



درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

نکته: برای محاسبه‌ی مجموع اعداد طبیعی 1 تا n ، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: روی محیط دایره‌ای 30 نقطه‌ی متمایز قرار داده‌ایم. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل

می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 29$$

$$\frac{29(30)}{2} = 29 \times 15 = 435$$

یادآوری دنباله‌ی حسابی: جمله‌ی n ام دنباله‌ی حسابی به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ است که در آن a_1 جمله‌ی اول و d قدر نسبت می‌باشد.

مجموعه جملات دنباله‌ی حسابی (1): اگر جمله‌ی اول و آخر یک دنباله‌ی حسابی معلوم باشد،

مجموع n جمله‌ی اول را می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_8 = \frac{8}{2} (2 + 23) = 4(25) = 100$$

که در آن S_n مجموعه n جمله‌ی اول می‌باشد. n تعداد جملات، a_1 جمله‌ی اول و a_n

$$a_n = 23 \rightarrow a_1 + (n-1)d = 23$$

جمله‌ی آخر است.

$$2 + (n-1)3 = 23 \rightarrow 2 + 3n - 3 = 23$$

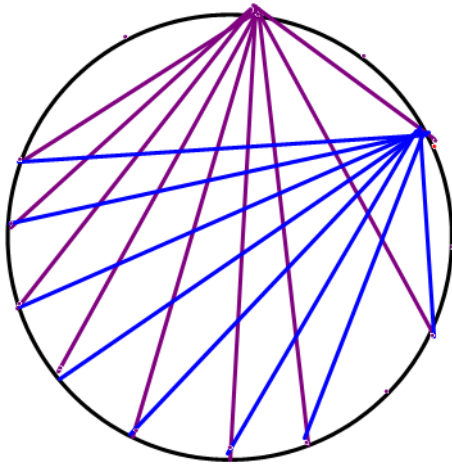
نکته: در دنباله‌ی حسابی برای به دست آوردن تعداد جملات از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$n = \frac{\text{جمله‌ی اول} - \text{جمله‌ی آخر}}{\text{اختلاف مشترک}} + 1$$

$$3n = 21$$

$$n = 7$$





$$9 + 11 + 99 + \dots + 1$$



3, 10, 17, ..., 367

مثال: مجموع عددهای زیر را به دست آورید.

$$n = \frac{367 - 3}{3} + 1 = \frac{364}{3} + 1 = 123$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_{123} = \frac{123}{2} (3 + 367) = \frac{123}{2} (370) = ?$$

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی (2): اگر جمله‌ی اول و قدر نسبت معلوم باشد. مجموع

جملات دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

که در آن S_n مجموعه n جمله‌ی اول، a_1 جمله‌ی اول و n تعداد جملات و d قدر نسبت می‌باشد.

مثال: مجموع ده جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی زیر را به دست آورید.

1, 5, 9, ...

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} [2(1) + 9(4)] = 5(38) = 190$$

مثال: مجموع سی جمله‌ی اول اعداد فرد را به دست آورید.

1, 3, 5, 7, 9, ...

$$S_{30} = \frac{30}{2} [2(1) + 29(2)] = \frac{30}{2} (60) = 900$$

مثال: مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی ... 35, 31, 27 را به دست آورید.

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2(35) + 19(-4)] = 10(-4) = -40$$

مثال: مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی زیر را به دست آورید.

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2(4) + 19(3)] = 10(65) = 650$$

4, 7, 10, ...





$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

مثال: مجموع ده جمله اول دنباله حسابی با جمله اول 3 و قدرنسبت 6 را به دست

آورید.
3, 9, 15, ...

$$S_{10} = \frac{10}{2} [2(3) + 9(6)] = 5(20) = 100$$

مثال: در یک دنباله حسابی، مجموع 10 جمله اول 120 است. اگر قدرنسبت این دنباله

2 باشد، جمله اول این دنباله را به دست آورید.

$$S_{10} = 120$$

$$\frac{10}{2} [2a_1 + 9(2)] = 120 \rightarrow 10a_1 + 90 = 120$$

$$10a_1 = 30 \rightarrow a_1 = 3$$

مثال: مجموع پنجاه جمله اول اعداد زوج را به دست آورید.

2, 4, 6, ...

$$S_{50} = \frac{50}{2} [2(2) + 49(2)] = \frac{50}{2} (104) = ?$$

مثال: در یک دنباله حسابی، قدرنسبت 0.5- و مجموع دوازده جمله اول برابر 9 است.

جمله اول این دنباله، کدام است؟ (س.خ.ا. 01)

$$\frac{7}{2} (4)$$

$$\frac{3}{2} (3)$$

$$-\frac{3}{2} (2)$$

$$-\frac{7}{2} (1)$$

$$S_{12} = 9 \rightarrow \frac{12}{2} [2a_1 + 11(-\frac{1}{2})] = 9$$

$$12a_1 - 33 = 9$$

$$12a_1 = 42 \rightarrow a_1 = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$$





یادآوری دنباله‌ی هندسی: جمله‌ی n ام دنباله‌ی هندسی به صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ است که در آن a_1 جمله‌ی اول و q قدر نسبت می‌باشد. ($a_1, q \neq 0$)

مجموع جملات دنباله‌ی هندسی: مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی که با S_n نشان

می‌دهند از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad \text{که در آن } a_1 \text{ جمله‌ی اول، } q \text{ قدر نسبت و } n \text{ تعداد جملات است.}$$

$$q=2$$

2, 4, 8, ...

مثال: مجموع شش جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی زیر را به دست آورید.

$$S_6 = \frac{2(1-2^6)}{1-2} = +126$$

3, 6, 12, ...

مثال: مجموع ده جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی زیر را به دست آورید.

$$S_{10} = \frac{3(1-2^{10})}{1-2} = 3079$$

$$q = \frac{1}{2}$$

4, 2, 1, ...

مثال: مجموع هشت جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی زیر را به دست آورید.

$$S_8 = \frac{4(1-(\frac{1}{2})^8)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{255}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$$

مثال: مقدار عبارت $3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times \dots \times 3^{\frac{1}{256}}$ برابر کدام است؟ (قلمچی-1402)

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$$

$$\frac{255}{256} (4) \quad \frac{511}{256} (3) \quad \frac{511}{512} (2) \quad \frac{1}{256} (1)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256} = \frac{511}{256}$$

$$S_9 = \frac{1(1-(\frac{1}{2})^9)}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-\frac{1}{512}) = \frac{511}{256}$$



$$n = \frac{\omega r - 19}{r} + 1 = 12$$

$$a_v = a_1 + 9d \rightarrow a_v = 1 + 9(r) = 19$$

$$a_{1n} = a_1 + 14d \rightarrow a_{1n} = 1 + 14(r) = 27$$

$$19, 22, \dots, 27$$

$$S_{1n} = \frac{15}{2} (19 + 27) = 8 \times 15 = 120$$

$$S_n = 120$$

$$\frac{n}{2} \left(\underbrace{r(r) + (n-1)r}_{r(n+r)} \right) = 120 \rightarrow \frac{nr}{2} + \frac{nr(n-1)}{2} = 120 \rightarrow \frac{nr}{2} + \frac{nr(n-1)}{2} = 120$$

$$n^2 + n - 24 = 0$$

$$(n+1)(n-24) = 0$$

$$n = -1 \quad \times$$

$$n = 24 \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{c}
 \text{---} \\
 \text{---}
 \end{array}
 \quad 4, 9, 14, 19, \dots$$

$$S_n = 911 \rightarrow \frac{n}{2} \left[\cancel{4} + (n-1)4 \right] = 911$$

$$2n^2 + 2n - 911 = 0$$

4n+4

$$\begin{aligned}
 n^2 + n - 455.5 &= 0 \\
 (n+11)(n-14) &= 0 \\
 n &= -11 \times
 \end{aligned}$$

$$n = 14 \checkmark$$

$$\begin{array}{r}
 0 \\
 11 \\
 \hline
 124 \\
 110 \\
 \hline
 234 \\
 110 \\
 \hline
 344 \\
 110 \\
 \hline
 454 \\
 110 \\
 \hline
 564 \\
 110 \\
 \hline
 674 \\
 110 \\
 \hline
 784 \\
 110 \\
 \hline
 894 \\
 110 \\
 \hline
 911
 \end{array}$$

$$S = \frac{10^0}{r} \left[\cancel{r(10^r)} + 10^9(4) \right] = ?$$

10^r 10⁹

$$10^2, 10^1, \dots, 9999$$

$$n = \frac{9999 - 10^2}{9} + 1 = \frac{10^4}{9} + 1 = 100$$

$$\begin{array}{r} 9999 \\ 9999 \\ 9999 \\ 9999 \end{array}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{19} = 100$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 100$$

$$\rightarrow (a_1 - 9) + (a_2 - 9) + \dots + (a_{19} - 9) = 100 - 9 \cdot 19$$

$$10d = 100 \rightarrow d = 10$$

$$S_{\gamma_0} = \gamma \wedge \omega$$

$$\frac{\gamma_0}{\gamma} \left[\gamma a_1 + \gamma (1, \omega) \right] = \gamma \wedge \omega$$

$$\gamma_0 a_1 + \gamma \wedge \omega = \gamma \wedge \omega$$

$$\gamma_0 a_1 = 0$$

$$a_1 = 0$$

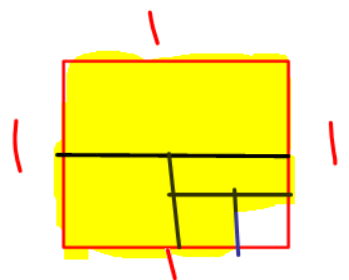
$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \frac{1}{16} > \dots$$

$$S_n \geq \frac{99}{100} (1 \times 1)$$

$$\frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) \geq \frac{99}{100}$$

$$1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \geq \frac{99}{100} \rightarrow \frac{1}{100} \geq \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$100 \leq 4^n \rightarrow n = 4$$





معادله‌ی خط:

معادله‌ی خط در صفحه به یکی از دو فرم $y = mx + h$ و $ax + by + c = 0$ نوشته می‌شود. در حالتی که $y = mx + h$ است، m را شیب (ضریب زاویه) خط و h را عرض از مبدأ خط می‌نامیم.

و در حالتی که خط به فرم $ax + by + c = 0$ است شیب خط برابر $m = -\frac{a}{b}$ است.

با مشخص کردن دو نقطه‌ی دلخواه از خط می‌توان نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم کرد.

تعیین معادله‌ی خط:

الف) با داشتن مختصات یک نقطه از خط مانند $A(x_1, y_1)$ و شیب خط (m) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه $(1, 2)$ گذشته و شیبش برابر -3 باشد.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \\ y - 2 = -3(x - 1)$$

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه $(3, 4)$ گذشته و شیبش برابر -2 باشد.

$$y - 4 = -2(x - 3) \\ y = -2x + 10$$

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه $(-2, 1)$ گذشته و شیبش برابر 3 باشد.

$$y - 1 = 3(x + 2) \\ y = 3x + 7$$

ب) با داشتن مختصات دو نقطه متمایز از خط: شیب خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد برابر $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ است. در این حالت معادله‌ی خط به صورت مقابل

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مشخص می‌شود:

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از دو نقطه $A(-1, 2)$ و $B(3, 4)$ می‌گذرد.

$$m = \frac{4 - 2}{3 - (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1) \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$





مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از دو نقطه $A(-2, 4)$ و $B(2, -8)$ می‌گذرد.

$$m = \frac{-8 - 4}{2 - (-2)} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$y = -3x - 2$$

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از دو نقطه $A(-1, 2)$ و $B(1, 5)$ می‌گذرد.

$$m = \frac{5 - 2}{1 - (-1)} = \frac{3}{2}$$

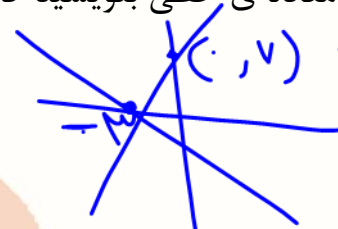
$$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که طول از مبدأ آن -3 و عرض از مبدأ آن 7 باشد.

$$m = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$$

$$y = -\frac{7}{3}x + 7$$

$$(-3, 0)$$



مثال: معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $(3, 7)$ و نقطه‌ی تلاقی دو خط به معادلات

$2x + 3y = -1$ و $-x + 4y = -5$ را بنویسید.

$$\begin{cases} -x + 4y = -5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 8y = -10 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$11y = -11$$

$$y = -1$$

$$2x = 2 \rightarrow x = 1$$

$$(3, 7)$$

$$m = \frac{7}{1} = 7 \rightarrow y = 7x - 5$$

شرط موازی و عمود بودن دو خط:

* دو خط $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$ با هم موازیند، هرگاه شیب آن‌ها با هم برابر

باشند، یعنی $m = m'$

* دو خط غیر موازی با محورهای مختصات با شیب‌های m و m' بر هم عمودند، هرگاه شیب

هر کدام، عکس و قرینه‌ی شیب دیگری باشد. به بیان دیگر حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر

-1 باشد. یعنی $mm' = -1$



$$m = \frac{3}{4} \quad m' = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{3}{4} \times -\frac{4}{3} = -1$$





مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی (5, 4) بگذرد و با خط $2x + 3y = 1$ موازی باشد.

$$m = -\frac{2}{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + \frac{23}{3} \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{14}{3} \end{array} \right.$$

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی (2, -1) بگذرد و بر خط $3x - 4y = 7$ عمود باشد.

$$m = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} m = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{14}{3} \end{array} \right.$$

مثال: در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط

نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود)

الف) $T: y = \frac{-1}{5}x + 3$ $L: y = 5x - 2$ **عمود**

ب) $T: x - 2y = 1$ $L: y = \frac{1}{2}x + 7$ **موازی**
 $m = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$ $m' = \frac{1}{2}$

پ) $T: 3x + 2y = 0$ $L: 2x - 3y + 3 = 0$ **عمود**
 $m = -\frac{3}{2}$ $m' = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$

ت) $T: y = -3$ $L: x = 1$ **عمود**

مثال: دو خط به معادلات $3x + 2y = 5$ و $y - 4mx = -1$ داده شده است.

الف) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط با هم موازی باشند.

$$m = -\frac{3}{2} \rightarrow m = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

ب) مقدار m را طوری به دست آورید که دو خط بر هم عمود باشند.

$$mm' = -1 \quad -\frac{3}{2} \times m = -1 \rightarrow -\frac{3}{2}m = -1 \rightarrow m = \frac{2}{3}$$

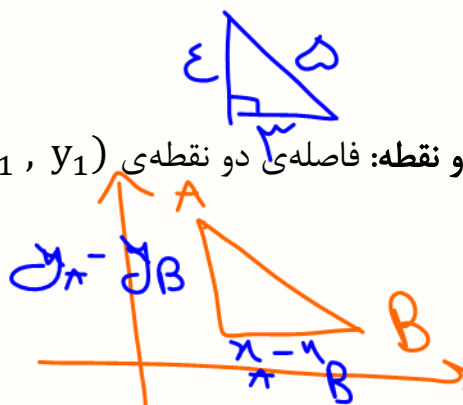
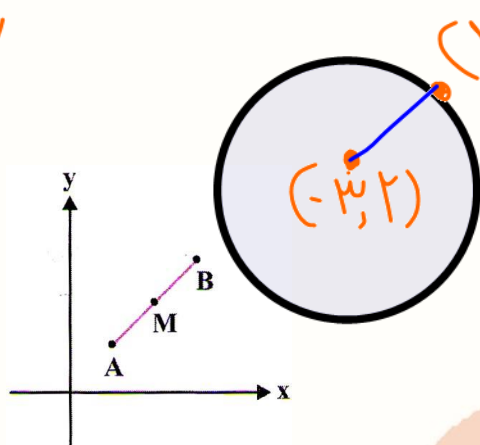




فاصله‌ی دو نقطه: فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

مثال: شعاع دایره به مرکز $(-3, 2)$ و گذرنده از نقطه‌ی $(3, -6)$ کدام است؟



$$r = \sqrt{(3 - (-3))^2 + (-6 - 2)^2}$$

$$r = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

نقطه‌ی وسط پاره خط:

$$S = \pi \times 1^2 = 1.0\pi$$

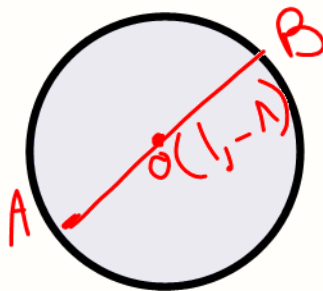
مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط AB عبارت است از :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$$

مثال: اگر نقاط $A(6, -5)$ و $B(-4, -11)$ دو سر قطری از دایره باشند، مختصات مرکز

دایره و شعاع دایره را بیابید.



$$OA = \sqrt{(6 - 1)^2 + (-5 + 11)^2} = \sqrt{34}$$

مثال: در هریک از موارد زیر مختصات نقطه‌ی خواسته شده را بیابید.

الف) نقطه‌ی $M(-3, 2)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $A(4, 1)$ و B است. مختصات

نقطه‌ی B را بیابید

$$A(4, 1) \quad M(-3, 2) \quad B(x, y)$$

$$\frac{4+x}{2} = -3 \rightarrow 4+x = -6 \rightarrow x = -10$$

$$\frac{1+y}{2} = 2 \rightarrow 1+y = 4 \rightarrow y = 3$$

ب) قرینه‌ی نقطه‌ی $(2, -6)$ را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.

$$(2, -6) \rightarrow (-2, 6)$$

پ) قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2, -1)$ را نسبت به نقطه‌ی $M(1, 5)$ به دست آورید.

$$A(2, -1) \quad M(1, 5) \quad A'(x, y)$$

$$A'(0, 11)$$



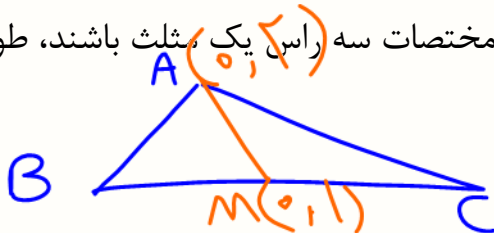


مثال: اگر $A(1,5)$ ، $B(0,4)$ ، $C(4,2)$ مختصات سه رأس یک مثلث باشند، طول میانه AM کدام است؟ (همانگ - ناحیه 7 - ریاضی)



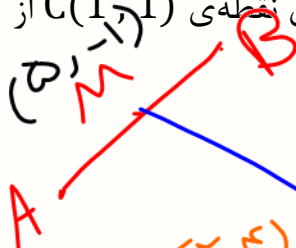
$$AM = \sqrt{(1-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$$

مثال: اگر $A(0,2)$ ، $B(-1,3)$ ، $C(1,-1)$ مختصات سه رأس یک مثلث باشند، طول میانه AM کدام است؟



$$AM = \sqrt{(0-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

مثال: دو نقطه‌ی $A(13,6)$ و $B(-3,-8)$ را در نظر بگیرید. فاصله‌ی نقطه‌ی $C(1,1)$ از وسط پاره خط AB را به دست آورید.



$$CM = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{20}$$

مثال: مثلث با رأس‌های $A(-2,4)$ ، $B(1,4)$ و $C(-3,2)$ را در نظر بگیرید. الف) مختصات M، نقطه‌ی وسط ضلع BC را مشخص کنید.



ب) طول میانه‌ی AM را به دست آورید.

$$AM = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

پ) معادله‌ی میانه‌ی AM را بنویسید.

$$m = \frac{4-3}{-2-(-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

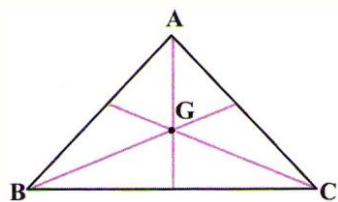
$$y - 3 = -1(x + 1)$$

$$y = -x - 1 + 3 \rightarrow y = -x + 2$$



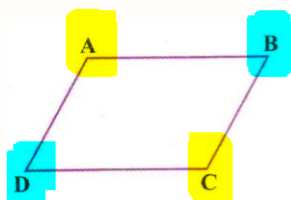


نکته: مختصات مرکز ثقل مثلث ABC که محل تلاقی میانه‌های مثلث است، عبارت است از:



$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

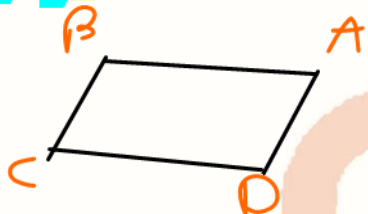
نکته: در متوازی الاضلاع ABCD شکل مقابل داریم:



$$x_A + x_C = x_D + x_B$$

$$y_A + y_C = y_D + y_B$$

مثال: نقاط $A(1, 2)$ ، $B(2, 4)$ و $C(-2, 6)$ سه رأس متوازی الاضلاع ABCD هستند.



مختصات راس چهارم را پیدا کنید.

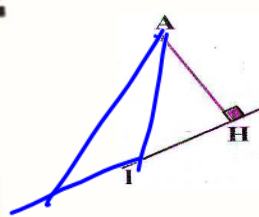
$$\begin{aligned} -1 + 1 &= 2 + x_D \\ -2 &= x_D \\ 2 + 6 &= 4 + y_D \rightarrow y_D = 4 \end{aligned}$$

$$D = (-1, 4)$$

فاصله‌ی نقطه از خط: فاصله‌ی نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$

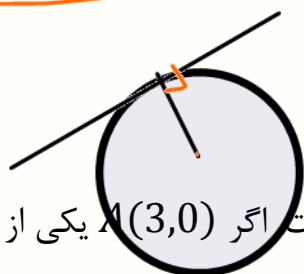
$$d = |AH| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

برابر است با:



$$d = \frac{|1 - 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

مثال: خط $x + 2y = 3$ بر دایره‌ای به مرکز $(1, -1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.

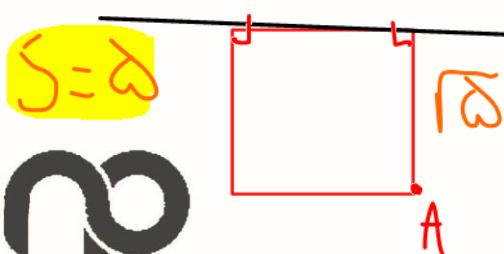


$$x + 2y - 3 = 0$$

$$0 - 2 + 1 = 0$$

مثال: یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از راس‌های

این مربع باشد، مساحت مربع را به دست آورید. (همانگ - ناحیه 4 - تجربی)



$$y - 2x + 1 = 0$$

$$d = \frac{|-6 + 0 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$





مثال: اگر نقطه‌ی $A(2,3)$ راس یک مربع و $3x - 4y = 9$ معادله‌ی یک ضلع مربع باشد، مساحت مربع را بیابید. (هماهنگ - ناحیه 4 - ریاضی)

مثال: مثلث با رأس‌های $A(2,4)$ ، $B(1,4)$ و $C(-1,2)$ را در نظر بگیرید.
(الف) طول میانه‌ی AM را به دست آورید.

$AM = \sqrt{(2-0)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$

$m_{BC} = \frac{4-2}{1-(-1)} = 1$

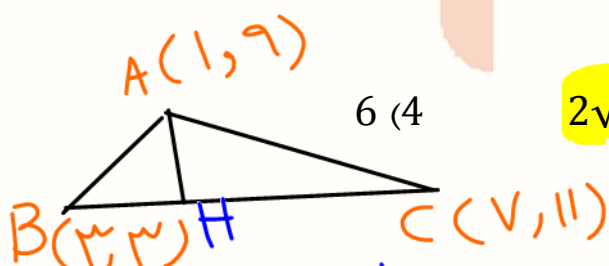
$y = x + 2 \rightarrow y - x - 2 = 0$

(ب) طول ارتفاع AH را به دست آورید.

$d = \frac{|-1+4-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

مثال: طول ارتفاع AH در مثلثی با رأس‌های $A(1,9)$ ، $B(3,3)$ و $C(7,11)$ کدام است؟

(س.خ.01)



$2\sqrt{5}$ (3)

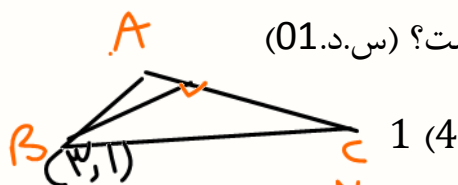
$\sqrt{10}$ (2)

2 (1)

$m_{BC} = \frac{11-3}{7-3} = 2$

$y = 2x - 3 \rightarrow y - 2x + 3 = 0$
 $d = \frac{|-2+9+3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

مثال: سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB: y + 2x = 7$ ، $AC: 4y - 3x = 17$ و $BC: 2y - 7x = -19$ هستند. طول ارتفاع BH کدام است؟ (س.د.01)



$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases}$

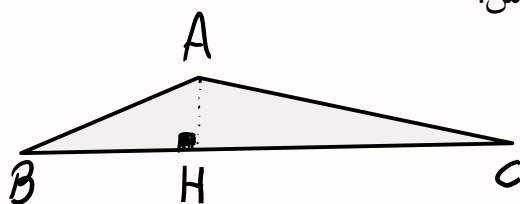
$\begin{cases} -y - 2x = -7 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases}$
 $-11x = -33$
 $x = 3$
 $y = 1$

$d = \frac{|-4+3-17|}{\sqrt{9+14}} = \frac{18}{5}$
 $d = \frac{18}{5}$





نکته: به دست آوردن مساحت مثلث با داشتن سه رأس:



$$S = \frac{1}{2} BC \times AH$$

و اما روش سرعتی:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

مثال: مساحت مثلثی با رأس‌های $A(-2, 4)$ ، $B(1, 4)$ و $C(-3, 2)$ را بیابید.

$$S = \frac{1}{2} |(-2)(4-2) + 1(2-4) - 3(4-4)|$$

$$S = \frac{1}{2} |-4 - 2| = 3$$

مثال: مساحت مثلثی با رأس‌های $A(2, 5)$ ، $B(3, 4)$ و $C(1, -2)$ را بیابید.

مثال: دو خط $2x - 3y = 2$ و $3x + 2y = 1$ معادلات اضلاع مستطیلی‌اند و نقطه‌ی

$A(2, 5)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل را به دست آورید.

$A(2, 5)$



$$3x + 2y - 1 = 0$$

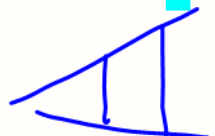
$$2x - 3y - 2 = 0$$

$$d = \frac{|6 + 10 - 1|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{15}{\sqrt{13}}$$

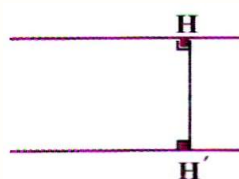
$$S = \frac{15}{\sqrt{13}} \times \frac{13}{\sqrt{13}} = 15$$

$$d' = \frac{|4 - 15 - 2|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

فاصله‌ی بین دو خط موازی: فاصله‌ی بین دو خط موازی $ax + by + c = 0$



و $ax + by + c' = 0$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

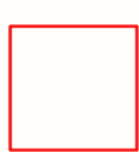


$$d = |HH'| = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$





مثال: معادلات اضلاع مربعی به صورت $2x - 3y + 1 = 0$ و $4x - 6y - 3 = 0$ هستند.
مساحت مربع را به دست آورید.



$$d = \frac{|-1-2|}{\sqrt{16+9}} = \frac{3}{5} \rightarrow S = \frac{5}{\sqrt{16}} \times \frac{5}{\sqrt{9}} = \frac{25}{12}$$

نکته: معادله‌ی خطی که با دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ موازی باشد و از آن‌ها به فاصله‌ی برابر باشد عبارت است از:

$$ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$$

$$\frac{ax + by + c}{1} = \frac{ax + by + c'}{1}$$

مثال: معادله خطی که از دو خط $2x + y - 3 = 0$ و $y = -2x - 1$ به یک فاصله باشد بنویسید.

$$y + 2x + 1 = 0 \rightarrow y + 2x + \frac{-3+1}{2} = 0 \rightarrow y + 2x - 1 = 0$$

روش تغییر متغیر برای حل معادله: برای حل معادله‌ی $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ که یک معادله‌ی دو مجذوری است، می‌توان به جای x^2 متغیر جدیدی مانند t قرار داد و معادله را به یک معادله‌ی درجه دوم تبدیل کرد. به صورت زیر:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$(t-1)(t-4) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } t = 4$$

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \text{معادله 4 ریشه دارد}$$

$$x^2 = t \rightarrow x^2 = t^2$$

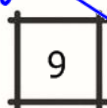
مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$$t^2 - 8t - 9 = 0 \rightarrow (t-9)(t+1) = 0$$

ب) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$

$$t^2 - 2t - 24 = 0 \rightarrow (t-6)(t+4) = 0$$



$$x^3 = t \rightarrow (x^3)^2 = t^2 \rightarrow x^6 = t^2$$

ب) $4x^6 + 1 = 5x^3 \rightarrow 4x^6 - 5x^3 + 1 = 0$

$$4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$t=1 \rightarrow x^3=1 \rightarrow x=1$$

$$t=\frac{1}{4} \rightarrow x^3=\frac{1}{4} \rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

پ) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 6 \rightarrow t^2 + t - 6 = 0$

$$(t+3)(t-2) = 0$$

$$t = -3 \rightarrow x + \frac{1}{x} + 3 = 0 \rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$t = 2 \rightarrow x + \frac{1}{x} - 2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x=1$$

ت) $(x^2 + x + 1)^2 + x^2 + x - 1 = 0$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$t=1 \rightarrow x^2 + x + 1 = 1 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \rightarrow x=0 \text{ or } x=-1$$

$$t=-2 \rightarrow x^2 + x + 1 = -2 \rightarrow x^2 + x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4(1)(3) = -11 < 0$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم:

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه مجموع و حاصل ضرب و قدر مطلق اختلاف ریشه‌های معادله به صورت زیر است:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a}, \quad |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثال: در معادله‌ی $-2x^2 + x + 5 = 0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب و قدر

مطلق اختلاف ریشه‌ها را به دست آورید.

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{5}{-2}$$

اسی قریب به صفر
بدان سی





مثال: مجموع ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + (2m - 1)x - 5 = 0$ برابر 3 است. مقدار m را بیابید؟

$$S = \frac{-b}{a} \rightarrow \frac{-(2m-1)}{2} = 3$$

$$-2m+1=6 \rightarrow -2m=5 \rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

مثال: حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 10x - m = 0$ برابر 2 می‌باشد. مقدار m را بیابید؟

$$P = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{-m}{3} = 2 \rightarrow -m = 6$$

$$-6 = m$$

مثال: معادله‌ی $x^2 + (2m + 1)x + 3m - 1 = 0$ دو ریشه‌ی قرینه دارد. مقدار m را بیابید؟

$$S = 0 \rightarrow \frac{-(2m+1)}{1} = 0 \rightarrow -2m-1=0$$

$$-2m=1 \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

مثال: ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - (3m + 1)x + m = 0$ عکس یکدیگر هستند. مجموع این ریشه‌ها را بیابید؟

$$P = 1 \rightarrow \frac{m}{3} = 1 \rightarrow m = 3$$

مثال: جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2 - 5mx + m^2 - 1 = 0$ معکوس یکدیگر هستند. مقادیر m کدام است؟ (قلمچی-1402)

$$P = 1 \rightarrow 3x^2 - 1 \cdot x + 1 = 0 \quad \Delta = 1 - 4(3)(1) = -11 < 0$$

$$m = 2 \rightarrow 3x^2 - 10x + 4 = 0 \quad \Delta = 100 - 4(3)(4) = 16 > 0$$

$$m = -2 \rightarrow 3x^2 + 10x - 4 = 0 \quad \Delta = 100 + 4(3)(4) = 244 > 0$$

(1) فقط 2 (2) فقط -2 (3) ± 2 (4) -3

$$P = 1 \rightarrow \frac{m^2-1}{3} = 1 \rightarrow m^2-1=3 \rightarrow m^2=4 \rightarrow m = \pm 2$$

روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم:

اگر رابطه‌ی بین دو ریشه متقارن باشد یعنی با تعویض جای دو ریشه عبارت تغییری نکند،

مانند: $\alpha + \beta$ ، $\alpha^2 + \beta^2$ ، $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ و... می‌توان به S و P رسید.





مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، مقدار عبارات زیر را بیابید.

الف) $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 9 - 2(1) = 7$ $S = \frac{3}{1} = 3$

ب) $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = 27 - 3(1)(3) = 18$ $P = \frac{1}{1} = 1$

پ) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = 3$

ت) $\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1} = \frac{\alpha(\alpha+1) + \beta(\beta+1)}{(\beta+1)(\alpha+1)} = \frac{\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta}{\beta\alpha + \beta + \alpha + 1}$

ج) $\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$

چ) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

ح) $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$

$= \frac{S^2 - 2P + S}{P + S + 1} = \frac{1}{1} = 1$

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $2x^2 - 6x - 1 = 0$ باشند،

حاصل $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ را بیابید؟ $S = \frac{-b}{a} = \frac{6}{2} = 3$ $(\alpha + \beta)^3 = S^3 \rightarrow 27$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 7 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\beta}{\beta+1}$ را

بیابید؟

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + (m-2)x - 3 = 0$ و $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 3$ باشند، مقدار m را به دست آورید. (هماهنگ - ناحیه 4 - تجربی)

$\frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = 3 \rightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = 3 \rightarrow \frac{-m+2}{2} = \frac{3}{1}$
 $-m+2=6$
 $2-6=m$
 $-4=m$





مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (2m - 1)x + 4 = 0$ باشند، مقدار m را چنان بیابید که رابطه‌ی $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = 12$ برقرار باشد. (هماهنگ - ناحیه 4 - ریاضی)

$$\alpha\beta(\alpha + \beta) = 12$$

$$\begin{aligned} 4(2m - 1) &= 12 \rightarrow 8m - 4 = 12 \\ 8m &= 16 \rightarrow m = 2 \end{aligned}$$

مثال: در معادله‌ی $3x^2 - 18x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر 2 واحد

بیشتر است. m را بیابید؟

$$\begin{aligned} \alpha & \rightarrow 4\alpha + 2 = 6 \\ \beta & \rightarrow 3\alpha + 2 \end{aligned}$$

$$4\alpha = 4$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \alpha\beta = \frac{m}{3} \rightarrow \frac{5}{3} = \frac{m}{3} \\ m &= 5 \end{aligned}$$

نوشتن معادله‌ی درجه دو با داشتن S و P :

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دومی باشند در این صورت با تعیین مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها یعنی $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha \cdot \beta$ می‌توانیم معادله‌ی درجه دوم را به صورت زیر بنویسیم:

$$x^2 - sx + p = 0$$

مثال: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن 2 و -3 باشد.

$$\begin{aligned} S &= -3 + 2 = -1 \\ P &= -3 \times 2 = -6 \end{aligned}$$

$$x^2 + 1x - 6 = 0$$

مثال: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $1 \pm \sqrt{3}$ باشد.

$$\begin{aligned} S &= (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) = 2 \\ P &= (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

مثال: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $2 \pm \sqrt{5}$ باشد.

$$\begin{aligned} S &= (2 + \sqrt{5}) + (2 - \sqrt{5}) = 4 \\ P &= (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 4 - 5 = -1 \end{aligned}$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$





مثال: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $4 - \sqrt{2}$ و $4 + \sqrt{2}$ باشد.

مثال: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{3+\sqrt{3}}{7}$ و $\frac{3-\sqrt{3}}{7}$ باشد.

$$S = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{7} \right) + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{7} \right) = \frac{6}{7}$$

$$P = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{7} \right) \left(\frac{3-\sqrt{3}}{7} \right) = \frac{9-3}{49} = \frac{6}{49}$$

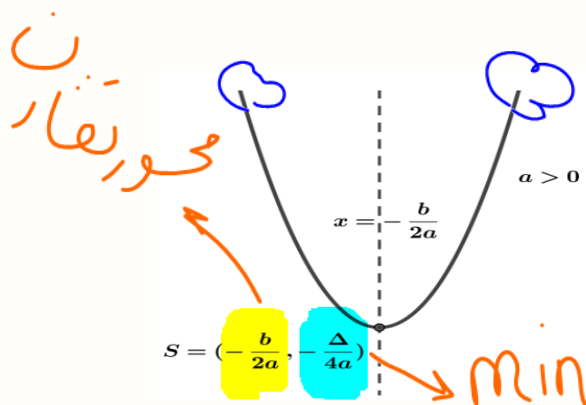
مثال: مستطیلی به محیط 18 و مساحت 14 داریم. طول ضلع کوچک مستطیل کدام است؟

$$x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{6}{49} = 0$$

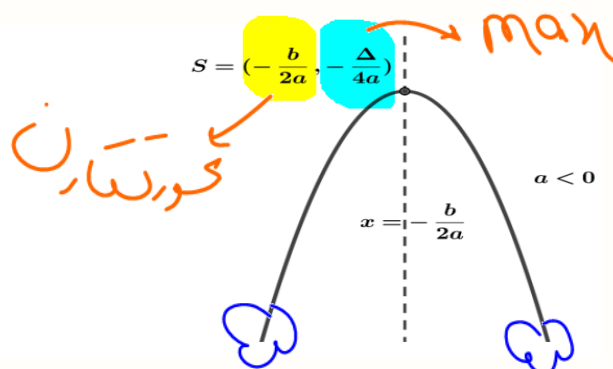
ماکزیمم و مینیمم سهمی:

نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ یک سهمی است که با توجه به علامت a به یکی از دو صورت مقابل است:

در شکل‌های زیر نقطه‌ی S را رأس سهمی می‌گویند.



بچه مثبت ☺ (پورزکی)



بچه منفی (پخش کننده ☹)

اگر $a > 0$ باشد (بچه مثبت) سهمی مینیمم (Min) دارد و اگر $a < 0$ (بچه منفی) سهمی ماکزیمم (Max) دارد. همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.





نکته: هر سهمی به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است رأسی به مختصات $S(h, k)$ و خط تقارنی با معادله $x = h$ دارد.

مثال: در سهمی $y = -2(x + 3)^2 + 5$ رأس سهمی به مختصات $S(-3, 5)$ و محور تقارن $x = -3$ و ماکسیمم $y = 5$ است.

* مختصات رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ به صورت $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ است.

* سهمی دارای یک خط محور تقارن به معادله $x = -\frac{b}{2a}$ است.

مثال: در سهمی $y = -2x^2 + 4x - 3$ مختصات رأس سهمی و معادله محور تقارن سهمی و $\max$ یا $\min$ را بیابید.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-4} = 1 \quad \text{تقارن}$$

$$y = -2(1)^2 + 4(1) - 3 = -2 + 4 - 3 = -1 \quad \max$$

مثال: بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل را که می توان توسط یک طناب 40 متری

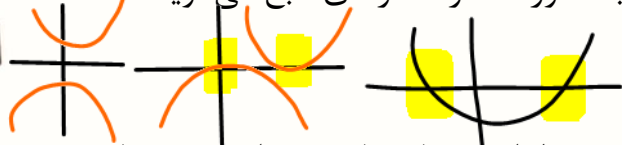
که یک طرف آن رودخانه است محصور کرد، چند متر است؟ $\alpha = 1, \beta = 2$

$$2\alpha + \beta = 10 \rightarrow \beta = 10 - 2\alpha \rightarrow 2$$

$$\alpha \beta = \alpha (10 - 2\alpha) = -2\alpha^2 + 10\alpha$$

$$S(1, 2) = \frac{1}{-4} = 1 \quad -2(1)^2 + 10(1) = 8$$

صفرهای تابع درجه 2: نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور x ها را صفرهای تابع می گویند چون در این نقاط مقدار تابع برابر صفر می شود.



با توجه به این که نمودار تابع درجه 2 یک سهمی است، لذا صفرهای تابع در واقع ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است که به کمک Δ می توان تعداد صفرهای این تابع را تعیین کرد.

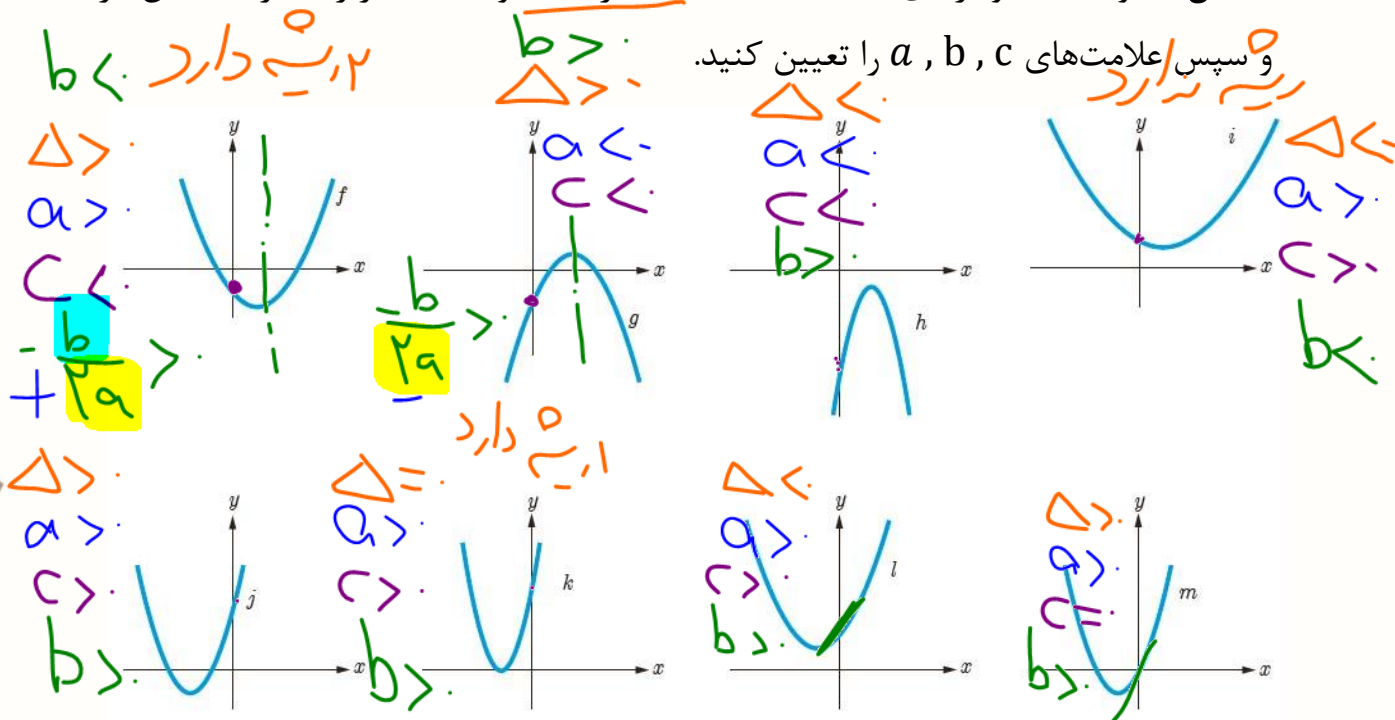
نکته: در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ علامت a و b و c را می توان با توجه به نمودار تابع تعیین کرد.





مثال: با توجه به نمودارهای داده شده، ابتدا تعداد ریشه‌ها و علامت هر ریشه را مشخص کرده

و سپس علامت‌های a, b, c را تعیین کنید.



تعیین معادله‌ی سهمی به کمک نمودار:

اگر سهمی محور x ها را در 2 نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع کرده باشد، در این صورت معادله‌ی سهمی را به صورت $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ می‌نویسیم و اگر سهمی محور

x ها را در یک نقطه به طول x_1 قطع کرده باشد، در این صورت معادله‌ی سهمی را به صورت

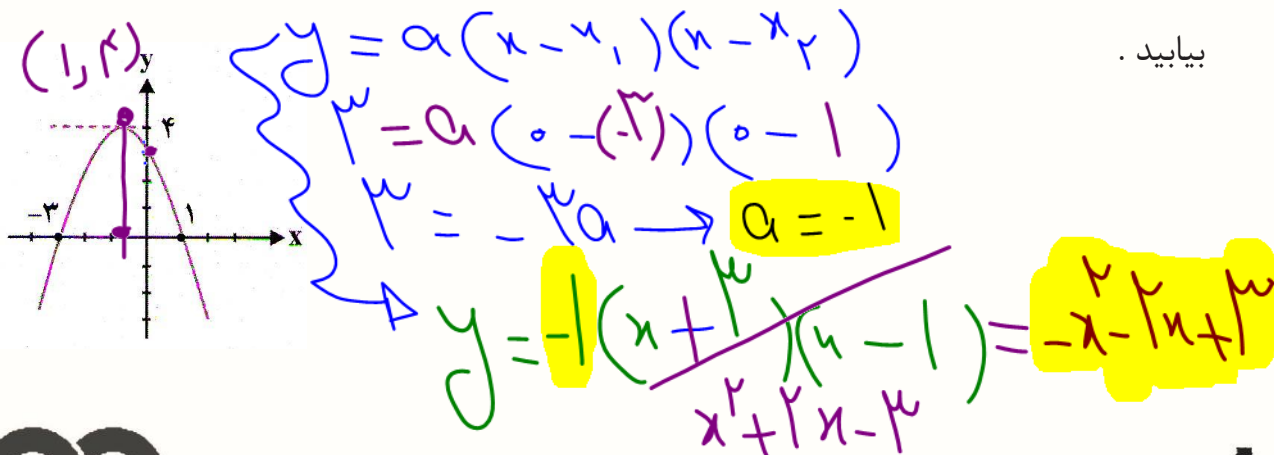
$f(x) = a(x - x_1)^2$ می‌نویسیم که در هر حالت با داشتن مختصات یک نقطه‌ی دیگر از

سهمی و صدق دادن در معادلات فوق به راحتی می‌توانیم a را به دست آوریم و معادله‌ی

سهمی را بنویسیم.

مثال: اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل مقابل باشد، مقدار $a + b$ را

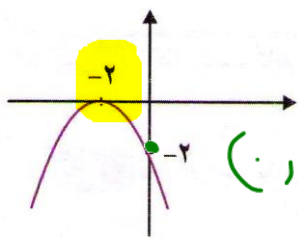
بیابید.





مثال: نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل رو به رو است. حاصل ac کدام

است؟



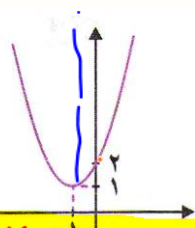
$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$-2 = a(0 + 1)(0 + 1)$$

$$-2 = 1a \rightarrow a = -2$$

$$y = -2(x + 1)(x - 1) = -2(x^2 - 1) = -2x^2 + 2$$

مثال: نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل رو به رو است. حاصل $\frac{b+c}{a}$ کدام است؟



$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{1} \rightarrow b = 2a \rightarrow b = 2(1) = 2$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$1 = a(-1)^2 + 2a(-1) + 2 \rightarrow 1 = a - 2a + 2 \rightarrow -a = -1 \rightarrow a = 1$$

$$y = x^2 + 2x + 2$$

علامت ریشه‌های تابع درجه 2: برای تعیین علامت صفرهای تابع درجه 2 (در صورت وجود) که

همان علامت ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است، می‌توانیم از علامت P و S کمک

بگیریم. به صورت زیر:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \Rightarrow \text{تابع دو ریشه‌ی متمایز دارد.} \\ P = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \text{تابع 2 ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.} \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ی مثبت از قدرمطلق ریشه‌ی منفی بزرگ‌تر است.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \Rightarrow \text{تابع دو ریشه‌ی متمایز دارد.} \\ P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \text{تابع 2 ریشه‌ی هم‌علامت دارد.} \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \text{هر 2 ریشه منفی هستند.} \end{array} \right. \quad -5, -2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \Rightarrow \text{تابع دو ریشه‌ی متمایز دارد.} \\ P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \text{تابع 2 ریشه‌ی هم‌علامت دارد.} \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \text{هر 2 ریشه مثبت هستند.} \end{array} \right. \quad 5, 2$$





مثال: در توابع زیر تعداد و علامت ریشه‌ها را (در صورت وجود) مشخص کنید.

الف) $y = -2x^2 + 4x + 3$

$\Delta = 16 - 4(-2)(3) = 40 > 0$
 تابع ۲ ریشه‌ی متمایز دارد. ۲ ریشه‌ی مستقیم هستند.
 $P = \frac{3}{-2} < 0$
 $S = -\frac{4}{-2} = 2 > 0$
 ریشه‌ی مثبت از ۰ می‌گذرد.

ب) $y = 3x^2 - 6x + 2$

$\Delta = 36 - 4(3)(2) = 12 > 0$
 $P = \frac{2}{3} > 0$
 $S = \frac{6}{3} = 2 > 0$
 هر ۲ ریشه‌ی مثبت هستند.

پ) $y = -2x^2 - 6x - 2$

$\Delta = 36 - 4(-2)(-2) = 20 > 0$
 $P = -\frac{2}{-2} = 1 > 0$
 $S = -\frac{6}{-2} = 3 > 0$
 ۲ ریشه‌ی متمایز. ۲ ریشه‌ی هم علامتند.

مستطیل طلایی:

مستطیلی که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل، برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند و داشته باشیم:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}, \text{ نسبت طول به عرض این مستطیل را نسبت طلایی می‌گویند.}$$

عرض مستطیل را $y = 1$ در نظر می‌گیریم تا مقدار نسبت طلایی را محاسبه کنیم:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \rightarrow x^2 = x+1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4(-1)(1) = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 5 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ق ق} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ غ ق} \end{cases}$$





عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به عدد طلایی معروف است که مقدار تقریبی آن 1.618 می باشد؛ این عدد از دوران باستان مورد توجه بوده است.

مثال: نسبت طول به عرض یک مستطیل، 5 به 4 است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟ (س.د. 02)

$0.4(1+\sqrt{5})$ (4) ✓ $0.6+0.2\sqrt{5}$ (3) $0.2(1+\sqrt{5})$ (2) $0.3+\sqrt{5}$ (1)

$S_0 = 2$ $S = 4 \times 2(1+\sqrt{5})$

$\frac{S_{gold}}{S_0} = \frac{4(1+\sqrt{5})}{2} = 2(1+\sqrt{5})$

معادلات گویا:

معادلاتی که شامل عبارات گویا (یعنی کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چند جمله‌ای هست) باشند را معادلات گویا می‌گویند.

نکته: جواب‌های به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} = 1$ → $\frac{2(n-2)+x}{x(n-2)} = 1$ → $\frac{n-4}{x^2-2x} = \frac{1}{1}$

$x^2 - 2x = n - 4$ → $x^2 - 2x + 4 = n$ → $(x-2)(x-1) = 0$

$x=1$ $x=2$

ب) $\frac{3x+5}{x^2+5x} + \frac{x+4}{x+5} = \frac{x+1}{x}$ → $\frac{3n+5+x^2+5x}{x(n+5)} = \frac{n+1}{n}$

$\frac{x^2+7x+5}{x^2+5x} = \frac{x+1}{n}$ → $x^2+7x+5 = \frac{x^2+5x}{n}(x+1)$

$7x^2 - 6x^2 = 0$ → $x^2 = 0$ → $x = 0$





$$\text{ث) } \frac{x}{x+1} + \frac{5}{x^2-3x-4} = \frac{x+1}{x-4} \rightarrow \frac{x(x-4)+5}{(x-4)(x+1)} = \frac{x+1}{x-4}$$

$$\cancel{x^2-4x+5} = \cancel{x^2} + 2x + 1$$

$$-4x - 2x = 1 - 5$$

$$-6x = -4$$

$$x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{قق}$$

مثال: معادله $2x + \frac{3}{x} = -1$ چه وضعیتی دارد؟

(1) دو ریشه مثبت دارد. (2) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

(3) دو ریشه‌ی منفی دارد. (4) ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\frac{2x}{1} + \frac{3}{x} = -1$$

$$\frac{2x^2+3}{x} = -\frac{1}{1}$$

$$2x^2+3 = -x \rightarrow 2x^2+x+3=0$$

$$\Delta = (1)^2 - 4(2)(3) = 1 - 24 = -23 < 0$$

مثال: به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t = -3$ است؟

$$\frac{4-(-3)}{2-2(-3)} = \frac{3(-3)^2+k}{((-3)^2+1)^2-68} \rightarrow \frac{7}{8} = \frac{27+k}{16-68}$$

$$27+k = 7 \rightarrow k = -20$$

مثال: علی و حسین کاری را در عرض 3 ساعت انجام می‌دهند. اگر علی به تنهایی کار را در

9 ساعت انجام دهد، حسین به تنهایی کار را در چند ساعت انجام می‌دهد؟

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x+9}{9x} = \frac{1}{3} \rightarrow 3x+27=9x$$

$$3x+27=9x$$

$$27=6x \rightarrow x = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$





$$30 + 45 = 75$$

مثال: دو نقاش با هم یک ساختمان را 18 روزه رنگ می کنند. اگر هر یک به تنهایی کار را انجام دهند، نقاش اول 15 روز زودتر از نقاش دوم این کار را انجام می دهد. مجموع روزهایی که دو نقاش کار را به تنهایی تمام می کنند چند روز است؟

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{\frac{x+15}{x(x+15)} + \frac{x}{x(x+15)}}{\frac{x+15+x}{x(x+15)}} = \frac{1}{18}$$

$$x^2 + 15x$$

$$2x + 15 = x^2 + 15x$$

$$x^2 - 13x - 15 = 0$$

$$(x-15)(x+1) = 0$$

$$x = 15 \quad x = -1$$

مثال: برای رنگ آمیزی نمای یک ساختمان از دو دستگاه A و B استفاده می شود. اگر این دو دستگاه با هم کار کنند، این رنگ آمیزی 6 ساعت طول می کشد، اگر سرعت کار دستگاه A دو برابر سرعت کار دستگاه B باشد، با دستگاه B در چند ساعت می توان نمای این ساختمان را رنگ آمیزی کرد؟

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{2+1}{2t} = \frac{1}{6} \rightarrow 2t = 18$$

$$t = 9h \quad A \text{ دستگاه}$$

$$t = 18h \quad B \text{ دستگاه}$$

$$v_A = 2v_B$$

$$t_A = \frac{1}{2}t_B$$

معادلات رادیکالی:
ابتدا جداسازی را انجام می دهیم (اگر یک رادیکال وجود داشت اطراف آن را خالی می کنیم و اگر دو رادیکال وجود داشت آن ها را از هم جدا می کنیم) سپس طرفین را به توان 2 می رسانیم. لازم به ذکر است جواب ها را حتما در صورت سوال جای گذاری می کنیم، اگر صدق نکرد غیر قابل قبول و اگر صدق کرد قابل قبول است.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$(\sqrt{x+2})^2 = (x-4)^2 \rightarrow x+2 = x^2 - 8x + 16$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$(x-7)(x-2) = 0$$

$$x = 7$$

$$x = 2$$



$$ب) (2\sqrt{x})^2 = (\sqrt{3x+4})^2$$

$$x = 2x + 4$$

$$x = -4$$

$$2\sqrt{-4} = \sqrt{3(-4)+4} \rightarrow 4 = 4 \checkmark$$

$$پ) \sqrt{3x-2} + 2 = x$$

$$(\sqrt{3x-2})^2 = (x-2)^2$$

$$3x-2 = x^2 - 4x + 4$$

$$ت) (\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}})^2 = 2$$

$$t + 2(\sqrt{t})(\frac{1}{\sqrt{t}}) + \frac{1}{t} = 2$$

$$t + \frac{1}{t} = 2 \times t \rightarrow t + \frac{1}{t} = 2t \rightarrow 1t - 2t + 1 = 0$$

$$t = 1$$

$$ث) (\sqrt{m+3} + \frac{2}{\sqrt{m+3}})^2 = 3$$

$$m+3 + 2(\sqrt{m+3})(\frac{2}{\sqrt{m+3}}) + \frac{4}{m+3} = 9$$

$$\frac{m+3}{1} + \frac{4}{m+3} = 9$$

$$\frac{m^2+4m+9+4}{m+3} = 9$$

$$m^2+4m+13 = 9m+27$$

$$m^2-5m-14=0$$

$$\Delta = 25 - 4(1)(-14) = 25 + 56 = 81$$

$$\sqrt{10+4} = 4$$

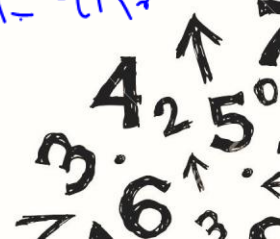
$$ج) (\sqrt{10+\sqrt{x+3}})^2 = 4$$

$$10+\sqrt{x+3} = 16$$

$$(\sqrt{x+3})^2 = (6)^2$$

$$x+3 = 36$$

$$x = 33$$





$$1 + \sqrt{x} = 1$$

مثال: معادله $2x + \sqrt{2x-1} = 1$ دارای:

(2) جواب نیست.

(1) یک جواب مضاعف است.

(4) دو جواب متمایز است.

(3) ✓ یک جواب است.

$$(\sqrt{2x-1})^2 = (1-2x)^2$$

$$2x-1 = 1-4x+4x^2$$

$$4x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$x = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید. (هماهنگ - ناحیه 7 - تجربی)

$$1 + \sqrt{x+2} = x - 3$$

$$\sqrt{x} = t$$

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x$$

مثال: معادله زیر را حل کنید. (هماهنگ - ناحیه 7 - ریاضی)

$$\frac{1-t}{1+t} = \frac{1-t}{1}$$

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1+t}{1}$$

$$t^2 + 2t + 1 = 1$$

$$t^2 + 2t = 0$$

$$t(t+2) = 0$$

$$t = 0$$

$$t = -2$$

$$x = 0$$

$$x = -4$$

$$1-t=0 \rightarrow 1=t$$

$$\sqrt{x} = 1$$

$$x = 1$$





مثال: اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $2x + a = \sqrt{5x - x^2}$ باشد، آیا این معادله جواب قابل قبول دیگری دارد؟

$$1 + a = \sqrt{20 - 16}$$

$$1 + a = 2 \rightarrow a = -1$$

$$(2x - 4)^2 = (\sqrt{5x - x^2})^2$$

$$4x^2 - 16x + 16 = 5x - x^2$$

$$5x^2 - 21x + 16 = 0 \rightarrow x^2 - 29x + 110 = 0$$

$$(x - 10)(x - 9) = 0$$

$$x = \frac{10}{5} \text{ و } x = \frac{9}{1} = 9$$

مثال: بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی هستند؟

الف) $\sqrt{t} + 2 = 0$ $\sqrt{t} \geq 0$ نمی‌تواند برابر -2 باشد.

ب) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{2x + 3} + 1 = 0$ مجموع درج‌بالاتر از درجه یک است. نمی‌تواند برابر -1 باشد.

پ) $\sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2} = 0$ اگر $x = 1$ شود عبارت زیر را می‌بینیم: $(\sqrt{1 - 1}) + (\sqrt{1 - 2}) = 0 + (\sqrt{-1})$ منفی می‌شود. اگر $x = 2$ شود عبارت زیر را می‌بینیم: $(\sqrt{1 - 2}) + (\sqrt{2 - 2}) = (\sqrt{-1}) + 0$ منفی می‌شود.





مثال: اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ باشد، سایر

صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4x + 4 & x - 2 \\ \hline x^3 - x^2 & \\ \hline -4x + 4 & \\ -4x + 8 & \\ \hline -4 & \end{array}$$

$$x - 2 = 0$$

$$-x^2 + 2x^2$$

$$x^2 - 4x$$

$$-x^2 + 2x$$

$$-4x + 4$$

$$(x - 2)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

$$x = -2$$

مثال: اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$ باشد، سایر

صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 2x + 4 & x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & \\ \hline -2x + 4 & \\ -2x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$p(x) = (x - 2)(x^2 - 2) = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

مثال: اگر $x = 1$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$ باشد، سایر

صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 2x + 2 & x - 1 \\ \hline x^3 - x^2 & \\ \hline -2x + 2 & \\ -2x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$p(x) = (x - 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

مثال: مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$

برابر 2- باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

$$p(-2) = 0$$

$$-8 + 4k - 2 + 2 = 0$$

$$4k = 8 \rightarrow k = 2$$

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

