

نوید پورزکی

فصل دوم : هندسه

- ۱) دایره‌ای وجود دارد که از سه نقطه‌ی زیر عبور می‌کند مرکز دایره و شعاع دایره را مشخص کنید.

A •
C •
- ۲) نقاطی از یک صفحه را پیدا کنید که از دو نقطه‌ی A و B در آن صفحه به یک فاصله بوده و از خط مفروض d در همان صفحه به فاصله‌ی معلوم a باشد. (در مورد تعداد جواب‌ها بحث شود).
- ۳) سه نقطه‌ی M ، N و P وسط اضلاع مثلث ABC می‌باشد نحوه‌ی رسم مثلث ABC را توضیح دهید.

M •
N •
P •
- ۴) دو خط d و d' متقاطعند نقاطی را بیابید که از نقطه‌ی O (محل تقاطع) به فاصله‌ی 5cm بوده و از دو خط به یک فاصله باشند.
- ۵) نقطه‌ی A به فاصله‌ی 2cm از خط d قرار دارد. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی 3cm باشد؟
- ۶) مثلثی رسم کنید که طول اضلاع آن ۴ و ۵ و ۷ باشد.
- ۷) دو دایره به مرکزهای O و O' یکدیگر را در نقاط A و B قطع کرده‌اند. ثابت کنید OO' عمود منصف پاره خط AB است.



۸) مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمودمنصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۹) مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۱۰) در هر مورد، مقدار عددی $\frac{a}{b}$ را به دست آورید.

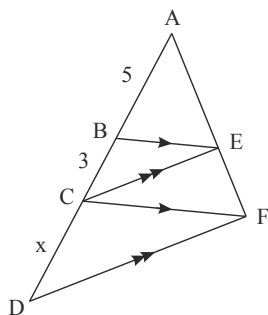
الف) $\frac{a}{10+a} = \frac{b}{8+b}$

ب) $\frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b}$

۱۱) اگر $\frac{4a+5}{5+6a} = \frac{4b+8}{8+6b}$ باشد نسبت $\frac{b}{a}$ را بدست آورید.

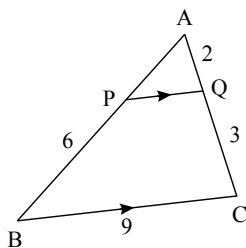
۱۲) اگر $\frac{5a+2b}{5a+4b} = \frac{2}{3}$ باشد نسبت $\frac{a}{b}$ را بدست آورید.

۱۳) در شکل زیر $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$ می‌باشد. مقدار x را بدست آورید.

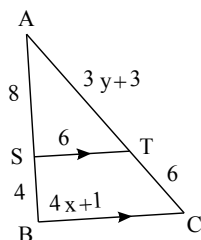




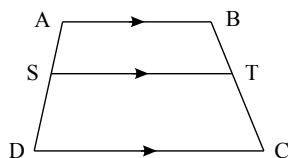
۱۴ در شکل مقابل $PQ \parallel BC$ است. طول پاره‌خط‌های AP و PQ را بدست آورید.



۱۵ در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقادیر x و y را بدست آورید.



۱۶ در دوزنقه مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است. ثابت کنید: $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$



۱۷ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.

(الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

(ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبرو موازی باشند، در این صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

(پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

(ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، ضلع متناظر به ارتفاع بزرگتر کوچک‌تر است از ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر

۱۸ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

(الف) هیچ عدد اول بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

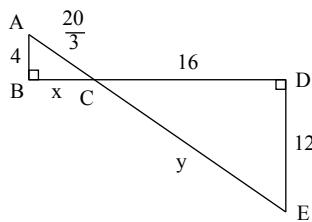
(ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

(پ) در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگتر است.

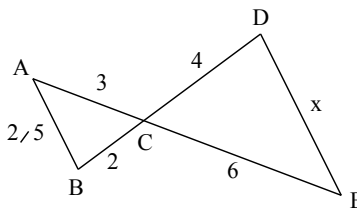
(ت) در هر مثلث میانه و عمود منصف متناظر به هر ضلع بر هم منطبق هستند.



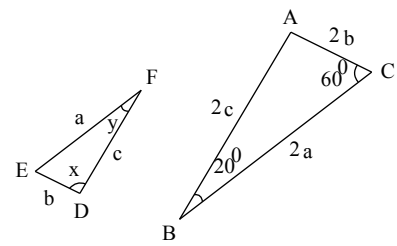
۱۹ در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را بدست آورید.



(پ)

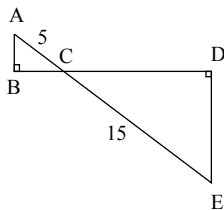


(ب)



(الف)

۲۰ در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آن‌ها را به دست آورید.



۲۱ دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید، به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$

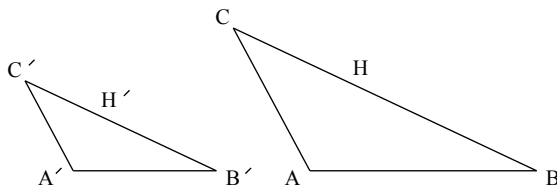
باشد. اکنون ارتفاع‌های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید.

(الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.

(ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را بدست آورید.

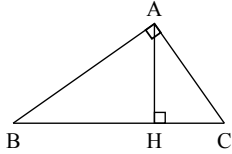
(پ) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$ را محاسبه کنید.

(ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را بدست آورید.

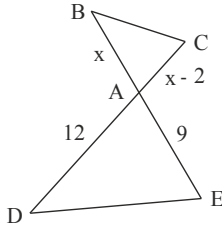




۲۲ در شکل مقابل مساحت مثلث قائم الزاویه ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت بدست آمده برای مساحت مثلث یک تناسب بدست آورید.

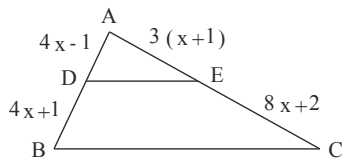


۲۳ در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند. نسبت مساحت‌های آن‌ها را بدست آورید.

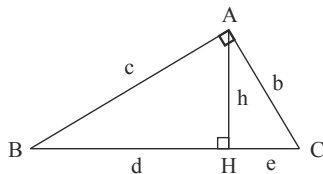


۲۴ اندازه‌ی محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۵ و ۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگتر ۲۵ واحد مربع باشد، مساحت مثلث کوچکتر را بدست آورید.

۲۵ نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{49}{121}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچکتر ۲۱ سانتی‌متر باشد، ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگ چند سانتی‌متر است؟



۲۶ در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است. مقدار x را بدست آورید.

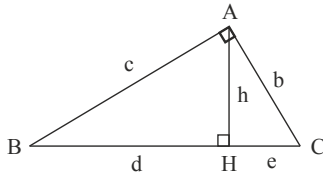


۲۷ در مثلث قائم الزاویه‌ی روبرو مقادیر خواسته شده را بدست آورید.
 $h = 5, d = 7, e = ?, c = ?$

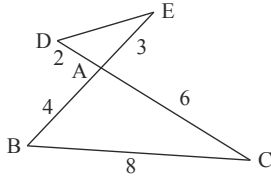


۲۸ در مثلث قائم الزاویه ی روبرو مقادیر خواسته شده را بدست آورید.

$$d = 5, e = 3, b = ?, c = ?$$

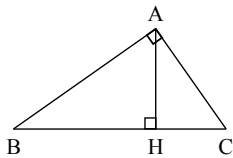


۲۹ در شکل روبرو طول پاره خط DE را بدست آورید.



۳۰ دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه اند اگر طول اضلاع مثلث ABC برابر ۵، ۶، ۹ و محیط مثلث $A'B'C'$ برابر ۵۰ باشد، طول اضلاع مثلث $A'B'C'$ را بدست آورید.

۳۱ در مثلث قائم الزاویه روبرو در هر حالت، اندازه پاره خط خواسته شده را بدست آورید.



الف $AC = ?$ ، $AB = ?$ ، $AH = ?$ ، $BH = 9$ ، $BC = 10$

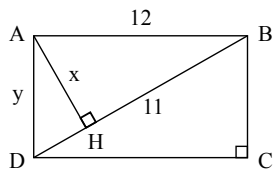
ب $AB = ?$ ، $AH = ?$ ، $BC = ?$ ، $CH = 2$ ، $AC = 5$

پ $CH = ?$ ، $BH = ?$ ، $AH = ?$ ، $BC = ?$ ، $AC = 6$ ، $AB = 8$

ت $AC = ?$ ، $BC = ?$ ، $BH = ?$ ، $AH = 6$ ، $AB = 12$



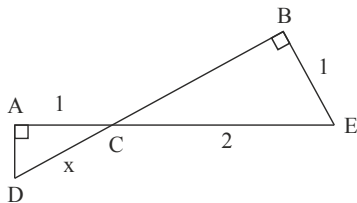
۳۲ در مستطیل مقابل مقادیر x و y را بدست آورید.



۳۳ با برهان خلف ثابت کنید نمی توان از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، دو خط عمود بر آن خط رسم کرد.

۳۴ طول اضلاع یک مثلث ۱۱، ۷ و ۵ سانتی متر و طول کوچک ترین ضلع مثلثی متشابه با مثلث اول ۲۰ سانتی متر است. محیط مثلث دوم را بدست آورید.

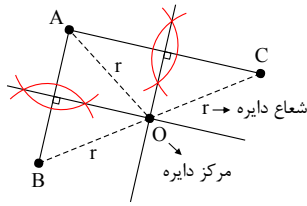
۳۵ در شکل زیر، دو زاویه ی A و B قائمه هستند. مقدار x را بدست آورید.





پاسخنامه تشریحی

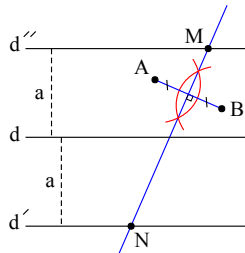
۱



فرض کنیم سه نقطه‌ی مقابل در یک صفحه در یک امتداد نباشند دایره‌ای وجود دارد که از این سه نقطه بگذرد.

عمود منصف‌های دو پاره خط دلخواه (AB و AC) را رسم می‌کنیم محل برخورد مرکز دایره مزبور بوده و شعاع دایره نیز فاصله‌ی این نقطه تا سه نقطه‌ی فوق است.

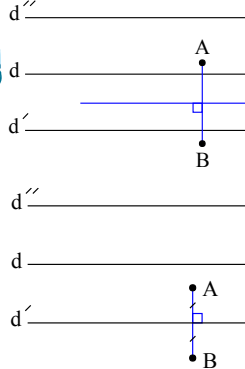
۲



ابتدا موازی خط d و به فاصله‌ی a در دو طرف آن دو خط موازی d' و d'' را رسم می‌کنیم. سپس عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم محل برخورد عمود منصف با دو خط d' و d'' جواب مسأله است. (نقاط A و B از نقاط M و N به یک فاصله‌اند و این نقاط از d به فاصله a هستند).

بحث درباره جواب‌ها:

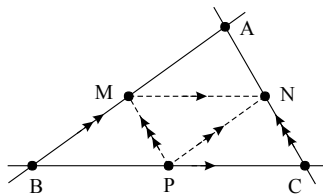
حالت اول: دو جواب شکل بالا. (N, M)



حالت دوم: جواب ندارد. عمود منصف AB خود با این سه خط موازی باشد. (راستای A و B بر d عمود باشد).

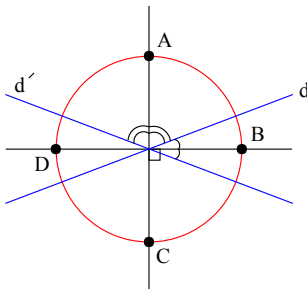
حالت سوم: بی شمار جواب دارد. عمود منصف A و B یکی از سه خط d یا d' یا d'' باشد.

۳



از هر سه نقطه‌ی M, N و P سه خط به موازات پاره خط مقابل خود رسم می‌کنیم محل برخورد این سه خط $\triangle ABC$ خواهد بود.

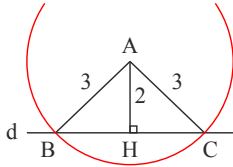
۴



ابتدا نیمساز هر دو زاویه‌ای که دو خط با هم می‌سازند را رسم می‌کنیم سپس به مرکز O و به شعاع 5 یک دایره رسم می‌کنیم محل برخورد دایره با دو نیمساز جواب مسأله است. نقاط A, B, C و D از دو خط به یک فاصله‌اند و از O به فاصله‌ی $5cm$ هستند.

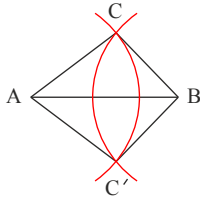


۵



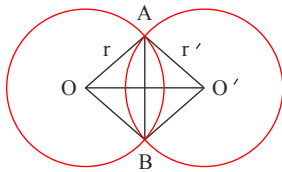
نقطه‌ای که به فاصله‌ی ۳ cm از نقطه‌ی A قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۳ cm قرار دارند و چون شعاع این دایره بیشتر از ۲ cm (فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط d $AH = d$) است، پس دایره خط d را در دو نقطه قطع می‌کند و نقاط C, B جواب مسئله هستند.

۶



ابتدا ضلع AB را به طول ۷ واحد رسم می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع ۵ واحد یک کمان رسم می‌کنیم و سپس به مرکز B و به شعاع ۴ واحد هم کمانی دیگر رسم می‌کنیم تا دو کمان یکدیگر را در نقطه‌ی C و C' قطع کنند. دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ABC'$ جواب مسئله است زیرا در $\triangle ABC$ داریم: $AB = 7, AC = 5, BC = 4$ و در $\triangle ABC'$ داریم: $AB = 7, AC' = 5, BC' = 4$.

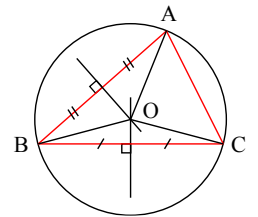
۷



نقطه‌ی O روی عمودمنصف AB است $\rightarrow OA = OB = r$
نقطه‌ی O' روی عمودمنصف AB است $\rightarrow O'A = O'B = r'$
چون نقطه‌ی O و O' هر دو روی عمودمنصف AB قرار دارند پس OO' عمودمنصف AB است.

۸

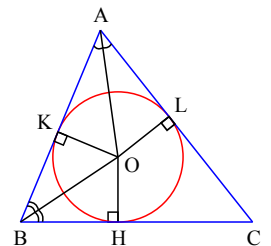
عمودمنصف‌های AB و BC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند.
 $\left. \begin{array}{l} \text{نقطه } O \text{ روی عمودمنصف } AB \rightarrow OA = OB \\ \text{نقطه } O \text{ روی عمودمنصف } BC \rightarrow OB = OC \end{array} \right\} \rightarrow OA = OB = OC$



پس نقاط A و B و C روی محیط دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA قرار دارند.
یعنی محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع یک مثلث مرکز دایره‌ی محیطی مثلث است.

۹

$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} \text{ نیمساز} = AO \rightarrow OL = OK \\ \widehat{B} \text{ نیمساز} = BO \rightarrow OK = OH \end{array} \right\} \rightarrow OL = OK = OH$



دایره به مرکز O و شعاع OH بر هر سه ضلع مثلث مماس است.

۱۰

$$a(8 + b) = b(10 + a) \rightarrow 8a + ab = 10b + ab \rightarrow 8a = 10b \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{8} \rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{5}{4}}$$



$$ب) (3a + 10)(7 + 2b) = (3b + 7)(10 + 2a)$$

$$\rightarrow 21a + \cancel{6ab} + \cancel{70} + 20b = 30b + \cancel{6ab} + \cancel{70} + 14a$$

$$\rightarrow 21a - 14a = 30b - 20b \rightarrow 7a = 10b \rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{10}{7}}$$

۱۱

$$\frac{4a + 5}{5 + 6a} = \frac{4b + 8}{8 + 6b} \rightarrow (4a + 5)(8 + 6b) = (4b + 8)(5 + 6a)$$

$$\rightarrow 32a + \cancel{24ab} + \cancel{40} + 30b = 20b + \cancel{24ab} + \cancel{40} + 48a$$

$$\rightarrow 30b - 20b = 48a - 32a \rightarrow 10b = 16a \rightarrow 5b = 8a \rightarrow \boxed{\frac{b}{a} = \frac{8}{5}}$$

۱۲

$$\frac{5a + 2b}{5a + 4b} = \frac{2}{3} \rightarrow 3(5a + 2b) = 2(5a + 4b) \rightarrow 15a + 6b = 10a + 8b$$

$$\rightarrow 15a - 10a = 8b - 6b \rightarrow 5a = 2b \rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{2}{5}}$$

۱۳

$$BE \parallel CF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EF} = \frac{AB}{BC} \quad (1)$$

$$CE \parallel DF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EF} = \frac{AC}{DC} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{DC} \rightarrow \frac{5}{3} = \frac{8}{x} \rightarrow 5x = 24 \rightarrow \boxed{x = \frac{24}{5}}$$

۱۴

$$PQ \parallel BC \rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \rightarrow \frac{AP}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{AP = 4}$$

$$PQ \parallel BC \rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{PQ}{9} \rightarrow \boxed{PQ = \frac{18}{5}}$$

۱۵

$$ST \parallel BC \rightarrow \frac{AS}{SB} = \frac{AT}{TC} \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{3y + 3}{6}$$

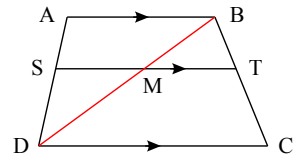
$$\rightarrow 3y + 3 = 12 \rightarrow 3y = 9 \rightarrow \boxed{y = 3}$$

$$ST \parallel BC \rightarrow \frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} = \frac{ST}{BC} \rightarrow \frac{8}{12} = \frac{12}{18} = \frac{6}{4x + 1} \rightarrow 4x + 1 = 9 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow \boxed{x = 2}$$



۱۶

اثبات: قطر BD را رسم می‌کنیم و داریم:



$$\begin{aligned} \triangle ABD : SM \parallel AB &\rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{BM}{MD} \quad (1) \\ \triangle BCD : MT \parallel DC &\rightarrow \frac{BM}{MD} = \frac{BT}{TC} \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1), (2) \rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$$

(۱۷) الف) اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند، آنگاه سه ضلع نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع روبرو موازی خواهند بود.

پ) اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی مکمل هم باشند، آنگاه رأس‌های چهارضلعی روی یک دایره قرار خواهند داشت.

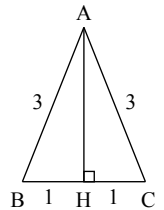
ت) در یک مثلث اگر دو ضلع نابرابر باشند، ارتفاع متناظر به ضلع بزرگتر کوچک‌تر است از ارتفاع متناظر به ضلع کوچک‌تر.

(۱۸) الف) عدد ۱۳۱ بزرگتر از ۱۲۷ و اول است پس حکم رد می‌شود.

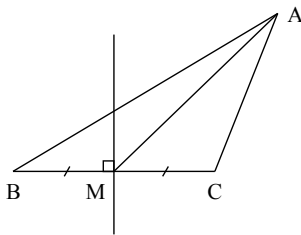
ب) اگر یک مربع دلخواه (مثلاً به طول ضلع ۶ متر) را انتخاب کنیم مساحت مربع ۳۶ متر مربع می‌شود. اگر قطرهای مربع را رسم کنیم، مربع به ۴ مثلث مساوی با مساحت هر کدام ۹ متر مربع تقسیم می‌شود و مشاهده می‌کنیم که مساحت مثلث از مساحت مربع کمتر است پس حکم رد می‌شود.

پ) اگر یک مثلث متساوی‌الساقین بطول ضلع‌های ۳ و ۳ و ۲ را در نظر بگیریم باتوجه به شکل و رابطه فیثاغورس طول ارتفاع وارد بر قاعده $\sqrt{8}$ می‌شود که این ارتفاع از قاعده بزرگتر است و حکم رد می‌شود.

$$\begin{aligned} AH^2 + BH^2 &= AB^2 \rightarrow AH^2 + 1 = 9 \rightarrow AH^2 = 8 \rightarrow AH = \sqrt{8} \\ &\rightarrow AH = 2\sqrt{2} \rightarrow AH > BC \end{aligned}$$



ت) مثلث مختلف‌الاضلاع $\triangle ABC$ را به طور دلخواه رسم می‌کنیم و میانه و عمود منصف ضلع BC را رسم می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که این دو بر هم منطبق نیستند پس حکم رد می‌شود.



۱۹

$$\text{الف) } \frac{AB}{DF} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{EF} = 2 \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF \rightarrow \begin{cases} \widehat{B} = \widehat{F} = 20^\circ \rightarrow \boxed{y = 20^\circ} \\ \widehat{C} = \widehat{E} = 60^\circ \\ \widehat{A} = \widehat{D} \rightarrow \boxed{x = 100^\circ} \end{cases}$$

$$\text{ب) } \left. \begin{aligned} \widehat{ACB} &= \widehat{DCE} \\ \frac{AC}{CE} &= \frac{BC}{CD} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE \rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{DE}$$



$$\rightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{2.5}{x} \rightarrow \boxed{x = 5}$$

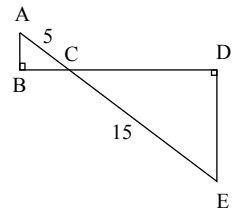
$$\text{پ)} \left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ \\ \widehat{ACB} = \widehat{DCE} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{CE}$$

$$\rightarrow \frac{4}{12} = \frac{x}{16} = \frac{\frac{20}{3}}{y} \rightarrow x = \frac{16 \times 4}{12} \rightarrow \boxed{x = \frac{16}{3}}$$

$$\rightarrow y = \frac{12 \times \frac{20}{3}}{4} \rightarrow \boxed{y = 20}$$

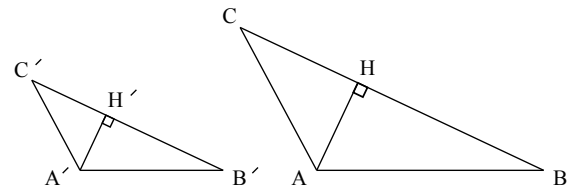
$$\triangle DEC \sim \triangle ABC \rightarrow k = \frac{CE}{AC} = \frac{15}{5} \rightarrow K = 3$$

$$\frac{P_{\triangle DEC}}{P_{\triangle ABC}} = K = 3, \quad \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = K^2 = 9$$



۲۰

$$\text{الف)} \left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{H} = \widehat{H'} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle A'B'H'$$



۲۱

$$\text{ب)} \triangle ABH \sim \triangle A'B'H' \rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AH}{A'H'} = K \rightarrow \boxed{\frac{AH}{A'H'} = K}$$

$$\text{پ)} \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AH}{\frac{1}{2} B'C' \cdot A'H'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AH}{A'H'} = K^2 \rightarrow \boxed{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = K^2}$$

$$\text{ت)} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K \rightarrow AB = A'B' \cdot K, \quad AC = A'C' \cdot K, \quad BC = B'C' \cdot K$$

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A'B'C'}} = \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = \frac{K(A'B' + A'C' + B'C')}{A'B' + A'C' + B'C'} \rightarrow \boxed{\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A'B'C'}} = K}$$



۲۲

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} BC \times AH \\ S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AB \times AC \end{aligned} \right\} \cancel{\frac{1}{2}} BC \times AH = \cancel{\frac{1}{2}} AB \times AC \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC}$$

۲۳

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \rightarrow \frac{x}{12} = \frac{x-2}{9}$$

$$\rightarrow 9x = 12x - 24 \rightarrow 24 = 3x \rightarrow \boxed{x = 8}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = k^2 = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 = \left(\frac{8}{12}\right)^2 \rightarrow \boxed{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{4}{9}}$$

۲۴

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A'B'C'}} = k \rightarrow \frac{15}{8} = k$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = k^2 \rightarrow \frac{25}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \rightarrow \frac{25}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{225}{64} \rightarrow \boxed{S_{\triangle A'B'C'} = \frac{64}{9}}$$

۲۵

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = k^2 \rightarrow \frac{49}{121} = k^2 \rightarrow \boxed{k = \frac{7}{11}}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = k \rightarrow \frac{21}{A'B'} = \frac{7}{11} \rightarrow \boxed{A'B' = 33 \text{ cm}}$$

۲۶

$$DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{4x-1}{4x+1} = \frac{3x+3}{8x+2}$$

$$\rightarrow (4x-1)(8x+2) = (3x+3)(4x+1)$$

$$\rightarrow 32x^2 + 8x - 4x - 2 = 12x^2 + 3x + 12x + 3 \rightarrow 20x^2 - 15x - 5 = 0$$

$$\rightarrow 5(4x^2 - 3x - 1) = 0 \rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow (x-1)(4x+1) = 0$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow x-1=0 \rightarrow \boxed{x=1} \\ &\rightarrow 4x+1=0 \rightarrow x = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

غیر قابل قبول زیرا $AD < 0$ و $DB = 0$ می شود.

۲۷

$$AH^2 = BH \cdot CH \rightarrow h^2 = d \cdot e \rightarrow (5)^2 = 7e \rightarrow \boxed{e = \frac{25}{7}}$$



$$AB^r = BC \cdot BH \rightarrow c^r = (d + e) \cdot d \rightarrow c^r = \left(\sqrt{7} + \frac{25}{\sqrt{7}}\right) \times \sqrt{7} \rightarrow c^r = 49 + 25$$

$$\rightarrow c^r = 74 \rightarrow \boxed{c = \sqrt{74}}$$

۲۸

$$AB^r = BC \cdot BH \rightarrow c^r = (d + e)d \rightarrow c^r = (5 + 3) \times 5 \rightarrow c^r = 40 \rightarrow \boxed{c = 2\sqrt{10}}$$

$$AC^r = BC \cdot CH \rightarrow b^r = (d + e)e \rightarrow b^r = (5 + 3) \times 3 \rightarrow b^r = 24 \rightarrow \boxed{b = 2\sqrt{6}}$$

۲۹

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DAE} = \widehat{BAE} \\ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\rightarrow \frac{2}{4} = \frac{DE}{8} \rightarrow \boxed{DE = 4}$$

۳۰

$$P_{\triangle ABC} = 5 + 6 + 9 = 20 \rightarrow K = \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A'B'C'}} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K \rightarrow \frac{5}{A'B'} = \frac{6}{A'C'} = \frac{9}{B'C'} = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \boxed{A'B' = 12.5}, \boxed{A'C' = 15}, \boxed{B'C' = 22.5}$$

۳۱

الف

$$BC = BH + HC \rightarrow 10 = 9 + HC \rightarrow HC = 1$$

$$AH^r = BH \cdot CH \rightarrow AH^r = 9 \times 1 \rightarrow \boxed{AH = 3}$$

$$AB^r = BC \cdot BH \rightarrow AB^r = 10 \times 9 \rightarrow AB = \sqrt{90} \rightarrow \boxed{AB = 3\sqrt{10}}$$

$$AC^r = BC \cdot CH \rightarrow AC^r = 10 \times 1 \rightarrow \boxed{AC = \sqrt{10}}$$

ب

$$AC^r = BC \cdot CH \rightarrow 5^r = BC \times 2 \rightarrow \boxed{BC = 12.5}$$

$$BC = BH + CH \rightarrow 12.5 = BH + 2 \rightarrow \boxed{BH = 10.5}$$

$$AH^r = BH \cdot CH \rightarrow AH^r = 10.5 \times 2 \rightarrow AH^r = 21 \rightarrow \boxed{AH = \sqrt{21}}$$



$$AB^2 = BC \cdot BH \rightarrow AB^2 = 12,5 \times 10,5 \rightarrow AB^2 = 131,25$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{21 \times 6,25} \rightarrow \boxed{AB = 2,5\sqrt{21}}$$

یا

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \rightarrow AB \times 5 = 12,5 \times \sqrt{21} \rightarrow \boxed{AB = 2,5\sqrt{21}}$$

پ

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \rightarrow 8^2 + 6^2 = BC^2 \rightarrow BC^2 = 100 \rightarrow \boxed{BC = 10}$$

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \rightarrow 8 \times 6 = 10 \times AH \rightarrow \boxed{AH = 4,8}$$

$$AC^2 = BC \cdot CH \rightarrow 6^2 = 10 \times CH \rightarrow \boxed{CH = 3,6}$$

$$AB^2 = BC \cdot BH \rightarrow 8^2 = 10 \times BH \rightarrow \boxed{BH = 6,4}$$

ت

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \rightarrow 12^2 = 6^2 + BH^2 \rightarrow BH^2 = 144 - 36 \rightarrow BH^2 = 108$$

$$\rightarrow \boxed{BH = 6\sqrt{3}}$$

$$AB^2 = BC \cdot BH \rightarrow 12^2 = BC \times 6\sqrt{3} \rightarrow BC = \frac{144}{6\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{BC = 8\sqrt{3}}$$

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC \rightarrow 12 \times AC = 6 \times 8\sqrt{3} \rightarrow \boxed{AC = 4\sqrt{3}}$$

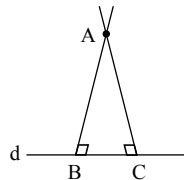
۳۲

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \rightarrow 12^2 = x^2 + 11^2 \rightarrow x^2 = 144 - 121$$

$$\rightarrow x^2 = 23 \rightarrow \boxed{x = \sqrt{23}}$$

$$\frac{\Delta ADH}{\Delta ABH} \rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{AD}{AB} \rightarrow \frac{\sqrt{23}}{11} = \frac{y}{12} \rightarrow \boxed{y = \frac{12}{11}\sqrt{23}}$$

۳۳



فرض: نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.
حکم: از نقطه A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

اثبات: فرض می‌کنیم که حکم غلط باشد، یعنی از نقطه A دو عمود بر خط d رسم شده است (مانند شکل) که خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند.



در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث $\triangle ABC$ بزرگتر از 180° خواهد شد و این غیر ممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد، یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

۳۴

$$\frac{AB}{A'B'} = K \rightarrow \frac{5}{20} = K \rightarrow \boxed{k = \frac{1}{4}}$$

$$\rightarrow \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A'B'C'}} = K \rightarrow \frac{5+7+11}{P_{\triangle A'B'C'}} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{P_{\triangle A'B'C'} = 92 \text{ cm}}$$

۳۵

$$\triangle BCE : CE^2 = BE^2 + BC^2 \rightarrow 2^2 = 1^2 + BC^2 \rightarrow BC^2 = 3 \rightarrow \boxed{BC = \sqrt{3}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \hat{ACD} = \hat{BCE} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle BCE \rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{CE}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{2} \rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{x = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$