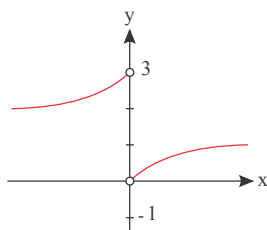


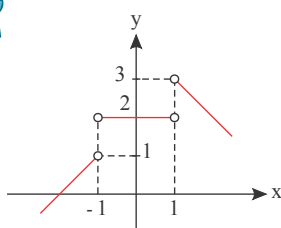
نوید پورزکی

فصل ششم: حد و پیوستگی

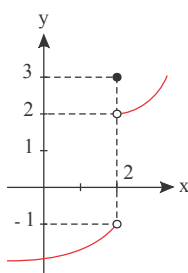
۱ شکل زیر، نمودار تابع f است. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ را محاسبه کنید.



۲ با توجه به شکل زیر مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ را بدست آورید.

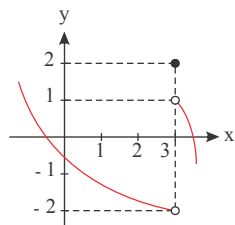


۳ شکل زیر نمودار تابع f است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2)$ را محاسبه کنید.

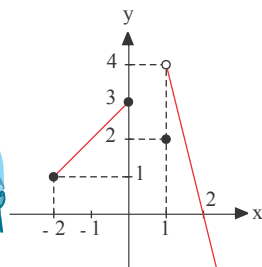




۴ اگر $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + f(0)$ را بدست آورید.



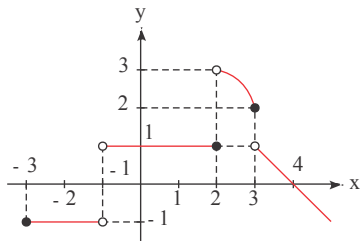
۵ شکل مقابل نمودار تابع f است، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + f(3)$ را بدست آورید.



۶ با کمک نمودار زیر مقدار عبارت $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + 2f(1)$ را بدست آورید.



۷ نمودار تابع f بصورت زیر رسم شده است، حدهای خواسته شده را بدست آورید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

ث) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

چ) $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x)$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x)$

خ) $f(-3)$

د) $f(2)$

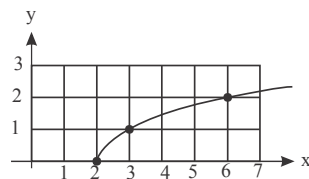
ذ) $f(3)$

ر) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ز) $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x)$

۸ اگر $f(x) = \sqrt{8 + 2x}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow (-4)} f(x)$ را بدست آورید.

۹ دربارهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x - 2}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:



ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ت) $f(2)$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



۱۰) حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 7} (-3)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x - 7)$ پ) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 4x + 5)$

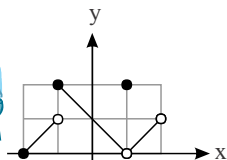
ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x^2 - x}$ ج) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

چ) $\lim_{x \rightarrow -2} [x]$ ح) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$ خ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 7}$

د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$ ذ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 5}$ ر) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 2}$

ز) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 2}{[x] + 1}$ ژ) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos x$ س) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)$

ش) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{[x]}$ ض) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}$ ص) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + [x])$



۱۱) برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ ب) $f(1) = 2$

پ) $f(2) = 1$ ت) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

چ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد. ح) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد.

۱۲) آیا حد تابع زیر در $x = 2$ موجود است؟

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x > 2 \\ -2 & x = 2 \\ x - 3 & x < 2 \end{cases}$$

۱۳) اگر $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود است؟



۱۴) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. آیا f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ آیا $f(0)$ موجود است؟

۱۵) مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطهٔ ۲ مساوی ۱- باشد.

۱۶) تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۳ حد نداشته باشد. $f(3) = 1$

۱۷) تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۲ تعریف نشده باشد. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

۱۸) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 0 \\ -2x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

۱۹) حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$

ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x}$



۲۰ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 9}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{8x^2 - 2x - 1}$

۲۱ حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x + [x])$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x] + 1}{3x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (3[x] - x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - [x]}{2[x]}$



۲۲) حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)} (2x^2 + 5x)(6x - 1)$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 - |x|}{|x| + 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{|x^2 - 1|}{|x| + 4}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-6}}{x+3}$

چ) $\lim_{x \rightarrow 5} (2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x+4} - 1)$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 + 5x + 8}{x^2 + 2}$

۲۳) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2 - x^3}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x^2 + 5x + 2}{2x^2 + x - 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 4x - 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$



۲۴ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + 1}{3 - \sin x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sqrt{2} (\sin x + \cos x)^3$

ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + 2 \cos x}{2 \sin^2 x - \cos x}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (1 - \sin^2 x) \times \tan^2 x$

۲۵ با توجه به نمودار زیر، پیوستگی تابع را در نقاط خواسته شده بررسی کنید.

الف) $x = -2$

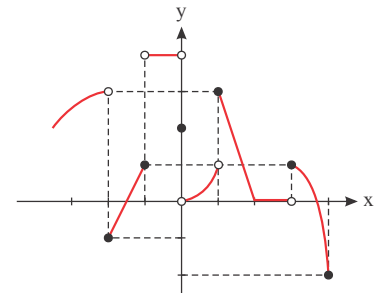
ب) $x = -1$

پ) $x = 0$

ت) $x = 1$

ث) $x = 2$

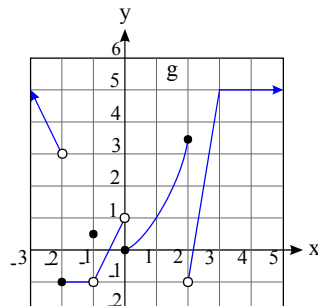
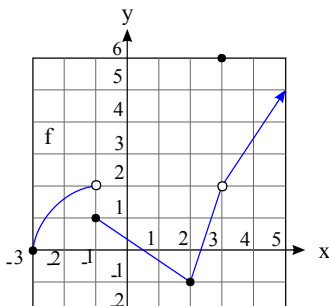
ج) $x = 3$



۲۶ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x - 3 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ -x + 2 & x > 2 \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



۲۷ با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ پ) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x))$ ث) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$ ج) $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x))$

چ) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^4$ ح) $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^2$

خ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ د) $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x))$

۲۸ نمودار دو تابع $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ و $g(x) = 1$ را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ موجود است؟ (چرا؟) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ چگونه؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

۲۹ اگر m یک عدد صحیح باشد، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow m^+} [x]$

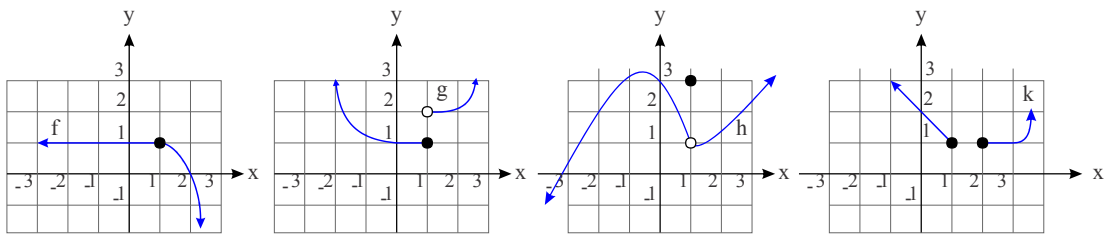
ب) $\lim_{x \rightarrow m^-} [x]$

پ) $\lim_{x \rightarrow m} [x]$

۳۰ با توجه به نمودار تابع $f(x) = [x]$ ، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



۳۱) کدام یک از توابع زیر در $x = 1$ پیوسته است؟



۳۲) اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & , x < 2 \\ a & , x = 2 \\ x + 3 & , x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار a را بدست آورید.

۳۳) در تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & , x > 1 \\ 5 & , x = 1 \\ -2x + b & , x < 1 \end{cases}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در $x = 1$ پیوسته باشد.

۳۴) مقدار a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & , x < 2 \\ 7 & , x = 2 \\ 2x + 3b & , x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته باشد.

۳۵) مقادیر a و b را طوری بدست آورید که تابع $f(x) = \begin{cases} 2 \cos x + a & , x < 0 \\ -2 & , x = 0 \\ 3x + 2b & , x > 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد.



۳۶ مقدار a را طوری بدست آورید که تابع زیر در نقطه $x = 3$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}, & x < 3 \\ x^2 - ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

۳۷ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}, & x > 0 \\ a \sin(x + \frac{\pi}{6}), & x \leq 0 \end{cases}$ به ازای چه مقداری از a در $x = 0$ پیوسته است؟

۳۸ توابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این تابع‌ها را در $x = 3$ بررسی کنید.

۳۹ مقادیر a و b را طوری بدست آورید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2[x], & x > 1 \\ a + 3, & x = 1 \\ bx + 6, & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد.

۴۰ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد، مقدار a را بدست آورید.

۴۱ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ -x + 3, & x > 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ چه نوع پیوستگی دارد؟



۴۲) هر یک از توابع زیر در چه بازه‌ای پیوسته هستند؟

الف) $f(x) = x^3 - 5x$

ب) $g(x) = \sin x$

پ) $h(x) = \log x$

ت) $k(x) = \sqrt{x-6}$

۴۳) در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع $f(t)$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می‌شود:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 7$$

سال $\frac{1}{2} = \frac{6}{12} \rightarrow 6$ ماه

الف) $f(2)$ و $f(5)$ را بیابید.

ب) آیا f در بازه $[0, 10]$ پیوسته است؟

۴۴) تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2 \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ چه نوع پیوستگی دارد؟

۴۵) تابعی مثال بنزید که حد آن در نقطه $x = 1$ مساوی ۱- باشد؛ ولی تابع در ۱ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.



پاسخنامه تشریحی

۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 3 = 3$$

۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$

۳

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1, f(2) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2) = 2 + (-1) + 3 = 4$$

۴

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, f(0) = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + f(0) = -1 + 1 + 1 = 1$$

۵

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2, f(3) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + f(3) = 1 + (-2) + 2 = 1$$

۶

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3, f(1) = 2$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + 2f(1) = 4 - 4(3) + 2(2) = -4$$

۷) نمودار تابع f بصورت زیر رسم شده است، حدهای خواسته شده را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = -1$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = \text{وجود ندارد}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$

خ) $f(-3) = -1$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$

د) $f(2) = 1$

ث) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1$

ذ) $f(3) = 2$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -1$

ر) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

ز) $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = -1$

۸

$$1 + 2x \geq 0 \rightarrow 2x \geq -1 \rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \rightarrow D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \sqrt{1 + 2x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \sqrt{1 + 2x} = \text{وجود ندارد}$$

۹

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$



ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ وجود ندارد

ت) $f(2) = 0$

الف) $\lim_{x \rightarrow 7} (-3) = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x - 7) = -2(0) - 7 = 0 - 7 = -7$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 4x + 5) = 3(-1)^2 - 4(-1) + 5 = 3 + 4 + 5 = 12$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{3^2 - 3(3)}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x^2 - x} = \frac{0}{2(0)^2 - 0} = \frac{0}{0}$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{(-2)^3 + 8}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$

چ) $\lim_{x \rightarrow -2} [x] =$ وجود ندارد $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} [x] = [(-2)^+] = -2 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} [x] = [(-2)^-] = -3 \end{cases}$

ح) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0^+} = 0$

خ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 7} = \sqrt{2 + 7} = \sqrt{9} = 3$

د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} = \sqrt{0^-} =$ وجود ندارد

ذ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 5} = \sqrt{2 + 5} = \sqrt{7}$

ر) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 2} = \sqrt{1 - 2} = \sqrt{-1}$ وجود ندارد

ز) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 2}{[x] + 1} = \frac{3^+ - 2}{[3^+] + 1} = \frac{3 - 2}{3 + 1} = \frac{1}{4}$

ژ) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \cos x = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

س) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

ش) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{[x]} = \frac{(-2)^+}{[(-2)^+]} = \frac{-2}{-2} = 1$

ص) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1 - (1)^2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$

ض) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + [x]) =$ وجود ندارد $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + [x]) = 0^+ + [0^+] = 0 + 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + [x]) = 0^- + [0^-] = 0 + (-1) = -1 \end{cases}$



۱۱

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ (نادرست است زیرا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$)

ب) $f(1) = 2$ درست

پ) $f(2) = 1$ (نادرست است زیرا این حد وجود ندارد)

ت) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$ درست

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ نادرست

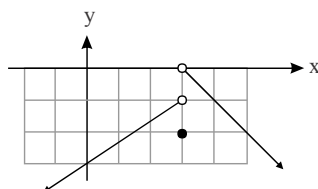
ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ درست

چ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ وجود ندارد درست

ح) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$ وجود ندارد درست

۱۲

ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم و داریم:

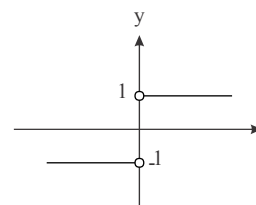


$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ وجود ندارد

۱۳

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

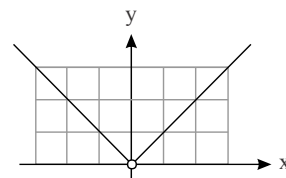
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ وجود ندارد



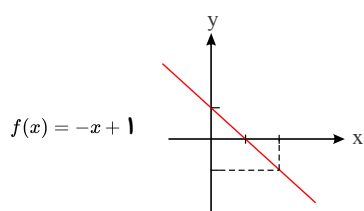
۱۴

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$f(0) =$ وجود ندارد

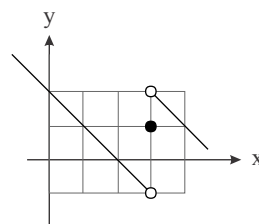


۱۵



$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x < 3 \\ 1 & x = 3 \\ -x + 5 & x > 3 \end{cases}$$

۱۶

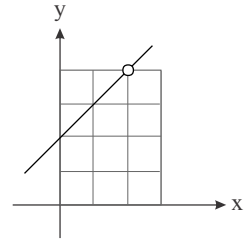


حد و پیوستگی

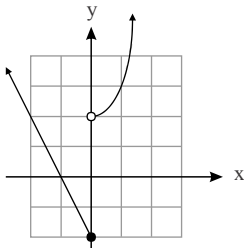


۱۷

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$



۱۸



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

۱۹

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{0}{0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{-\sqrt{2}(\cos x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{-\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \frac{1 - 1}{(0)^2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos)x \cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^2 x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{(1)^2}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \frac{(0)^2}{1 - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}{1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x}$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1)}{-(2 \sin x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x + 1}{-1} = \frac{2(\frac{1}{2}) + 1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

۲۰

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6} = \frac{2(-2)^2 - 8}{(-2)^2 - (-2) - 6} = \frac{0}{0}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x^2 - 4)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x-2)}{(x-3)} = \frac{2(-2-2)}{-2-3} = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(1)^2 - 1}{(1)^2 - 4(1) + 3} = \frac{0}{0}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-3} = \frac{1}{1-3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(-2)^2 + (-2) - 2}{(-2)^2 + 3(-2) + 2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2-1}{-2+1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 + 3x^2}{x^2 - 9} = \frac{(-3)^2 + 3(-3)^2}{(-3)^2 - 9} = \frac{0}{0}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2}{x-3} = \frac{(-3)^2}{-3-3} = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{8x^2 - 2x - 1} = \frac{4(\frac{1}{2})^2 - 1}{8(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) - 1} = \frac{0}{0}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(4x+1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x+1}{4x+1} = \frac{2(\frac{1}{2}) + 1}{4(\frac{1}{2}) + 1} = \frac{2}{3}$$

۲۱

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x + [x]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 2 + [2^-] = 2 + 1 = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x] + 1}{3x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] + 1}{\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x} = \frac{[2^+] + 1}{3(2)} = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (3[x] - x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3[x] - \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 3[1^-] - 1 = 3(0) - 1 = -1$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - [x]}{2[x]} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3^-} x - \lim_{x \rightarrow 3^-} [x]}{\lim_{x \rightarrow 3^-} 2[x]} = \frac{3 - [3^-]}{2[3^-]} = \frac{3-2}{2(2)} = \frac{1}{4}$



$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 4)} = \frac{1^2 - 1}{(1)^2 - 2(1) + 4} = \frac{0}{3}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-1)} (2x^2 + 5x)(6x - 1) = \lim_{x \rightarrow (-1)} (2x^2 + 5x) \times \lim_{x \rightarrow (-1)} (6x - 1) \\ = (2(-1)^2 + 5(-1)) \times (6(-1) - 1) = (2 - 5) \times (-7) = (-3) \times (-7) = 21$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 - |x|}{|x| + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow (-3)} x^2 - |x|}{\lim_{x \rightarrow (-3)} |x| + 1} = \frac{(-3)^2 - |-3|}{|-3| + 1} = \frac{9 - 3}{3 + 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{|x^2 - 1|}{|x| + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow (-2)} |x^2 - 1|}{\lim_{x \rightarrow (-2)} |x| + 4} = \frac{|(-2)^2 - 1|}{|-2| + 4} = \frac{3}{2 + 4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{x+2}}{\lim_{x \rightarrow 7} (x-4)} = \frac{\sqrt{7+2}}{7-4} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-6}}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x-6}}{\lim_{x \rightarrow 1} x+3} = \frac{\sqrt{2(1)-6}}{1+3} = \frac{\sqrt{-4}}{4} = \text{حد وجود ندارد}$$

$$\text{چ) } \lim_{x \rightarrow 5} (2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x+4} - 1) = \lim_{x \rightarrow 5} (2\sqrt{x} + 1) \times \lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x+4} - 1) \\ = (2\sqrt{5} + 1)(\sqrt{9} - 1) = (2\sqrt{5} + 1)(2) = 4\sqrt{5} + 2$$

$$\text{ح) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 + 5x + 8}{x^2 + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow (-2)} (2x^2 + 5x + 8)}{\lim_{x \rightarrow (-2)} (x^2 + 2)} = \frac{2(-2)^2 + 5(-2) + 8}{(-2)^2 + 2} \\ = \frac{8 - 10 + 8}{4 + 2} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2} = \frac{(1)^2 - 3(1) + 2}{1^2 - 2} = \frac{0}{-1} \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+2} = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2 - x^3} = \frac{4(0)^2}{2(0)^2 - (0)^3} = \frac{0}{0} \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2(2-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{2-x} = \frac{4}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x^2 + 5x + 2}{x^2 + x - 1} = \frac{3(-1)^2 + 5(-1) + 2}{(-1)^2 + (-1) - 1} = \frac{0}{-1} \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(3x+2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x+2}{x-1} = \frac{3(-1)+2}{(-1)-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(3)^3 - 27}{3^2 - 2(3) - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x+1} = \frac{3^2 + 3(3) + 9}{3+1} = \frac{27}{4}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 4x - 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2} = \frac{3(1)^3 + 4(1) - 3(1)^2 - 4}{(1)^2 + 1 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2(x-1) + 4(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x^2 + 4)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4}{x+2} = \frac{3(1)^2 + 4}{1+2} = \frac{7}{3}$$



الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + 1}{3 - \sin x} = \frac{2(1) + 1}{3 - 0} = \frac{3}{3} = 1$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} = \frac{2 \times 1 \times 0}{1 + (0)^2} = \frac{0}{1} = 0$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sqrt{2}(\sin x + \cos x)^3 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \sqrt{2}(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$

ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + 2 \cos x}{2 \sin^2 x - \cos x} = \frac{(1)^2 + 2(0)}{2(1)^2 - (0)} = \frac{1 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (1 - \sin^2 x) \times \tan^2 x = (1 - (\frac{1}{2})) \times (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = (1 - \frac{1}{4}) \times \frac{3}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

الف) $x = -2 \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -1, \quad f(-2) = -1$

تابع f در $x = -2$ پیوستگی راست دارد

ب) $x = -1 \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 4, \quad f(-1) = 1$

تابع f در $x = -1$ پیوستگی چپ دارد

پ) $x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 2$

تابع f در $x = 0$ ناپیوسته است

ت) $x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \quad f(1) = 3$

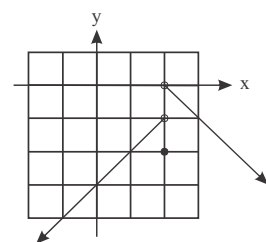
تابع f در $x = 1$ پیوستگی راست دارد

ث) $x = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0, \quad f(2) = 0$

تابع f در $x = 2$ پیوسته است

ج) $x = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1, \quad f(3) = 1$

تابع f در $x = 3$ پیوستگی راست دارد



تابع f در $x = 2$ ناپیوسته است و در سایر نقاط ناپیوسته است. (۲۶)

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$ ت) $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x)) = 2 + 5 = 7$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$ وجود ندارد $+(-1) =$ وجود ندارد



وجود ندارد = (وجود ندارد) $5 + 2(-1) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 5 \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x))$ ج

ج $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^2$ ح

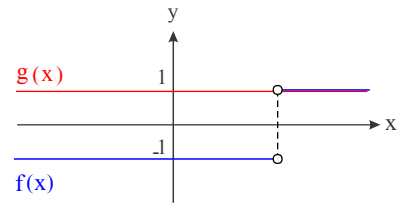
وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-1}{\text{وجود ندارد}}$ خ

د $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x)) = 5 \times 5 = 25$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}, \quad g(x) = 1$$

وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1$$



در نقاط $x > 3$ حد دو تابع با هم برابرند.

الف $\lim_{x \rightarrow m^+} [x] = m$

ب $\lim_{x \rightarrow m^-} [x] = m - 1$

وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow m} [x]$ پ

تابع $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح پیوسته نیست و در سایر نقاط پیوسته است. ۳۰

۳۱

تابع f در $x = 1$ پیوسته است.

توابع g, h, k در $x = 1$ پیوسته نیستند.

۳۲

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x - [x] = 3(2) - [2^-] = 6 - 1 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 3 = 2 + 3 = 5, f(2) = a$$

تابع f در $x = 2$ پیوسته است پس داریم: $a = 5$

۳۳

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + 3 = a(1)^2 + 3 = a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2x + b = -2(1) + b = -2 + b, f(1) = 5$$



$$\rightarrow \begin{cases} a + 3 = 5 \rightarrow \boxed{a = 2} \\ -2 + b = 5 \rightarrow \boxed{b = 7} \end{cases}$$

۳۴

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x + 3b = 2(2) + 3b = 4 + 3b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax - 1 = a(2) - 1 = 2a - 1, f(2) = 7$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4 + 3b = 7 \rightarrow 3b = 3 \rightarrow \boxed{b = 1} \\ 2a - 1 = 7 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow \boxed{a = 4} \end{cases}$$

۳۵

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 2b = 3(0) + 2b = 2b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \cos x + a = 2(1) + a = 2 + a, f(0) = -2$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2b = -2 \rightarrow \boxed{b = -1} \\ 2 + a = -2 \rightarrow \boxed{a = -4} \end{cases}$$

۳۶

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}, & x < 3 \\ x^2 - ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - ax = (3)^2 - a(3) = 9 - 3a$$

$$f(3) = 3^2 - a(3) = 9 - 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{-(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)(x + 3)}{-(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 3}{-1} = -6$$

$$\rightarrow 9 - 3a = -6 \rightarrow 15 = 3a \rightarrow \boxed{a = 5}$$

۳۷

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = a \sin\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a}{2}, f(0) = \frac{a}{2}$$

$$\rightarrow \frac{a}{2} = 2 \rightarrow \boxed{a = 4}$$

۳۸

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x - 3)}(x + 3)}{\cancel{(x - 3)}} = 6, f(3) = 6$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ بنابراین تابع f در $x = 3$ پیوسته است.



$$g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 6$$

وجود ندارد $g(3) = 6$ بنابراین تابع g در $x = 3$ پیوسته نیست.

۳۹

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2[x] = (1)^2 + 2[1^+] = 1 + 2(1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} bx + 6 = b(1) + 6 = b + 6, f(1) = a + 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + 3 = 3 \rightarrow a = 0 \\ b + 6 = a + 3 \rightarrow b + 6 = 3 \rightarrow b = -3 \end{cases}$$

۴۰

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$, f(1) = a \rightarrow a = -2$$

۴۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 3) = -1 + 3 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$$

$$f(1) = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

تابع f در $x = 1$ پیوستگی راست دارد

۴۲ الف $f(x) = x^3 - 5x$ چون تابع چند جمله‌ای است و دامنه آن هم $\mathbb{R}$ می‌باشد پس تابع f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته می‌باشد.

ب $g(x) = \sin x$ تابع مثلثاتی $\sin x$ دارای دامنه‌ای بصورت $\mathbb{R}$ می‌باشد و تمام بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته می‌باشد.

پ $h(x) = \log x$ تابع $\log x$ دارای دامنه‌ای بصورت $\mathbb{R}^+$ می‌باشد و در تمام بازه $(0, +\infty)$ پیوسته می‌باشد.

ت $k(x) = \sqrt{x-6}$ تابع $\sqrt{x-6}$ دارای دامنه‌ای بصورت $\mathbb{R}^{\geq 6}$ می‌باشد و در تمام بازه $[6, +\infty)$ پیوسته می‌باشد.

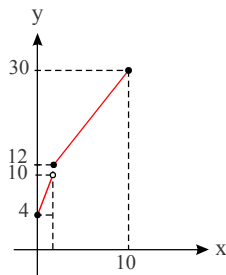
۴۳

$$f(t) = \begin{cases} 6t + 4 & 0 \leq t < 1 \\ 2t + 10 & 1 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

$$\text{الف } f(2) = 2(2) + 10 = 14$$

$$f(5) = 2(5) + 10 = 20$$

ب) با توجه به نمودار رسم شده مشاهده می‌شود که تابع f در بازه $[0, 10]$ پیوسته نیست.





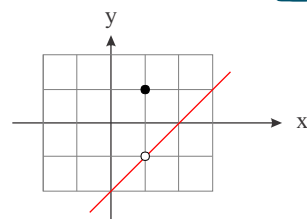
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x + 2 \cos x = 1 + 2(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} -\cos x = -(0) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

تابع f در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوستگی چپ دارد





فصل پنجم : حد و پیوستگی

۱) حدهای زیر را محاسبه کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{[x] + [-x]}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x - 1}{x^2 - x}$

۲) حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x^2 + 9} + \frac{x^2 + x}{x} \right)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$

۳) حد زیر را محاسبه کنید.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1}$

۴ حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x + 4}{2x^2 - 2}$$

۵ حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

۶ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 - 12}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x - 10}{x^2 - 2x}$

۷ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$

۸ حد توابع زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + x - 2}$

۹) حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 8}$

۱۰) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^9 - 1}$

۱۱) اگر تابع $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2 + x - 6}$ وقتی $x \rightarrow 2$ دارای حد باشد، حاصل این حد را بیابید.

۱۲) اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + b}{x^3 + 8} = 4$ ، مقادیر a و b را بیابید.

۱۳) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^4 + (x-1)^3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^5 + (x-2)^2}{3(x-2)^4 + 2(x-2)^2}$

۱۴) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - ax + b} = 1$ آن گاه a و b را بیابید.

۱۵ آیا تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$ در $a = 0$ حد دارد؟ چرا؟

۱۶ اگر $f(x) = \frac{x+1}{2x^2-x-1}$ و $g(x) = \frac{2x+1}{x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) \cdot g(x)$ را بیابید.

۱۷ حد تابع زیر را در بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{2x^2 + 2x}$$

۱۸ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 3x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

۱۹ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$$

۲۰) حد تابع زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$$

۲۱) حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

۲۲) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{2x - 2}$

۲۳) حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

۲۴) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x^2 + 2x}$

۲۵) اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax - 2a}{\sqrt{3x - 5} - 1} = 3$ آن گاه a را بیابید.

۲۶) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x^2 + 2x - 8}$

۲۷) مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{|1 - \cos x|}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{x \sin x}$

ث) $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi}$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6x - 2\pi}$

ح) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{x - 1}$

۲۸) حد زیر را بدست آورید.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{2 - 2 \cos x}}$

۲۹) حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x - \pi)}{x - \frac{\pi}{3}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x}$

۳۰) حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$

۳۱) حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x - \pi)}{x - \frac{\pi}{2}}$

۳۲) حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$

۳۳) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin 5x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin \frac{x}{2}}$

۳۴) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\tan^2 x}$

۳۵) حاصل حدهای زیر را بیابید.

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{2x}$

د) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan 3x}{2x + \sin 4x}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 4x}$

پاسخنامه تشریحی

۱

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{[x] + [-x]} = \frac{0^+}{-1} = 0$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

توجه کنیم که چون $3^+ \notin \mathbb{Z}$ ، بنابراین مقدار تابع $[x] + [-x]$ در همسایگی راست $x = 3$ برابر -1 است.
(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x - 1}{x^2 - x} = \frac{0}{0}$$

عامل ابهام $(x - 1)$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 + 2x + 1)(x - 1)}{x(x - 1)} = \frac{5}{1} = 5$$

۲

$$\text{(الف)} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 9} + \frac{x(x+1)}{x} = \sqrt{9} + 1 = 4$$

$$\text{(ب)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}$$

۳

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - 2x^2 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) - 2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2x - 2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-3}{2}$$

۴

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x + 4}{2x^2 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 4)}{2(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - (-1) + 4}{2(-1 - 1)} = \frac{6}{-4} = \frac{-3}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x + 4 & x + 1 \\ -x^2 - x^2 & x^2 - x + 4 \\ \hline & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ \hline & \circ \end{array}$$

٥

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x+1} = \frac{-2}{2} = -1$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = \frac{6}{3} = 2$

٦

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{3(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{3(x+2)} = \frac{12}{12} = 1$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8 + x - 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4) + (x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4 + 1)}{x(x-2)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 5}{x} = \frac{4 + 4 + 5}{2} = \frac{13}{2}$

٧

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1 - 2x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1) - 2(x+1)}{x^2 - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1 - 2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{x-1} = \frac{1 + 1 - 1}{-1 - 1} = \frac{-1}{2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 + 2x - 2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) + 2(x-1)}{x^2 + x - 2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1 + 2)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 3}{x+2} = \frac{5}{3}$

٨

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+5}{x+1} = \frac{7}{2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-4}{x-1} = \frac{-6}{-3} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1 + x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1) + (x+1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1 + 1)}{(x+1)(x-1)}$$

(الف)

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 2}{x - 1} = \frac{1 + 1 + 2}{-2} = -2$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x^2 + 2x + 4} = \frac{5}{12}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^9 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^5 + x^4 + \dots + x + 1)}{(x-1)(x^8 + x^7 + \dots + x + 1)} = \frac{\overbrace{1+1+\dots+1}^{\text{۶ تا}}}{\underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{۹ تا}}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

۱۱) زمانی که $x \rightarrow 2$ مخرج تابع $f(x)$ صفر می‌شود، پس باید صورت هم صفر شود تا مبهم صفر صفر ایجاد شود پس داریم:

$$ax + 4 = 0 \xrightarrow{x=2} 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x + 4}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{x+3} = \frac{-2}{5}$$

۱۲) از آنجائیکه $x \rightarrow -2$ مخرج کسر را صفر می‌کند پس باید صورت کسر هم صفر شود تا مبهم صفر صفر تولید شود بنابراین داریم:

$$x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{x=-2} 4 - 2a + b = 0 \Rightarrow b = 2a - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + b}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax + 2a - 4}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4 + ax + 2a}{x^3 + 8}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2) + a(x+2)}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2+a)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 2 + a}{x^2 - 2x + 4} = \frac{-4 + a}{12} = 4 \Rightarrow -4 + a = 48 \Rightarrow \boxed{a = 52}$$

$$b = 2a - 4 = 2 \times 52 - 4 = 104 - 4 = 100 \Rightarrow \boxed{b = 100}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^4 + (x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^3((x-1) + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1+1} = 1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^5 + (x-2)^2}{3(x-2)^4 + 2(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2((x-2)^3 + 1)}{(x-2)^2(3(x-2)^2 + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3 + 1}{3(x-2)^2 + 2} = \frac{1}{2}$$

۱۴) چون صورت کسر در $x \rightarrow 2$ صفر می‌شود پس باید مخرج هم صفر شود تا صفر صفرم ایجاد شده و پس از رفع ابهام حاصل حد عدد ۱ شود. پس داریم:

$$x^2 - ax + b = 0 \xrightarrow{x=2} 4 - 2a + b = 0 \Rightarrow b = 2a - 4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - ax + 2a - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2) - a(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2-a} = \frac{1}{4-a} = 1 \Rightarrow 4-a=1 \Rightarrow \boxed{a=3} \end{aligned}$$

$$b = 2a - 4 = 2 \times 3 - 4 = 2 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

۱۵) تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ حد دارد هرگاه $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

بنابراین تابع $f(x)$ در $x=0$ حد ندارد.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\frac{x+1}{2x^2 - x - 1} \times \frac{2x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(x+1)(2x+1)}{(2x+1)(x-1)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x-1)x} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2}}{(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

۱۷) عامل ابهام $x+1$ است.

صورت و مخرج را در $(\sqrt{x+2}+1)$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{2x(x+1)} \times \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2-1}{2x(x+1)(\sqrt{x+2}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)}{2x(x+1)(\sqrt{x+2}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2x(\sqrt{x+2}+1)} = \frac{1}{-2 \times 2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-1)}{3x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{3x} = \frac{-2-1}{-3} = 1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x^2 - 4)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2(x+2) = 2 \times 4 = 8$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} \times \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{16}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \times \frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-2x-1)(2+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3+\sqrt{2x+1}}{2(2+\sqrt{x})} = \frac{3+3}{2 \times 4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1+x}{x(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{1 \times 2} = 1$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \times \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \times \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$$

۱۹

۲۰

۲۱

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x^2 + x - 6)(x + \sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x+3)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{3}{5 \times 4} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{2x-2} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-\sqrt{x}} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)(x+\sqrt{x})}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x+\sqrt{x})}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x+\sqrt{x})}{x} = \frac{2 \times 2}{1} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}+2 = 4$$

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{(x-1)}^2}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-1} \\ \text{حد راست } L^+ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \\ \text{حد چپ } L^- &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{2} \quad \text{حد ندارد.} \\ \text{ب) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{(x+2)}^2}{x^2+2x} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x+2|}{x^2+2x} \Rightarrow \text{حد راست } L^+ = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+2}{x(x+2)} = \frac{1}{-2} \\ \text{حد چپ } L^- &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-(x+2)}{x(x+2)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{حد ندارد.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax-2a}{\sqrt{3x-5}-1} \times \frac{\sqrt{3x-5}+1}{\sqrt{3x-5}+1} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)(\sqrt{3x-5}+1)}{3x-5-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)(\sqrt{3x-5}+1)}{3(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{3}(\sqrt{3x-5}+1) = \frac{2a}{3} = 3 \Rightarrow a = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3}-\sqrt{x}}{x^3-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x}{(x^3-1)(\underbrace{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{x^3}}_3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{3(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{3(x^2+x+1)} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x^2 + 2x - 8} \times \frac{3 + \sqrt{x+7}}{3 + \sqrt{x+7}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - x - 7}{(x^2 + 2x - 8)(3 + \sqrt{x+7})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+4) \times 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{6(x+4)} = \frac{-1}{36}$$

۲۷

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}, \quad x - \frac{\pi}{2} = t, \quad x = \frac{\pi}{2} + t, \quad t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(\frac{\pi}{2} + t)}{\cos(\frac{\pi}{2} + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{-\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\frac{t}{2})}{-2 \sin(\frac{t}{2}) \cos(\frac{t}{2})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{t}{2})}{-\cos(\frac{t}{2})} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{|1 - \cos x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{|2 \sin^2(\frac{x}{2})|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2 \sin^2(\frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \times \frac{x}{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2(\frac{x}{2})^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 2x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times 2 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 4 \times 1 = 4$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{1 + \cos x}{x + \pi}, \quad x + \pi = t \Rightarrow x = t - \pi, \quad t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(t - \pi)}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi - t)}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\frac{t}{2})}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\frac{t}{2}} \times \frac{t}{2})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(\frac{t}{2})^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}t = 0$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}, \quad x - a = t, \quad x = a + t, \quad t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(a+t) - \sin a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos t + \cos a \sin t - \sin a}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin a(1 - \cos t) + \cos a \sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin a \times 2 \sin^2(\frac{t}{2}) + \cos a \sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin a \times \frac{1}{t} t^r + t \cos a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(-\frac{1}{t} \sin a + \cos a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (-\frac{1}{t} \sin a + \cos a) = \cos a$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6x - 2\pi}, \quad x - \frac{\pi}{3} = t, \quad x = \frac{\pi}{3} + t, \quad t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{6(\frac{\pi}{3} + t) - 2\pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6}$$

$$\text{ح) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{x - 1} \quad \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2, \quad t \rightarrow 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t^2 - 3t + 1}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(2t-1)}{(t-1)(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t-1}{t+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \text{ و } 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \text{ می دانیم} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{2 - 2 \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{2(1 - \cos x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{2(2 \sin^2 \frac{x}{2})}}$$

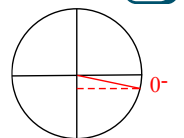
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} \stackrel{\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow \sin \frac{x}{2} > 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \times \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 2 \times 1 = 2$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x - \pi)}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x - \pi)}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3 \sin(3x - \pi)}{(3x - \pi)} = 3$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 2x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \sin x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \frac{0}{0}$$



$$x < 0 \Rightarrow \sin x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{2 \sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{2} |\sin x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \cancel{\sin x} \cos x}{-\sqrt{2} \cancel{\sin x}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} &= \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -(\cos x + \sin x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

٣١

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x - \pi)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x - \pi)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin(2x - \frac{\pi}{2})}{2x - \pi} = 2$$

٣٢

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x \overbrace{(1 + \cos x)}^2}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(2 \sin x \cos x)^2}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} 8 \cos^2 x = 8 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\frac{\sin x}{x} \times x)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times 1^2 x^2}{x^2} = 2$$

٣٣

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin \Delta x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2 \sin^2 x}}{\sin \Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x| \sqrt{2}}{\sin \Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\frac{\sin x}{x} \times x| \sqrt{2}}{\frac{\sin x}{\Delta x} \times \Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt{2}}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{2}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2}}{\Delta} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2 \sin^2(\frac{x}{2})}}{\sin(\frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin(\frac{x}{2})| \sqrt{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin(\frac{x}{2}) \times \sqrt{2}}{\sin(\frac{x}{2})} = -\sqrt{2}$$

٣٤

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2} \times \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{2}{2} \times 1^2 = 1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\frac{\sin x}{x} \times x)^2}{(\frac{\tan x}{x} \times x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times 1^2 x^2}{x^2} = 2$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 5x}{5x} \times 5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \times 3x}{\frac{\tan 4x}{4x} \times 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan 3x}{2x + \sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{\tan 3x}{3x} \times 3x}{2x + \frac{\sin 4x}{4x} \times 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3x}{2x + 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{6x} = -\frac{1}{3}$$