخنامه تشریحی

الف) تابع است ب) تابع است پ) تابع نیست ت) تابع است ث) تابع نیست ج) تابع است

۱

۲

$$\begin{aligned} (2, a-b) &= (2, 3) \rightarrow a-b=3 \\ (a, 2b+a) &= (a, 2a-1) \rightarrow 2b+a=2a-1 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} a-b=3 \\ -a+2b=-1 \end{cases} +$$

$$\underline{b=2, a-2=3 \rightarrow a=5}$$

۳

$$f(x) = ax + b$$

$$\begin{cases} f(2) = 5 \\ f(-1) = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(2) + b = 5 \\ a(-1) + b = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ -a + b = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ a - b = 7 \end{cases} +$$

$$\underline{3a = 12 \rightarrow a = 4, b = -3}$$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = 4x - 3}$$

۴

الف

$$f(x) = \frac{\sqrt{5}}{x} \rightarrow x = 0 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

ب

$$f(x) = \frac{x}{x+5} \rightarrow x+5=0 \rightarrow x=-5 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$$

پ

$$g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x-1} \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

ت

$$h(x) = \frac{x-3}{x^2+4} \rightarrow x^2+4=0 \rightarrow x^2=-4 \text{ ریشه ندارد} \rightarrow D_h = \mathbb{R}$$

ث

$$k(x) = \frac{4x^2 + 3}{x^2 - 3x - 10} \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow D_k = \mathbb{R} - \{-2, 5\}$$

ج

$$l(x) = \frac{3}{x^2 + x + 2} \rightarrow x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 1^2 - 4(1)(2) = -7 < 0 \text{ ریشه ندارد}$$

$$\rightarrow D_l = \mathbb{R}$$



ج

$$r(x) = \frac{x^2 + 3x + 6}{x^2 - 4x + 4} \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow D_r = \mathbb{R} - \{2\}$$

ح

$$u(x) = \frac{6x + 15}{x^2 + 2x - 15} \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = -5 \\ x = 3 \end{matrix}$$

$$\rightarrow D_u = \mathbb{R} - \{-5, 3\}$$

خ

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 5x^2 + 4} \rightarrow x^2 - 5x^2 + 4 = 0 \rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$\begin{matrix} \nearrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ \searrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \rightarrow x = \pm 2 \end{matrix} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$$

۵

الف) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{10-2x}$

اشتراک جواب ها $x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$ $10-2x \geq 0 \rightarrow 10 \geq 2x \rightarrow 5 \geq x$

$$\rightarrow 2 \leq x \leq 5 \Rightarrow D_f = [2, 5]$$

ب) $g(x) = \frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-1}}$

اشتراک جواب ها $9-x \geq 0 \rightarrow 9 \geq x$ $x-1 > 0 \rightarrow x > 1$

$$\rightarrow 1 < x \leq 9 \rightarrow D_g = (1, 9]$$

پ) $h(x) = \frac{\sqrt{3x-6}}{\sqrt{2x-6}}$

اشتراک جواب ها $3x-6 \geq 0 \rightarrow 3x \geq 6 \rightarrow x \geq 2$ $2x-6 > 0 \rightarrow 2x > 6 \rightarrow x > 3$

$$\rightarrow x > 3 \rightarrow D_h = (3, +\infty)$$

ت) $k(x) = \sqrt{\frac{2x-16}{2-x}}$

$$\rightarrow \frac{2x-16}{2-x} \geq 0 \rightarrow \frac{2x-16}{2-x} = 0 \rightarrow x = 8 \rightarrow$$

$$\frac{2x-16}{2-x} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow$$

x	$-\infty$	2	8	$+\infty$
$2x-16$	-	-	0	+
$2-x$	+	0	-	-
P	-	-	+	-

$$2 < x \leq 8 \rightarrow D_k = (2, 8]$$

ث) $y = \sqrt{4 - \sqrt{1-2x}}$



$$\begin{cases} 1 - 2x \geq 0 \rightarrow 1 \geq 2x \rightarrow x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - \sqrt{1 - 2x} \geq 0 \rightarrow 4 \geq \sqrt{1 - 2x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 16 \geq 1 - 2x \rightarrow 2x \geq -15 \rightarrow x \geq -\frac{15}{2} \end{cases}$$

اشتراک جواب ها

$$\rightarrow -\frac{15}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \rightarrow D_g = \left[-\frac{15}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

ج) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - |x|}{1 + |x|}} \rightarrow \frac{1 - |x|}{1 + |x|} \geq 0 \xrightarrow{1 + |x| > 0} 1 - |x| \geq 0 \rightarrow 1 \geq |x|$

$$\rightarrow -1 \leq x \leq 1 \rightarrow D_f = [-1, 1]$$

۶

$$f(x) = \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1} \rightarrow x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$g(x) = 3x + 3 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

دو تابع f و g برابر نیستند $\rightarrow D_f \neq D_g$

۷

$$f(x) = (\sqrt{x})^2 \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$g(x) = |x| \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

دو تابع f و g برابر نیستند $\rightarrow D_f \neq D_g$

۸

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8} \rightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 0 \rightarrow (x - 4)(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$x^2 - 6x + 8$		$+$	$-$	$+$
		ج	ج	

$$\rightarrow D_f = (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$$

۹

$$f(x) = \sqrt{x^2} \rightarrow x^2 \geq 0 \rightarrow x \in \mathbb{R} \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$h(x) = |x| \rightarrow D_h = \mathbb{R} \rightarrow D_f = D_h$$

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = h(x) \rightarrow f(x) = h(x)$$

دامنه و ضابطه های f و h با هم برابرند پس دو تابع با هم برابرند.

۱۰

$$\begin{aligned} |[7x] - [5x]| &= \left| \left[7 \times \left(-\frac{1}{2} \right) \right] - \left[5 \times \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \right| = \left| \left[-\frac{7}{2} \right] - \left[-\frac{5}{2} \right] \right| = |[-3, 5] - [-2, 5]| \\ &= |-4 - (-3)| = |-4 - 3| = |-7| = 7 \end{aligned}$$

۱۱

$$[x + 2] = 5 \rightarrow [x] + 2 = 5 \rightarrow [x] = 3 \rightarrow \boxed{3 \leq x < 4}$$



$$-2[x-1] = 6 \rightarrow [x-1] = -\frac{6}{2} \rightarrow [x-1] = -3 \rightarrow [x] = -2 \rightarrow \boxed{-2 \leq x < -1}$$

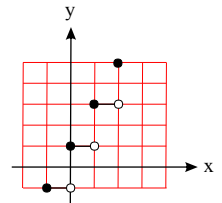
$$[2x-3] = 1 \rightarrow [2x] - 3 = 1 \rightarrow [2x] = 4 \rightarrow 4 \leq 2x < 5 \rightarrow \boxed{2 \leq x < \frac{5}{2}}$$

$$-1 \leq x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = -1$$

$$0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = 1$$

$$1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = 3$$

$$x = 2 \rightarrow [x] = 2 \rightarrow y = 5$$



۱۲

۱۳

$$[\sqrt{2} + 3] = [\sqrt{2}] + 3 = [1,41] + 3 = 1 + 3 = 4 \quad (\sqrt{2} \approx 1,41)$$

$$[2\sqrt{3} - 1] = [2\sqrt{3}] - 1 = [2 \times 1,73] - 1 = [3,46] - 1 = 3 - 1 = 2 \quad (\sqrt{3} \approx 1,73)$$

$$\left[\frac{\pi}{2} + 4\right] = \left[\frac{\pi}{2}\right] + 4 = \left[\frac{3,14}{2}\right] + 4 = [1,57] + 4 = 1 + 4 = 5 \quad (\pi \approx 3,14)$$

$$\left[-\frac{49}{16}\right] = \left[\frac{-48-1}{16}\right] = \left[-3 - \frac{1}{16}\right] = \left[-3\frac{1}{16}\right] = -4$$

$$[1,5 + \sqrt{2}] = [1,5 + 1,41] = [2,91] = 2 \quad (\sqrt{2} \approx 1,41)$$

$$[-\sqrt{7} - 2] = [-\sqrt{7}] - 2 = [-2,64] - 2 = -3 - 2 = -5 \quad (\sqrt{7} \approx 2,64)$$

$$\left[-\frac{\pi}{3}\right] = \left[-\frac{3,14}{3}\right] = [-1,04] = -2$$

۱۴

$$[3 \circ \circ 4 \circ \circ 2] = 3 \circ \circ$$

$$[-1 \circ 3 \circ \circ 3] = -1 \circ 4$$

$$[-23 \circ 9,54] = -231 \circ$$

۱۵

$$\text{تابع } f \text{ یک به یک} \rightarrow (3, 5) = (a + 1, 5) \rightarrow a + 1 = 3 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\rightarrow f = \{(3, 5), (4, -6), (4, 3b)\} \xrightarrow{\text{یک به یک } f} (4, -6) = (4, 3b) \rightarrow 3b = -6 \rightarrow \boxed{b = -2}$$

۱۶

$$f(-2) = 5 \rightarrow (-2, 5) \in f \rightarrow (5, -2) \in f^{-1}$$

$$\rightarrow 4a - 7 = 5 \rightarrow 4a = 12 \rightarrow \boxed{a = 3}$$

۱۷

$$f = \{(1, 4), (2, 7), (6, 9), (5, 12)\} \text{ تابع } f \text{ یک به یک و وارون پذیر است و داریم:}$$

$$f^{-1} = \{(4, 1), (7, 2), (9, 6), (12, 5)\}$$

$$g = \{(2, 3), (4, 9), (7, -1), (5, 9)\}$$

تابع g یک به یک نیست زیرا به ازای $y = 9$ دو مقدار $x = 4$ و $x = 5$ داریم. بنابراین تابع g وارون پذیر نیست.



۱۸

یک به یک تابع f $(m, 3) = (-1, 3) \rightarrow m = -1$

f یک به یک $\rightarrow f = \{(-2, 2), (-1, 3), (-2, a)\} \rightarrow (-2, 2) = (-2, a) \rightarrow a = 2$

۱۹

الف)

$$(3, 1) \in f \rightarrow (1, 3) \in f^{-1} \rightarrow f^{-1}(1) = 3$$

$$(4, -1) \in f \rightarrow (-1, 4) \in f^{-1} \rightarrow f^{-1}(-1) = 4$$

$$\rightarrow f^{-1}(1) + f^{-1}(-1) = 3 + 4 = 7$$

ب)

$$(1, 4) \in f \rightarrow (4, 1) \in f^{-1} \rightarrow f^{-1}(4) = 1, (2, 3) \in f \rightarrow (3, 2) \in f^{-1} \rightarrow f^{-1}(3) = 2$$

$$\rightarrow 2f^{-1}(4) + 3f^{-1}(3) = 2(1) + 3(2) = 2 + 6 = 8$$

۲۰ روش اول: تابع f از نقطه‌های $(2, 0)$ و $(0, -1)$ می‌گذرد، ابتدا ضابطه تابع f را بدست آورده و از روی آن ضابطه تابع f^{-1} را محاسبه می‌کنیم:

$$(2, 0), (0, -1) \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-1)}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$y = ax + b \rightarrow y = \frac{1}{2}x + b \xrightarrow{(0, -1)} -1 = \frac{1}{2}(0) + b \rightarrow b = -1$$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{2}x - 1} \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1 \rightarrow y + 1 = \frac{1}{2}x \rightarrow x = 2y + 2$$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = 2y + 2 \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = 2x + 2}$$

روش دوم: $f: (0, -1), (2, 0) \in f$ در نتیجه داریم $(-1, 0), (0, 2) \in f^{-1}$ و می‌توانیم ضابطه تابع f^{-1} را بصورت مستقیم از روی نقاط $(-1, 0), (0, 2)$ بدست آوریم:

$$(-1, 0), (0, 2) \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - (-1)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$, y = ax + b \rightarrow y = 2x + b \xrightarrow{(0, 2)} 2 = 2(0) + b \rightarrow b = 2$$

$$\rightarrow y = 2x + 2 \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = 2x + 2}$$

۲۱

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{5} \rightarrow y = \frac{1 - 2x}{5} \rightarrow 5y = 1 - 2x \rightarrow 2x = 1 - 5y$$

$$\rightarrow x = \frac{1 - 5y}{2} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}y \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}}$$

$$g(x) = -3x + 1 \rightarrow y = -3x + 1 \rightarrow 3x = 1 - y \rightarrow x = \frac{1 - y}{3}$$

$$\rightarrow g^{-1}(y) = \frac{1}{3} - \frac{y}{3} \rightarrow \boxed{g^{-1}(x) = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}}$$

$$3y + 4x + 12 = 0 \rightarrow 4x = -3y - 12 \rightarrow x = \frac{-3y - 12}{4} \rightarrow x = -\frac{3y}{4} - 3$$



$$\rightarrow y^{-1} = -\frac{3x}{4} - 3$$

۲۲

$$y = 2x + 3 \rightarrow y - 3 = 2x \rightarrow x = \frac{y-3}{2} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}}$$

روش اول: ۲۳

$$(2, -2), (-1, 4) \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-2)}{-1 - 2} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$\rightarrow y = -2x + b \xrightarrow{(2, -2)} -2 = -2(2) + b \rightarrow b = 2 \rightarrow \boxed{f(x) = -2x + 2}$$

$$\rightarrow y = -2x + 2 \rightarrow 2x = -y + 2 \rightarrow x = \frac{-y + 2}{2} \rightarrow f^{-1}(y) = -\frac{y}{2} + 1$$

$$\rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = -\frac{x}{2} + 1}$$

روش دوم:

$$(2, -2), (-1, 4) \in f \rightarrow (-2, 2), (4, -1) \in f^{-1}$$

$$\rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{-2 - 4} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$\xrightarrow{(-2, 2)} 2 = -\frac{1}{2}(-2) + b \rightarrow 2 = 1 + b \rightarrow b = 1 \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1}$$

۲۴ تابع درجه دوم یک به یک و وارون پذیر نیست، اما در تابع روبرو چون دامنه‌ی تابع محدود شده و شکل تابع نیمی از سهمی تابع درجه ۲ است پس تابع یک به یک بوده و وارون پذیر است.

$$y = (x-2)^2 \rightarrow \sqrt{y} = x-2 \rightarrow x = \sqrt{y} + 2 \rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y} + 2$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2 \rightarrow \begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 2} \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2 \end{cases}$$

۲۵

$$y = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y} \rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow \begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

۲۶

$$y = (x+1)^3 - 4 \rightarrow y+4 = (x+1)^3 \rightarrow \sqrt[3]{y+4} = x+1 \rightarrow x = \sqrt[3]{y+4} - 1$$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+4} - 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+4} - 1 \rightarrow \begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+4} - 1 \end{cases}$$

۲۷

$$(-3, 2) \in f^{-1} \rightarrow (2, -3) \in f \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 9}{2 - (-1)} = \frac{-12}{3} \rightarrow a = -4$$

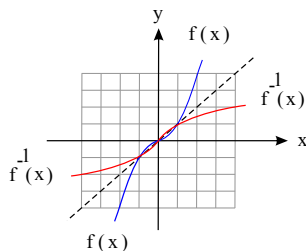
$$(9, -1) \in f^{-1} \rightarrow (-1, 9) \in f \rightarrow \xrightarrow{(2, -3)} -3 = -4(2) + b \rightarrow b = 5 \rightarrow \boxed{f(x) = -4x + 5}$$

۲۸

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قرینه‌ی آن را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ رسم می‌کنیم که همان $f^{-1}(x)$ است.



۲۹

$$f(x) = \sqrt{x-1} \rightarrow y = \sqrt{x-1} \rightarrow y^2 = x-1 \rightarrow y^2 + 1 = x$$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = y^2 + 1 \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = x^2 + 1}$$

۳۰

$$f(x) = \sqrt{x+1} \rightarrow f(3) = \sqrt{3+1} \rightarrow f(3) = 2$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x-2} \rightarrow g(3) = \frac{3+1}{3-2} \rightarrow g(3) = 4$$

$$\rightarrow (2f - g)(3) = 2f(3) - g(3) = 2(2) - 4 \rightarrow \boxed{(2f - g)(3) = 0}$$

۳۱

$$D_f = \{1, 2, 3, 4\}, D_g = \{-1, 0, 2, 3\} \rightarrow D_f \cap D_g = \{2, 3\}$$

$$\rightarrow f + g = \{(2, 7 + 4), (3, 5 + 1)\} \rightarrow f + g = \{(2, 11), (3, 6)\}, D_{f+g} = \{2, 3\}$$

$$\rightarrow f - g = \{(2, 7 - 4), (3, 5 - 1)\} \rightarrow f - g = \{(2, 3), (3, 4)\}, D_{f-g} = \{2, 3\}$$

۳۲

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}} \rightarrow x+3 > 0 \rightarrow x > -3 \rightarrow D_f = (-3, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}} \rightarrow x+3 > 0 \rightarrow x > -3 \rightarrow D_g = (-3, +\infty)$$

$$g(x) = 0 \rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}} = 0 \rightarrow x-1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = (-3, +\infty) - \{1\}$$

$$\rightarrow \boxed{D_{\frac{f}{g}} = (-3, +\infty) - \{1\} = (-3, 1) \cup (1, +\infty)}$$

۳۳

$$(0, 1), (-1, 0) \in f \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{-1 - 0} = 1$$

$$\rightarrow y = x + b \xrightarrow{(0, 1)} 1 = 0 + b \rightarrow b = 1 \rightarrow \boxed{f(x) = x + 1}$$

$$(0, 2), (2, 0) \in g \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{2 - 0} = -1$$



$$\rightarrow y = -x + b \xrightarrow{(0,2)} 2 = -(0) + b \rightarrow b = 2 \rightarrow \boxed{g(x) = -x + 2}$$

$$f(3) = 3 + 1 = 4, \quad g(3) = -3 + 2 = -1$$

$$\rightarrow (f + 2g)(3) = f(3) + 2g(3) = 4 + 2(-1) = 4 - 2 = 2 \rightarrow \boxed{(f + 2g)(3) = 2}$$

۳۴

$$D_f = \{-1, 0, 1, 3, 4\}, \quad D_g = \{-2, 0, 1, 3, 5\}$$

$$\rightarrow D_f \cap D_g = \{0, 1, 3\}$$

$$\rightarrow 2g - f = \{0, 2(3) - 5\}, (1, 2(-2) - 2), (3, 2(2) - 10)\}$$

$$\rightarrow 2g - f = \{(0, 1), (1, -6), (3, -6)\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{4}{-1} \rightarrow \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(3) = -4}$$

۳۵

$$f(-2) = |(-2)^2 - 5| = |4 - 5| = 1, \quad g(2) = \frac{2}{1 + 2^2} = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \frac{1 + f(-2)}{g(2)} = \frac{1 + 1}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{\frac{2}{5}} \rightarrow \boxed{\frac{1 + f(-2)}{g(2)} = 5}$$

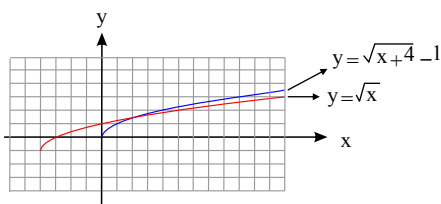
۳۶

$$f(0) = 0 - 1 = -1 \rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$f(-1) = -1 - 1 = -2, \quad g(-1) = -1$$

$$\rightarrow (f + 2g)(-1) = f(-1) + 2g(-1) = -2 + 2(-1) \rightarrow \boxed{(f + 2g)(-1) = -4}$$

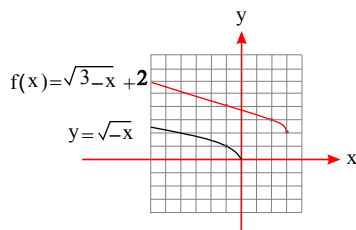
۳۷ ابتدا نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم و این نمودار را ۴ واحد به سمت چپ و ۱ واحد به سمت پایین می‌بریم و داریم:



$$y = \sqrt{x} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow D_y = [-4, +\infty), \quad R_y = [-1, +\infty) \quad y = \sqrt{x+4} - 1 \rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

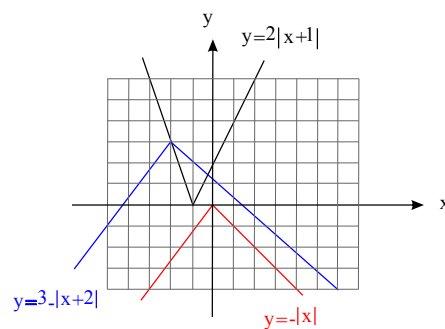
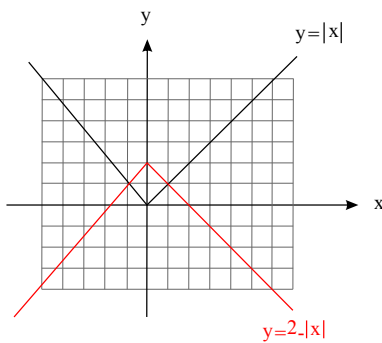
۳۸ $f(x) = \sqrt{-(x-3)} + 2$ پس ابتدا باید نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ را رسم کنیم و آن را ۳ واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.



۳۹ ابتدا نمودار سهمی $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ را ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم که شکل آن به صورت $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$ تبدیل می‌شود و سپس آن را یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم که شکل آن بصورت $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 1 + 1$ تبدیل می‌شود و داریم:

$$y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 \quad \text{یا} \quad y = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) + 2 = -\frac{x^2}{2} - 2x - 2 + 2 \rightarrow y = -\frac{x^2}{2} - 2x$$

۴۰



۴۱

$$y = \sqrt{x} - 2, \quad y = -3 + \sqrt{x-4}, \quad y = \sqrt{x+1} + 3$$

x	0	1	4
y	-2	-1	0

x	4	5	8
y	-3	-2	-1

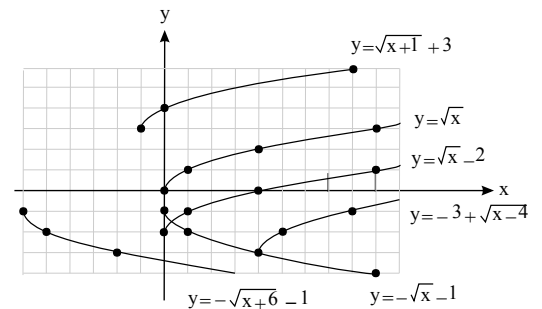
x	-1	0	3
y	3	4	5

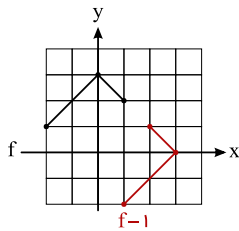
$$y = -\sqrt{x} - 1$$

x	0	1	4
y	-1	-2	-3

$$y = -\sqrt{x+6} - 1$$

x	-6	-5	-2
y	-1	-2	-3

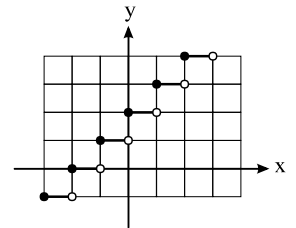




۴۲

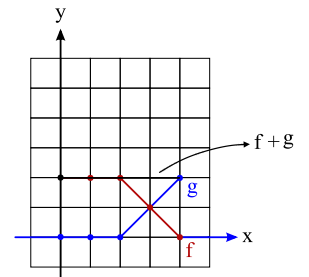
$$\begin{aligned} (-2, 1) \in f &\rightarrow (1, -2) \in f^{-1} \\ (0, 3) \in f &\rightarrow (3, 0) \in f^{-1} \\ (1, 2) \in f &\rightarrow (2, 1) \in f^{-1} \end{aligned}$$

۴۳



$$\begin{aligned} f(x) &= [x + 2] = [x] + 2 \\ -3 \leq x < -2 &\rightarrow [x] = -3 \rightarrow f(x) = -1 \\ -2 \leq x < -1 &\rightarrow [x] = -2 \rightarrow f(x) = 0 \\ -1 \leq x < 0 &\rightarrow [x] = -1 \rightarrow f(x) = 1 \\ 0 \leq x < 1 &\rightarrow [x] = 0 \rightarrow f(x) = 2 \\ 1 \leq x < 2 &\rightarrow [x] = 1 \rightarrow f(x) = 3 \\ 2 \leq x < 3 &\rightarrow [x] = 2 \rightarrow f(x) = 4 \end{aligned}$$

۴۴

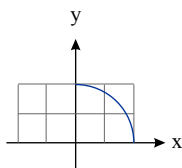


$$\begin{aligned} f &= \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\} \\ g &= \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 1), (4, 2)\} \\ \rightarrow f + g &= \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\} \end{aligned}$$

۴۵

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \quad g(x) = -x, \quad h(x) = -2x \\ \rightarrow -x &= x + (-2x) \rightarrow g(x) = f(x) + h(x) \\ g(x) &= (f + h)(x) \end{aligned}$$

۴۶



۴۷ نمودار تابع روبرو بصورت سه ضابطه‌ای می‌باشد و پیش از بدست آوردن ضابطه‌ها هم می‌توان دامنه و برد تابع را از روی شکل بدست آورد.

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow D_f = \mathbb{R}, \quad y > -4 \rightarrow R_f = (-4, +\infty)$$



$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}, f_1(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} -2a + b = 2 \\ -5a + b = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2a + b = 2 \\ 5a - b = -4 \end{cases} +$$

$$3a = -2 \rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$-2\left(-\frac{2}{3}\right) + b = 2 \rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow f_1(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, f_2(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} -2a + b = -1 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2a - b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} +$$

$$3a = 3 \rightarrow a = 1, b = 1$$

$$\rightarrow f_2(x) = x + 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, f_3(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} a + b = -4 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -a - b = 4 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

$$2a = 4 \rightarrow a = 2, b = -6$$

$$\rightarrow f_3(x) = 2x - 6$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}, & x \leq -2 \\ x + 1, & -2 < x \leq 1 \\ 2x - 6, & 1 < x \end{cases}$$

$$f(1) = 5 \rightarrow (1, 5) \in f, (5, 1) \in f^{-1}$$

$$f^{-1}(9) = 3 \rightarrow (9, 3) \in f^{-1}, (3, 9) \in f$$

$$\xrightarrow{f} (1, 5), (3, 9) \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 5}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow y = ax + b$$

$$\rightarrow y = 2x + b \xrightarrow{(1, 5)} 5 = 2(1) + b \rightarrow b = 3 \rightarrow y = 2x + 3$$

$$\rightarrow f(x) = 2x + 3$$

$$\rightarrow y = 2x + 3 \rightarrow 2x = y - 3 \rightarrow x = \frac{y - 3}{2} \rightarrow x = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

$$f^{-1}(4) = a \rightarrow (4, a) \in f^{-1} \rightarrow (a, 4) \in f \rightarrow -a + \sqrt{-2a} = 4$$

$$\rightarrow \sqrt{-2a} = 4 + a \xrightarrow{\text{توان ۲}} -2a = 16 + 8a + a^2 \rightarrow a^2 + 10a + 16 = 0$$

۴۸

۴۹



$$\begin{aligned} \rightarrow (a+1)(a+2) = 0 & \begin{cases} \text{چک کردن} \\ a+2 = 0 \rightarrow a = -2 \rightarrow \sqrt{-2(-2)} = 2-2 \quad \checkmark \\ \text{چک کردن} \\ a+1 = 0 \rightarrow a = -1 \rightarrow \sqrt{-2(-1)} = 2-1 \quad \times \end{cases} \end{aligned}$$

۵۰

$$f(x) = \sqrt{x-1} \rightarrow x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$g(x) = x^2 - 4 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = ([1, +\infty) \cap \mathbb{R}) - \{x | x^2 - 4 = 0\}$$

$$\rightarrow D_{\frac{f}{g}} = [1, +\infty) - \{-2, 2\} \rightarrow \boxed{D_{\frac{f}{g}} = [1, 2) \cup (2, +\infty)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4} \rightarrow \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}}$$

$$g(5) = 5^2 - 4 \rightarrow g(5) = 21$$

$$f(5) = \sqrt{5-1} \rightarrow f(5) = 2$$

$$(g-3f)(5) = g(5) - 3f(5) = 21 - 3(2) \rightarrow \boxed{(g-3f)(5) = 15}$$

۵۱

$$f(x) = \sqrt{2-x} \rightarrow 2-x \geq 0 \rightarrow 2 \geq x \rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$g(x) = -3x + 3 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0 \rightarrow -3x + 3 = 0 \rightarrow 3 = 3x \rightarrow x = 1$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = ((-\infty, 2] \cap \mathbb{R}) - \{1\}$$

$$\rightarrow \boxed{D_{\frac{f}{g}} = (-\infty, 2] - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2]}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{2-x}}{-3x+3} \rightarrow \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{-3x+3}}$$

$$f(0) = \sqrt{2-0} = \sqrt{2}, \quad g(0) = -3(0) + 3 = 3$$

$$\rightarrow (2f-g)(0) = 2f(0) - g(0) = 2\sqrt{2} - 3 \rightarrow \boxed{(2f-g)(0) = 2\sqrt{2} - 3}$$

۵۲

$$f(x) = \frac{x+1}{x-4} \rightarrow x-4 \neq 0 \rightarrow x \neq 4 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow D_g = [2, +\infty)$$

$$\rightarrow D_f \cap D_g = [2, +\infty) - \{4\} \quad \text{و} \quad D_f \cap D_g = [2, 4) \cap (4, +\infty)$$



$$\text{الف) } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x+1}{x-2}}{\sqrt{x-2}} \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(x+1)}{(x-2)\sqrt{x-2}}$$

$$\left. \begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \\ g(x) &= 0 \rightarrow \sqrt{x-2} = 0 \rightarrow x = 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = ([2, 2) \cup (2, +\infty)) - \{2\}$$

$$\rightarrow \boxed{D_{\frac{f}{g}} = (2, 2) \cup (2, +\infty)}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x-2}}{\frac{x+1}{x-2}} \rightarrow \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{(\sqrt{x-2})(x-2)}{(x+1)}$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x+1}{x-2} = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = 0\}$$

$$\rightarrow D_{\frac{g}{f}} = ([2, 2) \cup (2, +\infty)) - \{-1\} \rightarrow \boxed{D_{\frac{g}{f}} = [2, 2) \cup (2, +\infty)}$$

$$\text{پ) } f(6) = \frac{6+1}{6-2} = \frac{7}{2}, \quad g(6) = \sqrt{6-2} = 2$$

$$\rightarrow (4f - 3g)(6) = 4f(6) - 3g(6) = 4\left(\frac{7}{2}\right) - 3(2) = 14 - 6$$

$$\rightarrow \boxed{(4f - 3g)(6) = 8}$$

۵۳

$$(0, 2), (2, 0) \in f \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - 2} = -2$$

$$\rightarrow y = -2x + b \xrightarrow{(0, 2)} 2 = -2(0) + b \rightarrow b = 2 \rightarrow \boxed{f(x) = -2x + 2}$$

$$(0, -1), (3, 0) \in g \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-1)}{3 - 0} = \frac{1}{3} \rightarrow y = \frac{1}{3}x + b \xrightarrow{(0, -1)} -1 = \frac{1}{3}(0) + b$$

$$\rightarrow b = -1 \rightarrow \boxed{g(x) = \frac{x}{3} - 1}$$

$$\text{الف) } f(x) = -2x + 2 \rightarrow D_f = \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x}{3} - 1 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -2x + 2 + \frac{x}{3} - 1 \rightarrow \boxed{(f + g)(x) = \frac{-5x}{3} + 1}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \rightarrow \boxed{D_{f+g} = \mathbb{R}}$$

$$\text{ب) } f(6) = -2(6) + 2 \rightarrow f(6) = -10, \quad g(6) = \frac{6}{3} - 1 \rightarrow g(6) = 1$$

$$\rightarrow (3g - f)(6) = 3g(6) - f(6) = 3(1) - (-10) \rightarrow \boxed{(3g - f)(6) = 13}$$



$$y = x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4 \rightarrow y = (x + 2)^2 - 4$$

ابتدا نمودار سهمی $y = (x + 2)^2 - 4$ را ۳ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم و داریم:

$$y = (x + 2 - 3)^2 - 4 \rightarrow y = (x - 1)^2 - 4$$

آنگاه نمودار جدید را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم و داریم:

$$y = (x - 1)^2 - 4 - 1 \rightarrow \boxed{y = (x - 1)^2 - 5} \quad \text{یا} \quad \boxed{y = x^2 - 2x - 4}$$

الف

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad \begin{matrix} D_f = \mathbb{R} \\ D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{matrix} \rightarrow D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = |x| + \frac{1}{x}, \quad D_{f+g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = |x| - \frac{1}{x}, \quad D_{f-g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = |x| \times \frac{1}{x} = \frac{|x|}{x}, \quad D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{|x|}{\frac{1}{x}} = x|x|, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{0\} - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

ب

$$f(x) = x^2 - 4 \rightarrow D_f = \mathbb{R} \rightarrow D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = x + 2 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 4 + x + 2 \rightarrow (f + g)(x) = x^2 + x - 2, \quad D_{f+g} = \mathbb{R}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4 - (x + 2) \rightarrow (f - g)(x) = x^2 - x - 6, \quad D_{f-g} = \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 4)(x + 2) \rightarrow (f \cdot g)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8, \quad D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 4}{x + 2} \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

پ

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow D_f = [0, +\infty) \rightarrow D_f \cap D_g = [0, +\infty)$$

$$g(x) = -\sqrt{x} \rightarrow D_g = [0, +\infty)$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + (-\sqrt{x}) = 0 \rightarrow (f + g)(x) = 0, \quad D_{f+g} = [0, +\infty)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} \rightarrow (f - g)(x) = 2\sqrt{x}, \quad D_{f-g} = [0, +\infty)$$

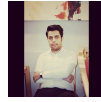
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x} \times (-\sqrt{x}) = -x \rightarrow (f \cdot g)(x) = -x, \quad D_{f \cdot g} = [0, +\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = -1 \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = -1, \quad D_{\frac{f}{g}} = (0, +\infty)$$

ت

$$f(x) = \frac{x-2}{x+5} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-5\} \rightarrow D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 10 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$



$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-2}{x+5} + x^2 + 3x - 1 \circ \quad , \quad D_{f+g} = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x-2}{x+5} - (x^2 + 3x - 1 \circ) \quad , \quad D_{f-g} = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x-2}{x+5} (x^2 + 3x - 1 \circ) \quad , \quad D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x-2}{x+5}}{x^2 + 3x - 1 \circ} \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-5\} - \{x | g(x) = 0\}$$

$$\rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-5\} - \{2, -5\} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{2, -5\}$$

ث

$$g = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0)\} \rightarrow D_g = \{-1, 0, 2, 3\} \rightarrow D_f \cap D_g = \{0, 2, 3\}$$

$$f = \{(2, 5), (3, 4), (0, -2)\} \rightarrow D_f = \{2, 3, 0\}$$

$$f+g = \{(0, -2+3), (2, 5+4), (3, 4+0)\} \rightarrow f+g = \{(0, 1), (2, 9), (3, 4)\}$$

$$f-g = \{(0, -2-3), (2, 5-4), (3, 4-0)\} \rightarrow f-g = \{(0, -5), (2, 1), (3, 4)\}$$

$$f \cdot g = \{(0, -2 \times 3), (2, 5 \times 4), (3, 4 \times 0)\} \rightarrow f \cdot g = \{(0, -6), (2, 20), (3, 0)\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(0, \frac{-2}{3}\right), \left(2, \frac{5}{4}\right), \left(3, \frac{4}{0}\right) \right\} \rightarrow \frac{f}{g} = \left\{ \left(0, -\frac{2}{3}\right), \left(2, \frac{5}{4}\right) \right\}$$



فصل دوم : تابع

۱ دو تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = x+2$ مفروض اند. مطلوبست D_{fog} .

۲ اگر $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ و $g(x) = \frac{1}{x+2}$ باشند، دامنه تابع gof را تعیین کنید.

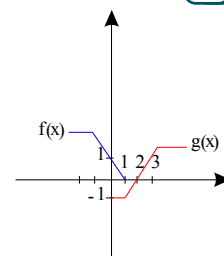
۳ اگر $f = \{(1, 4), (3, 0), (-2, 1), (4, -4)\}$ باشد و $g(x) = \sqrt{x}$ توابع gof و $3f - g$ را با زوج های مرتبشان نشان دهید.

۴ دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ مفروضند، در صورت وجود D_{fog} و ضابطه ی gof را معین کنید.

۵ با استفاده از نمودار توابع f, g در شکل روبرو عبارات داده شده را محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(1)$

ب) $(fog)(2)$



۶) توابع با ضابطه های $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \frac{x+5}{x-4}$ مفروض اند.

الف) دامنه ی تابع $g \circ f$ را بدون استفاده از ضابطه ی آن بیابید.

ب) حاصل $(g \circ g)(3)$ را بیابید.

۷) اگر $f = \{(0, 1), (1, 2), (3, 4)\}$ و $g = \{(-2, 1), (0, 0), (1, 5), (3, 3)\}$ دو تابع باشند:

الف) $(f + g)(1)$ را به دست آورید.

ب) تابع $\frac{f}{g}$ را به صورت زوج های مرتب مشخص کنید.

ج) دامنه ی تابع $f \circ g$ را تعیین کنید.

۸) اگر $f = \{(3, 4), (7, 8), (5, 2)\}$ و $g = \{(1, 3), (-2, 7), (5, 9)\}$ باشد، آنگاه $f \circ g$ و $f + g$ را حساب کنید.

۹) اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g(x) = \frac{x}{x-2}$ باشد مطلوبست:

الف) محاسبه دامنه توابع f و g و $f \circ g$.

ب) ضابطه تابع $f \circ g$ در صورت وجود.

۱۰) دو تابع حقیقی f ، g با ضابطه های $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ تعریف شده اند، دامنه $f \circ g$ و ضابطه $g \circ f$ را در

صورت وجود بنویسید.

۱۱) اگر $g(x) = \frac{1}{x-3}$ ، $f(x) = 3x - 2$ باشد آن گاه حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $(3f + 2g)(4)$

ب) $D_{f \circ g}$

۱۲) اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ ، $g = \{(0,4), (3,2), (5,6)\}$ باشد: الف) تابع $f \circ g$ را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید. ب) دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

۱۳) توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 - 1$ مفروضند. الف) دامنه $g \circ f$ را مشخص کنید. ب) مقدار $\left(\frac{2f-g}{f}\right)_{(1)}$ را محاسبه کنید.

۱۴) اگر $f(x) = 4x$ و $g(x) = 2 - x$ ، توابع $f - g$ ، $\frac{f}{g}$ و $f \circ g$ را به همراه دامنه‌ی آن‌ها به دست آورید.

۱۵) برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ تابع $f \circ g$ و دامنه آن را به دست آورید.

۱۶) کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آنگاه $(f \circ g)(4) = 35$.

ب) اگر $f(x) = x + 4$ و $g(x) = 3x$ آنگاه $\left(\frac{f}{g}\right)(2) = 1$.

پ) اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آنگاه $(f \circ g)(5) = g(2)$.

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $f \circ g = g \circ f$.

ث) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آنگاه $(f \circ g)(5) = -25$ و $(f \circ g)(x) = -x^2$.

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg = gf$.

۱۷ فرض کنیم $\begin{cases} g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ g(n) = 2n \end{cases}$ به این صورت تعریف شود: $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ که در آن: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، توابع $g \circ f$ و $f + g$ را به دست آورید.

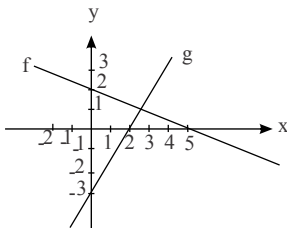
۱۸ اگر $f = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{2}, 0), (3, -5)\}$ و $g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6)\}$ توابع $f - g$ ، $f + g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

۱۹ اگر $f(x) = x^2 - 9$ و $g(x) = x + 3$ ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنه آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

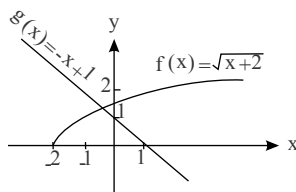
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3, D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$$

۲۰ اگر $f(x) = 2x + 5$ ، $f^{-1}(x)$ ، $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را به دست آورید.

۲۱ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f + g$ ، $f - g$ و $f \cdot g$ را محاسبه کنید.



۲۲ با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارتهای داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



الف) $(f + g)(2)$ ب) $(f + g)(-3)$ پ) $(fg)(\frac{1}{2})$ ت) $(fog)(-4)$
 ج) $(gof)(-1)$ ث) $\frac{f}{g}(0)$

۲۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزه خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید:

یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هریک از چاپ‌های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است. کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هریک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به چاپ رسیده است.
الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هریک از این دو کتاب را بر حسب شماره چاپ نمایش دهد.
ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شده هر دو کتاب را نمایش دهد.
ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

۲۴ تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ مفروض است.

الف) دامنه تابع $f \circ f$ را بدون تشکیل ضابطه آن بیابید.
ب) ضابطه تابع $f \circ f$ را بیابید.

۲۵ جدول زیر را در نظر بگیرید

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	۳	۱	۴	۲	۲	۵
$g(x)$	۶	۳	۲	۱	۲	۳

مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $f(g(1))$ ب) $g(f(1))$ ج) $f(f(1))$
د) $g(g(1))$ ه) $(g \circ f)(3)$ و) $(f \circ g)(6)$

۲۶ اگر $g(x) = \sqrt{4-x^2}$, $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

۲۷ دو تابع $f(x) = x-1$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$ مفروضند؛

الف) دامنه تابع $g \circ f$ را بدون محاسبه ضابطه $(g \circ f)(x)$ به دست آورید.
ب) مقدار $(g \circ f)(8)$ را بیابید.

۲۸ اگر $f = \left\{ (0, 2), (1, -1), (3, -\frac{1}{4}), (-2, 3), (-1, 0) \right\}$ و $g = \left\{ (2, \sqrt{2}), (-1, 2), (\frac{1}{4}, 3), (1, \frac{3}{2}) \right\}$ باشند.

الف) تابع $2f - g$ را به صورت زوج مرتبی بنویسید.

ب) تابع $g \circ f$ را بیابید.

ج) مقدار $(\frac{f-3}{g})(1)$ را حساب کنید.

۲۹ توابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ مفروضند.

الف) $3(f-g)(4)$ را بیابید.

ب) دامنه تابع $f \circ g$ را بیابید.

۳۰ توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ مفروض هستند. اولاً دامنه‌ی توابع $g \circ f, g, f$ را تعیین کنید سپس ضابطه‌ی $g \circ f$ را بنویسید.

۱

$$D_f : 1 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow |x| \leq 1 \rightarrow D_f = [-1, 1]$$

$$D_f = [-1, 1], D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \in [-1, 1]\} \\ -1 \leq x + 2 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x \leq -1 \Rightarrow D_{f \circ g} = [-3, -1]$$

۲

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$g(x) = \frac{1}{x+2} \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{1}{x} - 1 \in \mathbb{R} - \{-2\}\right\}$$

$$\rightarrow \frac{1}{x} - 1 \neq -2 \rightarrow \frac{1}{x} \neq -1 \rightarrow x \neq -1$$

$$\rightarrow D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$$

۳

$$D_g = [0, +\infty), D_f = \{1, 3, -2, 4\}$$

$$D_{f \circ g} = D_f \cap D_g = \{1, 3, 4\} \Rightarrow 3f - g = \{(1, 11), (4, -14), (3, -\sqrt{3})\}$$

$$g \circ f = \{(1, 2), (3, 0), (-2, 1)\}$$

۴

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}, D_g = [1, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 1 \mid \sqrt{x-1} \neq 2\} = [1, 5) \cup (5, +\infty)$$

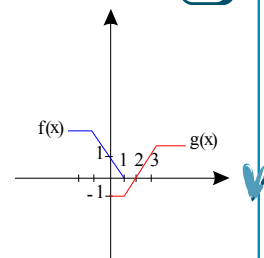
$$\sqrt{x-1} \neq 2 \Rightarrow x-1 \neq 4 \Rightarrow x \neq 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} - 1$$

۵

$$\text{الف) } (f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + (-1) = -1$$

$$\text{ب) } (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(0) = 1$$



۶ الف

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid \frac{x+1}{x-2} \neq 4\right\}$$

$$\rightarrow \frac{x+1}{x-2} \neq 4 \rightarrow x+1 \neq 4x-8 \rightarrow 3x \neq 9 \rightarrow x \neq 3$$

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

ب

$$(g \circ g)(3) = g(g(3)) = g(-8) = \frac{1}{4}$$

۷ الف

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 5 = 7$$

ب

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(1, \frac{2}{5}\right), \left(3, \frac{4}{3}\right) \right\}$$

ج

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x = -2, 0, 1, 3 \mid g(x) = 0, 1, 3\} = \{-2, 0, 3\}$$

۸

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 4$$

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(7) = 8 \Rightarrow f \circ g = \{(1, 4), (-2, 8)\}$$

$$(f+g)(5) = f(5) + g(5) = 2 + 9 = 11 \Rightarrow f+g = \{(5, 11)\}$$

توجه: چهار عمل اصلی فقط در دامنه‌ی مشترک انجام می‌شود مثلاً $f+g$ فقط در $x=5$ انجام می‌شود چون $x=5$ دامنه‌ی مشترک هر دو تابع f, g است.

۹

$$\text{الف) } D_f : x - 3 \geq \Rightarrow x \geq 3$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \neq 2 \mid \frac{x}{x-2} \geq 3\right\} = (2, 3]$$

$$\rightarrow \frac{x}{x-2} \geq 3 \Rightarrow \frac{x}{x-2} - 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{-2x+6}{x-2} \geq 0 \Rightarrow$$

	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$-2x+6$		$+$	$+$	$-$
$x-2$		$-$	$+$	$+$
$p(x)$		$-$	$+$	$-$

$2 < x \leq 3 \rightarrow D_{fog} = (2, 3]$

ب) $fog(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}} - 3$

$D_f : x > 2 \quad D_g : \mathbb{R} - \{1\}$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \neq 1 \mid \frac{1}{x-1} > 2\right\}$$

$$\rightarrow \frac{1}{x-1} > 2 \rightarrow \frac{1}{x-1} - 2 > 0 \rightarrow \frac{-2x+3}{x-1} > 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}, x = 1$$

	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-2x+3$		$+$	$+$	$-$
$x-1$		$-$	$+$	$+$
$p(x)$		$-$	$+$	$-$

$1 < x < \frac{3}{2} \rightarrow D_{fog} = (1, \frac{3}{2})$

$$(gof)(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x-2}} - 1}$$

الف) $(3f + 2g)(4) = 3f(4) + 2g(4) = 3 \times 10 + 2 \times 1 = 32$

ب) $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 3 \mid g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} - \{3\}$

الف) $fog(0) = f(g(0)) = f(4) = \sqrt{4-3} = 1$

$fog(3) = f(g(3)) = f(2) =$ تعریف نشده

$fog(5) = f(g(5)) = f(6) = \sqrt{6-3} = \sqrt{3}$

$fog = \{(0, 1), (5, \sqrt{3})\}$

ب) $D_f = [3, +\infty), D_g = \{0, 3, 5\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{3, 5\}$

$g(x) = 0 \Rightarrow$ ریشه ندارد $\Rightarrow D_f = D_f \cap D_g - \{x \mid g = 0\} = \{3, 5\}$

۱۳
(الف)

$$D_f = [0, +\infty) \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [0, +\infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$$

$$\left(\frac{2f - g}{f}\right)_{(1)} = \frac{2f(1) - g(1)}{f(1)} = \frac{2 \times 1 - 0}{1} = 2 \quad \text{(ب)}$$

۱۴

$$f(x) = 3x, D_f = \mathbb{R}, g(x) = 2 - x, D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R}, g(x) = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x}{2 - x}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}, (f - g)(x) = f(x) - g(x) = 3x - (2 - x) = 4x - 2$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (2 - x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2 - x) = 3(2 - x) = 6 - 3x$$

۱۵

$$f(x) = \frac{1}{x - 3}, x \neq 3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$g(x) = \frac{4}{x}, x \neq 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid g(x) \neq 3\}$$

$$g(x) \neq 3 \Rightarrow \frac{4}{x} \neq 3 \Rightarrow x \neq \frac{4}{3} \Rightarrow D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{1}{\frac{4}{x} - 3} = \frac{1}{\frac{4 - 3x}{x}} = \frac{x}{4 - 3x}$$

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(1) = 5 \quad \text{(الف نادرست: ۱۶)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2 + 4}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{(ب درست)}$$

$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(1 \cdot 5 - 1) = f(4) = \sqrt{4} = 2 = g(2) \quad \text{(پ درست)}$$

ت) نادرست: ترکیب توابع خاصیت جابجایی ندارد یعنی: $f \circ g \neq g \circ f$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 4}) = (\sqrt{x^2 - 4})^2 - 4 = x^2 - 8 \quad \text{ث) نادرست}$$

$$D_{f \cdot g} = D_{g \cdot f} = D_f \cap D_g, (f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (g \cdot f)(x) \quad \text{ج) درست}$$

۱۷

$$D_g = \mathbb{N}, D_f = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 2 = 4, (f + g)(2) = f(2) + g(2) = 3 + 4 = 7$$

$$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 5 + 6 = 11, (f + g)(4) = f(4) + g(4) = 7 + 8 = 15$$

$$f + g = \{(1, 4), (2, 7), (3, 11), (4, 15)\}$$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 2 \times 2 = 4, (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 6$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 10, (g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(7) = 14$$

$$g \circ f = \{(1, 4), (2, 6), (3, 10), (4, 14)\}$$

۱۸

$$f = \left\{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), \left(\frac{5}{2}, 0\right), (3, -5)\right\}, D_f = \left\{-4, -1, 0, \frac{5}{2}, 3\right\}$$

$$g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6)\}, D_g = \{-4, -2, 0, 3, 5, 9\}$$

$$D_f \cap D_g = \{-4, 0, 3\}$$

$$f + g = \{(-4, 13 + (-7)), (0, 5 + (-3)), (3, -5 + 0)\} = \{(-4, 6), (0, 2), (3, -5)\}$$

$$f - g = \{(-4, 13 - (-7)), (0, 5 - (-3)), (3, -5 - 0)\} = \{(-4, 20), (0, 8), (3, -5)\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{(-4, \frac{13}{-7}), (0, \frac{5}{-3}), \underbrace{(3, \frac{-5}{0})}_{\text{تعریف نشده}}\right\} = \left\{(-4, -\frac{13}{7}), (0, -\frac{5}{3})\right\}$$

۱۹) زمانی می‌توان یک عبارت را از صورت و مخرج کسر ساده کرد که آن عبارت مخالف صفر باشد، یعنی در این سوال

زمانی می‌توان $x + 3$ را از صورت و مخرج کسر ساده کرد که $x + 3 \neq 0$ پس: $x \neq -3$ یعنی:

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-3\}$$

۲۰

$$f(x) = 2x + 5 \Rightarrow y = 2x + 5 \Rightarrow 2x = y - 5 \Rightarrow x = \frac{y - 5}{2} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x - 5}{2}\right) = 2\left(\frac{x - 5}{2}\right) + 5 = x - 5 + 5 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 5) = \frac{2x + 5 - 5}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

(۲۱) تابع f تابع خطی است که از نقاط $(0, 2)$ و $(5, 0)$ می‌گذرد پس داریم:

$$m = \frac{2 - 0}{0 - 5} = -\frac{2}{5} \Rightarrow y - 2 = -\frac{2}{5}(x - 0) \Rightarrow y = f(x) = -\frac{2}{5}x + 2, D_f = \mathbb{R}$$

تابع g تابع خطی است که از نقاط $(0, -3)$ و $(2, 0)$ می‌گذرد، پس داریم:

$$m = \frac{-3 - 0}{0 - 2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y - (-3) = \frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow y = g(x) = \frac{3}{2}x - 3, D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f+g} = \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x) = -\frac{2}{5}x + 2 + \frac{3}{2}x - 3$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = \frac{11}{10}x - 1$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = -\frac{2}{5}x + 2 - \frac{3}{2}x + 3 = -\frac{19}{10}x + 5, D_{f-g} = \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(-\frac{2}{5}x + 2\right)\left(\frac{3}{2}x - 3\right) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{5}x + 3x - 6$$

$$(f \cdot g)(x) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{21}{5}x - 6, D_{fg} = \mathbb{R}$$

(۲۲)

$$f(x) = \sqrt{x+2}, D_f = [-2, +\infty)$$

$$g(x) = -x + 1, D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f \cap D_g = [-2, +\infty) \Rightarrow D_{f+g} = [-2, +\infty)$$

$$\text{الف) } (f+g)(2) = f(2) + g(2) = \sqrt{4} + (-2+1) = 2 + (-1) = 1$$

$$\text{ب) } -3 \notin [-2, +\infty) \Rightarrow (f+g)(-3) = \text{تعریف نشده}$$

$$\text{پ) } (fg)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}+2} \times \left(-\frac{1}{2}+1\right) = \sqrt{\frac{5}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{ت) } (f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = f(5) = \sqrt{5+2} = \sqrt{7}$$

$$\text{ث) } \left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\text{ج) } (g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(\sqrt{-1+2}) = g(1) = -1+1 = 0$$

۲۳ الف) تابع‌های تعداد نسخه‌های این دو کتاب را با f و g نمایش می‌دهیم.

$$f(x) = 10 + (x - 1) \times 7 = 7x + 3, g(x) = 20 + (x - 1) \times 9 = 9x + 11$$

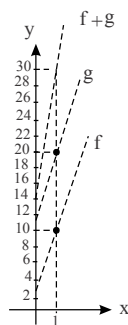
$$D_f = D_g = \mathbb{N}$$

(ب)

$$D_f \cap D_g = \mathbb{N} \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) = 7x + 3 + 9x + 11 = 16x + 14$$

(ت)

$$f(x) = 7x + 3, g(x) = 9x + 11, (f + g)(x) = 16x + 14$$



۲۴ الف)

$$D_f : x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \geq 1 \mid f(x) \geq 1\}$$

$$f(x) \geq 1 \rightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \rightarrow x-1 \geq 1 \rightarrow x \geq 2$$

$$\rightarrow D_{f \circ f} = \{x \geq 1 \mid x \geq 2\} = [2, +\infty)$$

(ب)

$$f \circ f(x) = f(\sqrt{x-1}) = \sqrt{\sqrt{x-1}-1}$$

$$g(f(1)) = g(3) = 2 \quad (\text{ب})$$

$$g(g(1)) = g(6) = 3 \quad (\text{د})$$

$$(f \circ g)(6) = f(g(6)) = f(3) = 4 \quad (\text{و})$$

$$f(g(1)) = f(6) = 5 \quad (\text{الف } ۲۵)$$

$$f(f(1)) = f(3) = 4 \quad (\text{ج})$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4) = 1 \quad (\text{ه})$$

۲۶

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5} \Rightarrow x^2 + 5 \geq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_g = [-2, 2]$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-2, 2] \mid \sqrt{4 - x^2} \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 + 5} \in [-2, 2]\} \Rightarrow -2 \leq \sqrt{x^2 + 5} \leq 2$$

$$-7 \leq x^2 \leq -3 \Rightarrow \text{غیرممکن} \Rightarrow D_{g \circ f} = \emptyset \quad \text{وجود ندارد} \quad g \circ f$$

$$f \circ g(x) = f(\sqrt{4 - x^2}) = \sqrt{4 - x^2 + 5} = \sqrt{9 - x^2}$$

الف) $f(x) = x - 1$, $D_f = \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$, $D_g = [-2, +\infty)$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq -2\}$$

$$f(x) \geq -2 \rightarrow x - 1 \geq -2 \rightarrow x \geq -1 \rightarrow D_{g \circ f} = [-1, +\infty)$$

ب) $(g \circ f)(\lambda) = g(f(\lambda)) = g(\lambda - 1) = g(7) = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$

الف) $f = \left\{ (0, 2), (1, -1), (3, -\frac{1}{4}), (-2, 3), (-1, 0) \right\}$

$$D_f = \{0, 1, 3, -2, -1\}$$

$$g = \left\{ (2, \sqrt{2}), (-1, 2), (\frac{1}{4}, 3), (1, \frac{3}{2}) \right\}$$

$$D_g = \left\{ 2, -1, \frac{1}{4}, 1 \right\}$$

$$D_f \cap D_g = \{1, -1\}$$

$$2f - g = \left\{ (1, 2(-1) - \frac{3}{2}), (-1, 2 \times 0 - 2) \right\} = \left\{ (1, -\frac{7}{2}), (-1, -2) \right\}$$

ب) $0 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} \sqrt{2}$, $1 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 2$, $3 \xrightarrow{f} -\frac{1}{4} \xrightarrow{g}$ تعریف نشده

$-2 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g}$ تعریف نشده $-1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g}$ تعریف نشده

$$g \circ f = \left\{ (0, \sqrt{2}), (1, 2) \right\}$$

ج) $\left(\frac{f-3}{g}\right)(1) = \frac{f(1)-3}{g(1)} = \frac{-1-3}{\frac{3}{2}} = -\frac{8}{3}$

الف) $3(f-g)(4) = 3f(4) - 3g(4) = 3 \times \frac{1}{3} - 3 \times 1 = 1 - 3 = -2$

ب) $D_f : x \neq 1$, $D_g : x \geq 3$, $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \geq 3 \mid g(x) \neq 1\} \rightarrow \sqrt{x-3} \neq 1 \rightarrow x \neq 4$$

$$\Rightarrow D_{fog} = [\sqrt{3}, +\infty) - \{\sqrt{3}\}$$

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{3} - x^2} \quad D_f = ? \quad D_g = ?$$

$$g(x) = \frac{x + \sqrt{2}}{x - 1} \quad D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\sqrt{3} - x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \geq -\sqrt{3} \Rightarrow x^2 \leq \sqrt{3} \Rightarrow |x| \leq \sqrt{\sqrt{3}} \Rightarrow -\sqrt{\sqrt{3}} \leq x \leq \sqrt{\sqrt{3}} = D_f$$

$$D_{gof} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{-\sqrt{\sqrt{3}} \leq x \leq \sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{3} - x^2} \neq 1\}$$

$$\sqrt{3} - x^2 \neq 1 \rightarrow -x^2 \neq -\sqrt{3} \rightarrow x \neq \pm \sqrt{\sqrt{3}} \quad D_{gof} = [-\sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{3}}] - \{\pm \sqrt{\sqrt{3}}\}$$

$$g(f(x)) = \frac{\sqrt{\sqrt{3} - x^2} + \sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3} - x^2} - 1}$$