

نویدپورزکی

فصل چهارم : مثلثات

۱) اگر در یک مثلث $AB = 4$ و $AC = 5$ و $\hat{A} = 60^\circ$ باشد مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

۲) اگر در یک مثلث طول دو ضلع ۳ و ۴ و زاویه بین دو ضلع 45° باشد، مساحت مثلث را بدست آورید.

۳) ۴ رادیان معادل چند درجه است؟

۴) اگر $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ و انتهای کمان α در ناحیه چهارم دایره ی مثلثاتی باشد، مقدار $\sin(\frac{3\pi}{4} - \alpha)$ را بدست آورید.

۵) درستی یا نادرستی هریک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعده این مثلث کوچک تر از اندازه هریک از ساق های آن است.



ب در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با ۳٫۱۴ سانتی‌متر است.

پ انتهای کمان زاویه $\frac{6\pi}{5}$ رادیان در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

ت زاویه‌های $\frac{2\pi}{3}$ رادیان، $\frac{\pi}{9}$ رادیان، $\frac{7\pi}{36}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

۶ آیا نمودار هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق هستند یا خیر؟

الف

$$y = \sin x \quad , \quad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

ب

$$y = \cos x \quad , \quad y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

پ

$$y = \cos x \quad , \quad y = \cos(2\pi - x)$$



ت

$$y = \sin x, \quad y = \sin(5\pi - x)$$

۷ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\sin 60^\circ \times \sin 45^\circ - \cos 60^\circ \times \cos 45^\circ$

ب) $\frac{\cos 30^\circ - \sin 60^\circ}{\tan 60^\circ + \cot 30^\circ}$

پ) $2 \sin 45^\circ \times \cos 45^\circ + \cos 60^\circ$

ت) $\tan 30^\circ \times \cot 60^\circ - \tan 60^\circ \times \cot 30^\circ$

ث) $4 \sin 30^\circ \times \tan 45^\circ + 2 \cos 30^\circ \times \cot 45^\circ$

۸ اگر $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ و انتهای کمان روبرو به زاویه θ در ربع چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بدست آورید.

۹ در هر یک از حالت‌های زیر حدود زاویه‌ی θ را مشخص کنید.

الف) $\begin{cases} \sin \theta < 0 \\ \cot \theta > 0 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \cos \theta < 0 \\ \tan \theta < 0 \end{cases}$

پ) $\begin{cases} \sin \theta > 0 \\ \cos \theta < 0 \end{cases}$

۱۰ معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $(\sqrt{3}, -2)$ گذشته و با جهت مثبت محور x زاویه‌ی 60° می‌سازد.



۱۱) اگر $\cot \theta = -\frac{1}{3}$ و $90^\circ < \theta < 180^\circ$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بدست آورید.

۱۲) اگر اندازه‌ی دو زاویه از مثلثی $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ رادیان باشد، زاویه‌ی سوم این مثلث چند رادیان و چند درجه است؟

۱۳) دایره‌ای به شعاع 6 cm مفروض است. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به کمانی به طول 10 cm چند رادیان و چند درجه است؟

۱۴) در دایره‌ای به شعاع 5 متر طول کمان روبرو به زاویه‌ی 120° چند متر است؟

۱۵) چند دقیقه طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت $\frac{7\pi}{12}$ رادیان دوران کند؟

۱۶) اگر طول کمان دایره‌ای به زاویه مرکزی $\frac{5\pi}{12}$ رادیان برابر $\frac{25\pi}{6}$ باشد، قطر دایره را بدست آورید.

۱۷) اگر دو زاویه از مثلثی $\frac{\pi}{5}$ رادیان و $\frac{2\pi}{5}$ رادیان باشد، نوع مثلث را مشخص کنید.



۱۸) اگر در یک چهارضلعی، سه زاویه بصورت $\frac{7\pi}{12}$ رادیان، $\frac{\pi}{3}$ رادیان و $\frac{5\pi}{6}$ رادیان باشند، زاویه چهارم این چهارضلعی چند رادیان و چند درجه است؟

۱۹) حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $(\sin 6^\circ - \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ)$

ب) $\frac{\cot^2 \frac{\pi}{3} - \cot^2 \frac{\pi}{6}}{\sin^2 \frac{7\pi}{12} + \cos^2 \frac{7\pi}{12}}$

پ) $\frac{\cot \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{6}}$

ت) $(\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{6})(3\cos^2 \frac{\pi}{4} + 2\cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6})$

ث) $\frac{\sin^2(\frac{\pi}{3}) + \tan^2(\frac{\pi}{3})}{\sin^2(\frac{\pi}{4}) + \tan^2(\frac{\pi}{6})} - 3\sin^2 \frac{7\pi}{15} - 3\cos^2 \frac{7\pi}{15}$

۲۰) مقدار عبارت $\sin(-\frac{179\pi}{6}) + \cos(-\frac{179\pi}{6})$ را بدست آورید.

۲۱) از تساوی $2 = \frac{2\sin(\alpha - 3\pi) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}$ ، مقدار $\tan \alpha$ را بدست آورید.



۲۲ بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin 84^\circ = \sin 6^\circ$

ب) $\cos(-324^\circ) = \cos 36^\circ$

پ) $\tan(-1000^\circ) = \tan 80^\circ$

ت) $\sin 875^\circ = \sin 155^\circ$

۲۳ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

ب) $\sin(-45^\circ) \times \tan(-60^\circ) - \cos(-60^\circ) \times \cot(-30^\circ)$

پ) $\frac{\tan(-45^\circ) + 2 \sin(-27^\circ)}{\cos(-36^\circ) - \cot(-45^\circ)}$

ت) $\frac{\sin \frac{5\pi}{6} + 2 \cos 12^\circ}{\tan \frac{3\pi}{4} + \sqrt{2} \cos 135^\circ}$

ث) $\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14}$

ج) $\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \times \cot 225^\circ - 3 \cos 240^\circ \times \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{\tan^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

۲۴ اگر $\tan 20^\circ = \frac{1}{3}$ باشد حاصل $\frac{\sin 16^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 11^\circ + \sin 7^\circ}$ را بدست آورید.

۲۵ اگر $\tan \theta = 2$ باشد، مقدار $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ را بدست آورید.



۲۶ اگر $\tan ۱۵^\circ = \frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ}$ را بدست آورید.

۲۷ اگر $\frac{1}{6} = \frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{\sin(7\pi + \alpha) + \cos(\alpha - \frac{7\pi}{2})}$ باشد، مقدار $\tan \alpha$ را بدست آورید.

۲۸ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\frac{3 \sin ۱۵^\circ - \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{4} + \cos ۳۰^\circ}{\cot(-۱۳۵^\circ) - \sqrt{3} \tan \frac{5^\circ}{6}}$

ب) $\frac{2 \sin \frac{7\pi}{6} \times \tan \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{3}}{\cos^2(\frac{7\pi}{4}) + \cot^2(\frac{4\pi}{3})}$

پ) $2 \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + 7 \sin(\pi - \alpha) - 3 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

ت) $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cot(\pi - \alpha) + 3 \cos(\pi + \alpha) + \tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$

ث) $\sqrt{3} \cot \frac{7\pi}{3} + 2 \sin \frac{20\pi}{3} + 2 \cos \frac{5\pi}{3} \times \tan \frac{50\pi}{3}$

ج) $\frac{\tan ۱۲^\circ \cos ۲۱^\circ - \sin ۲۲۵^\circ \cos ۳۱۵^\circ}{\cot ۱۳۵^\circ \sin ۳۳^\circ - \cos ۲۴^\circ \tan ۲۲۵^\circ}$

چ) $3 \tan \frac{29\pi}{6} - \sin \frac{39\pi}{4} + \cos \frac{27\pi}{4} - \cot \frac{34\pi}{3}$

ح) $5 \sin^2(\frac{7\pi}{4}) + 2 \tan^2(\frac{4\pi}{3}) + 3 \cos(\frac{8\pi}{3}) - \cot^2(\frac{7\pi}{6})$

۲۹ در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویه مناسب قرار دهید:

الف) $\sin x = \cos(۲۰^\circ + x)$

ب) $\tan(x + \frac{\pi}{18}) = \cot(\frac{2\pi}{9} + x)$



۳۰ جدول زیر را کامل کنید.

زاویه x	۱۲°	۱۳۵°	۱۵°	۲۱°	۲۲۵°	۲۴°	۳۰°	۳۳°
نسبت								
$\sin x$								
$\cos x$								
$\tan x$								
$\cot x$								

۳۱ حاصل هریک از عبارت های زیر را بدست آورید.

الف

$$\tan ۱۳۵^\circ + \cot ۱۲^\circ$$

ب

$$\cos(-۲۱^\circ) + \cot(۲۴^\circ)$$

پ

$$\sin ۶۳^\circ + \tan(-۵۴^\circ)$$



ت

$$\cos(-72^\circ) + \cot(-60^\circ) + \tan(72^\circ) - \tan(-60^\circ)$$

ث

$$\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right)$$

ج

$$\frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{-4\pi}{3}\right)}$$

۳۲ آیا نمودار هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق هستند یا خیر؟

الف) $y_1 = \sin(4\pi - x)$, $y_2 = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

ب) $y_1 = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$, $y_2 = \cos(\pi - x)$

پ) $y_1 = \sin(\pi - x)$, $y_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$



۳۳ بُرد هر یک از توابع زیر را در دامنه‌ی داده شده بدست آورید.

الف) $y = 3 \sin x - 1 \quad [0, 2\pi]$

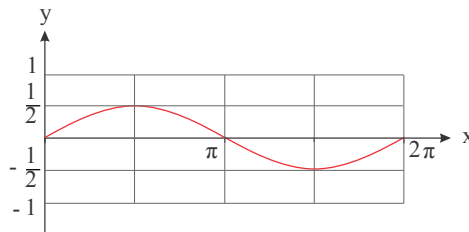
ب) $f(x) = 2 - 4 \cos x \quad [0, 2\pi]$

پ) $h(x) = 3 \sin^2 x - 2 \quad [0, 2\pi]$

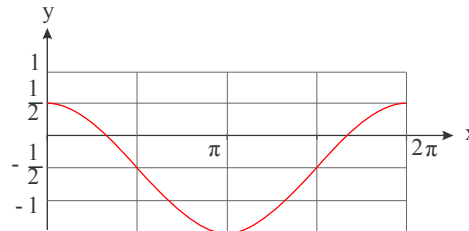
ت) $y = 1 - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad [0, 2\pi]$

۳۴ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

الف) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{1}{2} \sin x$ را نشان می‌دهد.



ب) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \cos x - \frac{1}{2}$ را نشان می‌دهد.



پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور x انتقال دهیم.

ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x قرینه کنیم.

۳۵ بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = -2 \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3$ را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ بدست آورید.





پاسخنامه تشریحی

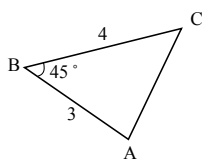
۱

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{S_{\triangle ABC} = 5\sqrt{3}}$$

۲

$$a = 4, c = 3, \hat{B} = 45^\circ \rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{2}}$$



۳

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}} \rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{4}{3.14} \rightarrow \boxed{D \simeq 229.3^\circ}$$

۴

$$\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$$

$$\rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} \xrightarrow{\text{ناحیه ی چهارم}} \boxed{\cos \alpha = \frac{1}{3}}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

۵

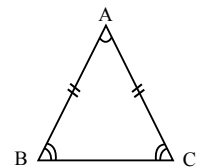
الف

$$\hat{A} = 1 \text{ rad}, \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi, \quad \hat{B} = \hat{C}$$

$$\rightarrow 1 + \hat{B} + \hat{C} = \pi \rightarrow \hat{B} + \hat{C} = \pi - 1$$

$$\rightarrow \hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi - 1}{2} \simeq 1.07 \text{ rad}$$

$$\hat{B} + \hat{C} > \hat{A} \rightarrow AC = AB > BC \rightarrow \text{گزاره درست است}$$



ب

$$r = 1 \text{ cm}, \quad \alpha = \pi \text{ rad}, \quad \ell \simeq 3.14 \text{ cm}$$

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \rightarrow \ell = \alpha \cdot r = \pi \times 1 \simeq 3.14 \text{ cm} \rightarrow \text{گزاره درست است}$$

پ



گزاره نادرست است $\rightarrow$ انتهای کمان $\rightarrow 216^\circ$ در ربع سوم قرار دارد $\rightarrow D = 216^\circ \rightarrow D = \frac{6\pi}{5} \times 180^\circ \rightarrow D = \frac{6\pi}{5} \times 180^\circ$

ت

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi}{36} + \frac{4\pi}{36} + \frac{7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} \neq \pi$$

گزاره نادرست است.

۶

الف

$$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

ب

$$\begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

پ

$$\begin{cases} y_1 = \cos x \\ y_2 = \cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

ت

$$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \sin(5\pi - x) = \sin(\pi + \pi - x) = \sin x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

۷

الف) $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

ب) $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0$

پ) $2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

ت) $\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \frac{1}{3} - 3 = \frac{-8}{3}$

ث) $4 \times \frac{1}{2} \times 1 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = 2 + \sqrt{3}$

۸

$$\sin \theta = -\frac{3}{5} \rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} \rightarrow \cos^2 \theta = \frac{16}{25}$$



$$\rightarrow \boxed{\cos \theta = +\frac{4}{5}}, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \rightarrow \boxed{\tan \theta = -\frac{3}{4}}$$

$$, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} \rightarrow \boxed{\cot \theta = -\frac{4}{3}}$$

الف) $\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta < 0 \rightarrow \theta = \text{ربع ۳ یا ربع ۴} \\ \cot \theta > 0 \rightarrow \theta = \text{ربع ۱ یا ربع ۳} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \theta \text{ در ربع ۳ قرار دارد}$

ب) $\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta < 0 \rightarrow \theta = \text{ربع ۲ یا ربع ۳} \\ \tan \theta < 0 \rightarrow \theta = \text{ربع ۲ یا ربع ۴} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \theta \text{ در ربع ۲ قرار دارد}$

پ) $\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta > 0 \rightarrow \theta = \text{ربع ۱ یا ربع ۲} \\ \cos \theta < 0 \rightarrow \theta = \text{ربع ۲ یا ربع ۳} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \theta \text{ در ربع ۲ قرار دارد}$

$$y = ax + b \rightarrow a = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \rightarrow y = \sqrt{3}x + b \xrightarrow{(\sqrt{3}, -2)}$$

$$-2 = \sqrt{3}(\sqrt{3}) + b \rightarrow -2 = 3 + b \rightarrow b = -5 \rightarrow y = \sqrt{3}x - 5$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ \rightarrow \theta \text{ در ربع دوم قرار دارد}$ $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} \rightarrow \boxed{\tan \theta = -3}$

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \rightarrow 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$\rightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{9}{10} \rightarrow \boxed{\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow 1 + (-3)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow 10 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{10} \rightarrow \boxed{\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{10}}}$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + x = \pi \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{12\pi - 4\pi - 3\pi}{12}$$

$$\rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{12} \text{ رادیان}}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{5\pi}{12}}{\pi} \rightarrow \boxed{D = 75^\circ}$$

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{10}{6} \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{5}{3} \text{ rad}}$$

$$D = \frac{5}{3} \times 180^\circ \rightarrow D = \frac{300^\circ}{\pi} \rightarrow \boxed{D \approx 95.5^\circ}$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{120^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{2\pi}{3} \text{ رادیان}$$



$$l = \alpha \cdot r \rightarrow l = \frac{2\pi}{3} \times 5 \rightarrow l = \frac{10\pi}{3} \text{ متر}$$

۱۵) عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت در ۶ دقیقه یک دور کامل دایره (۲π رادیان) دوران می‌کند، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{t}{60} = \frac{\frac{7\pi}{12}}{2\pi} \rightarrow \frac{t}{60} = \frac{7}{24} \rightarrow t = \frac{7}{24} \times 60 = 17.5 \text{ دقیقه}$$

$$\alpha = \frac{l}{r} \rightarrow r = \frac{l}{\alpha} = \frac{\frac{25\pi}{6}}{\frac{5\pi}{12}} \rightarrow r = \frac{25 \times 12}{5 \times 6} \rightarrow r = 10 \text{ شعاع دایره}$$

$$d = 20 \text{ قطر دایره}$$

$$\hat{A} = \frac{2\pi}{5}, \hat{B} = \frac{\pi}{5} \rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \rightarrow \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5} + \hat{C} = \pi$$

$$\rightarrow \frac{3\pi}{5} + \hat{C} = \pi \rightarrow \hat{C} = \frac{2\pi}{5}, \hat{A} = \hat{C} = \frac{2\pi}{5} \rightarrow \text{مثلث متساوی الساقین}$$

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی} = 360^\circ \rightarrow \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + x = 2\pi$$

$$\rightarrow \frac{7\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} + \frac{10\pi}{12} + x = \frac{24\pi}{12} \rightarrow x = \frac{24\pi}{12} - \frac{21\pi}{12} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ رادیان یا } x = 45^\circ$$

$$\text{الف)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ب)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 - \left(\sqrt{3} \right)^2}{1} = \frac{3}{9} - 3 = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$$

$$\text{پ)} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{6}} = \frac{6}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\text{ت)} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left(3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{4}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ث)} \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{3} \right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} - 3 \left(\sin^2 \frac{7\pi}{15} + \cos^2 \frac{7\pi}{15} \right) = \frac{\frac{3}{4} + 3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} - 3(1) = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{5}{6}} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

$$\sin\left(\frac{-179\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{-179\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{179\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{179\pi}{6}\right)$$

$$= -\sin\left(30\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(30\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$



$$\sin(\alpha - 3\pi) = \sin(\alpha - 3\pi + 4\pi) = \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\rightarrow \frac{-2 \sin \alpha + \sin \alpha}{-\cos \alpha} = 2 \rightarrow \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = 2 \rightarrow \boxed{\tan \alpha = 2}$$

الف) $\sin 84^\circ = \sin(2 \times 36^\circ + 12^\circ) = \sin(12^\circ) = \sin(18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ$

ب) $\cos(-324^\circ) = \cos(36^\circ - 324^\circ) = \cos(36^\circ)$

پ) $\tan(-1000^\circ) = \tan(3 \times 360^\circ - 1000^\circ) = \tan 80^\circ$

ت) $\sin 875^\circ = \sin(2 \times 360^\circ + 155^\circ) = \sin 155^\circ$

الف) $= -\tan(\frac{\pi}{3}) - (-\sin(\frac{\pi}{4})) \cos \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{-4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}$

ب) $= (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\sqrt{3}) - (\frac{1}{2})(-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2}$

پ) $= \frac{-\tan 45^\circ - 2 \sin 27^\circ}{\cos 36^\circ + \cot 45^\circ} = \frac{-1 - 2(-1)}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

ت) $= \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) + 2 \cos(180^\circ - 60^\circ)}{\tan(\pi - \frac{\pi}{6}) + \sqrt{2} \cos(180^\circ - 45^\circ)}$
 $= \frac{\sin \frac{\pi}{6} - 2 \cos 60^\circ}{-\tan \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \cos 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2} - 2(\frac{1}{2})}{-1 - \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{-1 - 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-2} = \frac{1}{4}$

ث) $= \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos(\pi - \frac{5\pi}{14}) + \cos(\pi - \frac{3\pi}{14}) =$
 $= \cancel{\cos \frac{3\pi}{14}} + \cancel{\cos \frac{5\pi}{14}} + \cos \frac{7\pi}{14} - \cancel{\cos \frac{5\pi}{14}} - \cancel{\cos \frac{3\pi}{14}} = \cos \frac{7\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

ج) $= \frac{\sin(\pi + \frac{\pi}{6}) \times \cot(180^\circ + 45^\circ) - 3 \cos(180^\circ + 60^\circ) \tan(\pi + \frac{\pi}{6})}{(\tan(\pi + \frac{\pi}{6}))^2 + (\cos(\pi + \frac{\pi}{6}))^2}$
 $= \frac{-\sin \frac{\pi}{6} \times \cot 45^\circ - 3(-\cos 60^\circ) \times \tan \frac{\pi}{6}}{\tan^2(\frac{\pi}{6}) + (-\cos \frac{\pi}{6})^2} = \frac{-\frac{1}{2} \times 1 - 3(-\frac{1}{2})(1)}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}$



$$= \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$$

۲۴

$$\begin{aligned} \frac{\sin 16^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 11^\circ + \sin 7^\circ} &= \frac{\sin(18^\circ - 2^\circ) - \cos(18^\circ + 2^\circ)}{\cos(9^\circ + 2^\circ) + \sin(9^\circ - 2^\circ)} \\ &= \frac{\sin 2^\circ - (-\cos 2^\circ)}{-\sin 2^\circ + \cos 2^\circ} = \frac{\sin 2^\circ + \cos 2^\circ}{-\sin 2^\circ + \cos 2^\circ} = \frac{\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} + \frac{\cos 2^\circ}{\cos 2^\circ}}{-\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} + \frac{\cos 2^\circ}{\cos 2^\circ}} \\ &= \frac{\tan 2^\circ + 1}{-\tan 2^\circ + 1} = \frac{0.36 + 1}{-0.36 + 1} = \frac{1.36}{0.64} = \frac{136}{64} = \frac{17}{8} \end{aligned}$$

۲۵

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} &= \frac{\sin \theta - (-\cos \theta)}{\sin \theta - (-\sin \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} \\ &= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}{\frac{2 \sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\tan \theta + 1}{2 \tan \theta} = \frac{0.2 + 1}{2(0.2)} = \frac{1.2}{0.4} = \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

۲۶

$$\begin{aligned} \cos 285^\circ &= \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ \\ \sin 525^\circ &= \sin(360^\circ + 165^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} &= \frac{\sin 15^\circ - (-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} \\ &= \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{1.28}{-0.72} = \frac{128}{-72} = -\frac{16}{9} \end{aligned}$$

۲۷

$$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = \cos(\alpha - \frac{3\pi}{2} + \frac{4\pi}{2}) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha$$

$$\rightarrow \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha - \sin \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{-\cos \alpha}{-2 \sin \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 \rightarrow \tan \alpha = 1 \rightarrow \boxed{\tan \alpha = 1}$$

۲۸

$$\begin{aligned} \text{الف) } &= \frac{3 \sin(18^\circ - 3^\circ) - \sqrt{2} \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) + \cos(36^\circ - 6^\circ)}{-\cot(135^\circ) - \sqrt{3} \tan(\pi - \frac{\pi}{6})} \\ &= \frac{3 \sin 15^\circ - \sqrt{2}(-\cos \frac{\pi}{4}) + \cos 30^\circ}{-\cot(180^\circ - 45^\circ) - \sqrt{3}(-\tan \frac{\pi}{6})} = \frac{3 \sin 15^\circ + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + \cos 30^\circ}{\cot 45^\circ + \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$



$$= \frac{3(\frac{1}{\sqrt{3}}) + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}})} = \frac{\frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{3}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ب)} = \frac{2 \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) \times \tan(\pi + \frac{\pi}{6}) - \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) \times \tan(2\pi - \frac{\pi}{6})}{\cos^2(2\pi - \frac{\pi}{6}) + \cot^2(\pi + \frac{\pi}{6})}$$

$$= \frac{2(-\sin \frac{\pi}{6}) \times \tan(\frac{\pi}{6}) - (-\cos \frac{\pi}{6})(-\tan \frac{\pi}{6})}{\cos^2 \frac{\pi}{6} + \cot^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{2(-\frac{1}{2})(1) - (\frac{\sqrt{3}}{2})(\sqrt{3})}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$= \frac{-\frac{2}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{6}{4}} = -\frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{پ)} 2(-\sin \alpha) + 5 \sin \alpha - 3 \sin \alpha = -2 \sin \alpha + 5 \sin \alpha - 3 \sin \alpha = 2 \sin \alpha$$

$$\text{ت)} = -\cos \alpha - \cancel{\cot \alpha} + 3(-\cos \alpha) + \cancel{\cot \alpha} = -4 \cos \alpha$$

$$\text{ث)} = \sqrt{3} \cot(\cancel{\pi} + \frac{\pi}{3}) + 2 \sin(\cancel{\pi} + \frac{2\pi}{3}) + 2 \cos(\cancel{\pi} - \frac{\pi}{3}) \times \tan(\cancel{\pi} + \frac{2\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3} \cot \frac{\pi}{3} + 2 \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2 \cos \frac{\pi}{3} \times \tan(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3} \cot \frac{\pi}{3} + 2(\sin \frac{\pi}{3}) + 2 \cos \frac{\pi}{3} \times (-\tan \frac{\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{3}) + 2(\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2(\frac{1}{2})(-\sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 1$$

$$\text{ج)} = \frac{\tan(110^\circ - 60^\circ) \cos(110^\circ + 30^\circ) - \sin(110^\circ + 45^\circ) \cos(360^\circ - 45^\circ)}{\cot(110^\circ - 45^\circ) \sin(360^\circ - 30^\circ) - \cos(110^\circ + 60^\circ) \tan(110^\circ + 45^\circ)}$$

$$= \frac{-\tan 60^\circ (-\cos 30^\circ) - (-\sin 45^\circ) \cos 45^\circ}{-\cot 45^\circ (-\sin 30^\circ) - (-\cos 60^\circ) \tan 45^\circ} = \frac{(-\sqrt{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - (-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})}{(-1)(-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2})(1)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{چ)} = 3 \tan(\cancel{\pi} + \frac{5\pi}{6}) - \sin(\cancel{\pi} - \frac{\pi}{6}) + \cos(\cancel{\pi} + \frac{3\pi}{6}) - \cot(\cancel{\pi} + \frac{2\pi}{3})$$

$$= 3 \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) - \sin(-\frac{\pi}{6}) + \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) - \cot(\pi + \frac{\pi}{3})$$

$$= 3(-\tan \frac{\pi}{6}) + \sin \frac{\pi}{6} + (-\cos \frac{\pi}{6}) - \cot \frac{\pi}{3}$$



$$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$ج) = 5\sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\tan^2\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos^2\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) - \cot^2\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 5\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 + 2\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2 + 3\cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \left(\cot\frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$= 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2(3) - \frac{3}{2} - 3 = \frac{5}{2} + 6 - \frac{3}{2} - 3 = 4$$

۲۹

$$الف) \rightarrow x + 20^\circ + x = 90^\circ + (k \times 360^\circ)$$

$$k = 0 \rightarrow 2x = 70^\circ \rightarrow \boxed{x = 35^\circ}$$

$$k = 1 \rightarrow 2x + 20 = 450^\circ \rightarrow 2x = 430^\circ \rightarrow \boxed{x = 215^\circ}$$

$$k = 2 \rightarrow 2x + 20 = 810^\circ \rightarrow 2x = 790^\circ \rightarrow x = 395^\circ \rightarrow x = 35^\circ \text{ تکراری}$$

$$ب) x + \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9} + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow 2x + \frac{5\pi}{18} = \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x = \frac{4\pi}{18} \rightarrow 2x = \frac{2\pi}{9} \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{9}}$$

$$k = 1 \rightarrow 2x + \frac{5\pi}{18} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \rightarrow 2x = \frac{19\pi}{18} \rightarrow 2x = \frac{19\pi}{18} \rightarrow \boxed{x = \frac{19\pi}{36}}$$

$$k = 2 \rightarrow 2x + \frac{5\pi}{18} = \frac{\pi}{2} + 4\pi \rightarrow 2x = \frac{38\pi}{18} \rightarrow 2x = \frac{19\pi}{9}$$

$$\rightarrow x = \frac{19\pi}{18} \rightarrow x = 2\pi + \frac{\pi}{9} \rightarrow x = \frac{\pi}{9} \text{ تکراری}$$



زاویه x	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
نسبت								
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

الف

$$\tan ۱۳۵^\circ + \cot ۱۲۰^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) + \cot(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\tan ۴۵^\circ - \cot ۶۰^\circ = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ب

$$\begin{aligned} \cos(-۲۱۰^\circ) + \cot(۲۴۰^\circ) &= \cos(۲۱۰^\circ) + \cot(۲۴۰^\circ) = \cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) + \cot(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ) \\ &= -\cos ۳۰^\circ + \cot ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

پ

$$\begin{aligned} \sin ۶۳۰^\circ + \tan(-۵۴۰^\circ) &= \sin(۷۲۰^\circ - ۹۰^\circ) + \tan(-۳۶۰^\circ - ۱۸۰^\circ) \\ &= \sin(-۹۰^\circ) + \tan(-۱۸۰^\circ) = -\sin ۹۰^\circ - \tan ۱۸۰^\circ = -1 - 0 = -1 \end{aligned}$$

ت

$$\begin{aligned} \cos(-۷۲۰^\circ) + \cot(-۶۰۰^\circ) + \tan(۷۲۰^\circ) - \tan(-۶۰۰^\circ) \\ &= \cos(-۷۲۰^\circ + ۷۲۰^\circ) + \cot(۷۲۰^\circ - ۶۰۰^\circ) + \tan(۷۲۰^\circ + ۰^\circ) - \tan(۷۲۰^\circ - ۶۰۰^\circ) = \\ &= \cos(۰^\circ) + \cot(۱۲۰^\circ) + \tan(۰^\circ) - \tan(۱۲۰^\circ) = \\ &= \cos(۰^\circ) + \cot(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) + \tan(۰^\circ) - \tan(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = \\ &= \cos(۰^\circ) - \cot(۶۰^\circ) + \tan(۰^\circ) + \tan(۶۰^\circ) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + \sqrt{3} = \frac{۳ + ۲\sqrt{3}}{۳} \end{aligned}$$

ث



$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right) &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

ج

$$\begin{aligned}\frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} &= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(2\pi - \frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(2\pi - \frac{3\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} - (-\cos \frac{\pi}{6})}{-\sin \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

الف) $\begin{cases} y_1 = \sin(4\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x \\ y_2 = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin x \end{cases} \rightarrow y_1 \neq y_2 \rightarrow$ دو تابع بر یکدیگر منطبق نیستند

ب) $\begin{cases} y_1 = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = -\cos x \\ y_2 = \cos(\pi - x) = -\cos x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow$ دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند

پ) $\begin{cases} y_1 = \sin(\pi - x) = \sin x \\ y_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = -\sin x \end{cases} \rightarrow y_1 \neq y_2 \rightarrow$ دو تابع بر یکدیگر منطبق نیستند

الف) $-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\times 3} -3 \leq 3\sin x \leq 3 \xrightarrow{-1} -4 \leq 3\sin x - 1 \leq 2$

$\rightarrow -4 \leq y \leq 2 \rightarrow R_y = [-4, 2]$

ب) $-1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\times (-4)} 4 \geq -4\cos x \geq -4 \xrightarrow{+2} 6 \geq 2 - 4\cos x \geq -2$

$\rightarrow 6 \geq y \geq -2 \rightarrow R_f = [-2, 6]$

پ) $-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\text{به توان 2}} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq 3\sin^2 x \leq 3$

۳۲

۳۳



$$\xrightarrow{-2} -2 \leq 3\sin^2 x - 2 \leq 1 \rightarrow -2 \leq y \leq 1 \rightarrow R_h = [-2, 1]$$

$$\text{ت) } -1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \xrightarrow{\times(-2)} 2 \geq -2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -2 \xrightarrow{+1}$$

$$3 \geq 1 - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -1 \rightarrow 3 \geq y \geq -1 \rightarrow R_y = [-1, 3]$$

۳۴) الف - درست، برای رسم نمودار $y = \frac{1}{2}\sin x$ کافی است برد نمودار $y = \sin x$ را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم.

ب - درست، برای رسم نمودار $y = \cos x - \frac{1}{2}$ کافی است نمودار $y = \cos x$ را $\frac{1}{2}$ واحد به سمت پایین انتقال دهیم.

پ - نادرست، برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور y ها انتقال دهیم.

ت - درست

۳۵)

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \leq 1 \xrightarrow{\times(-2)} 2 \geq -2\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \geq -2 \xrightarrow{+3}$$

$$5 \geq -2\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3 \geq 1 \rightarrow 5 \geq y \geq 1$$

$\nearrow$
 $\searrow$

$y_{\max} = 5$

$\searrow$
 $\nearrow$

$y_{\min} = 1$



فصل چهارم : مثلثات

۱) مقدار کسینوس زاویه ی ۱۵° را حساب کنید.

۲) سینوس زاویه ۱۵° درجه را محاسبه کنید.

۳) درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

۴) مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

۱) $\cos ۱۵^\circ$

۲) $\tan ۱۰۵^\circ$

۳) $\sin \frac{\pi}{۱۲}$

۵) فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = \frac{-12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha + \beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

۶) با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

۷) سینوس زاویه 105° را حساب کنید.

۸) α زاویه‌ای حاده و β زاویه‌ای منفرجه است و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ مقدار $\cos(\alpha - \beta)$ را محاسبه کنید.

۹) سینوس زاویه‌ی $22,5^\circ$ را حساب کنید.

۱۰) نشان دهید برای هر زاویه‌ی α داریم:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

۱۱) اگر α, β زاویه‌هایی در ربع سوم باشند و $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ ، مقدار $\sin(\alpha + \beta)$ را محاسبه کنید.

۱۲) مقدار تانژانت زاویه 105° را حساب کنید.

۱۳) با استفاده از فرمول $\sin(\alpha + \beta)$ و $\sin(\alpha - \beta)$ نشان دهید:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

۱۴) اگر α زاویه‌ای در ربع اول و β زاویه‌ای در ربع سوم باشد که $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ ، مقدارهای $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$ و $\tan(\alpha + \beta)$ را تعیین کنید.

۱۵) اگر $\tan \alpha = 3$ و $\tan(\alpha + \beta) = 2$ باشد، مقدار $\cot \beta$ را بیابید.

پاسخنامه تشریحی

۱) می‌دانیم $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

۲)

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

۳)

$$\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)}{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2} = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \sin x \cos^2 x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

۴)

$$\sin 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$2) \tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{1 - 3} = \frac{1 + 3 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

$$3) \sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{4\pi - 3\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

۵) الف)

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \beta = -\frac{12}{13} \rightarrow \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \sin \beta = \pm \frac{5}{13} \xrightarrow{\beta \text{ ربع دوم}} \sin \beta = \frac{5}{13}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-36 + 20}{65} = -\frac{16}{65}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-48 + 15}{65} = -\frac{33}{65}$$

(ب)

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \end{array} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2} \right\} \Rightarrow \pi < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) < 0$$

$\alpha + \beta$ در ناحیه سوم قرار دارد.

۶

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

۷ می‌دانیم:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

۸

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ربع اول } \alpha} \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

۹

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 45^\circ = 1 - 2\sin^2 22.5^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2 22.5^\circ \Rightarrow$$

$$2\sin^2 22.5^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 22.5^\circ = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

۱۰

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1\end{aligned}$$

۱۱

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{-4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5} \\ \cos \beta &= \frac{-5}{13} \Rightarrow \sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13} \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \left(\frac{-4}{5}\right)\left(\frac{-5}{13}\right) + \left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) = \frac{56}{65}\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{می دانیم} \quad (12)$$

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \times 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

۱۳

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\rightarrow \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta \rightarrow \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

۱۴

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \beta = -\frac{5}{13}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\alpha} \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

در ربع اول

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin \beta = \pm \frac{12}{13} \xrightarrow{\beta} \sin \beta = -\frac{12}{13}$$

در ربع سوم

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{12}{5}$$

$$\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = [\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha] [\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta]$$

$$= \left[\frac{3}{5} \times \frac{-5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{-12}{13}\right] \left[\frac{4}{5} \times \frac{-5}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{-12}{13}\right] = \left(-\frac{63}{65}\right) \times \left(-\frac{56}{65}\right) = \frac{3528}{4225}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{12}{5}} = \frac{\frac{63}{20}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{63}{16}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = 2 \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 2 \Rightarrow \frac{3 + \tan \beta}{1 - 3 \tan \beta} = 2$$

$$3 + \tan \beta = 2 - 6 \tan \beta \Rightarrow 7 \tan \beta = -1 \rightarrow \tan \beta = -\frac{1}{7} \Rightarrow \cot \beta = -7$$