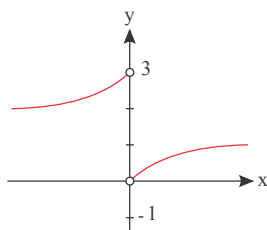


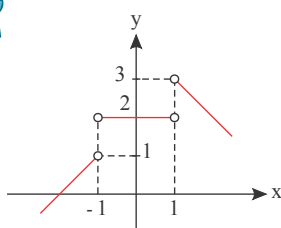
نوید پورزکی

فصل ششم: حد و پیوستگی

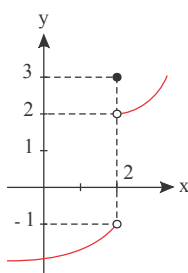
۱ شکل زیر، نمودار تابع f است. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ را محاسبه کنید.



۲ با توجه به شکل زیر مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ را بدست آورید.

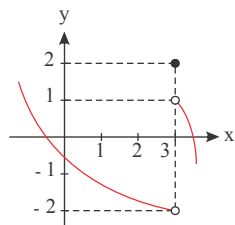


۳ شکل زیر نمودار تابع f است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2)$ را محاسبه کنید.

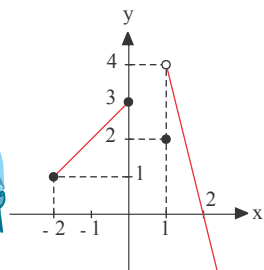




۴ اگر $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + f(0)$ را بدست آورید.



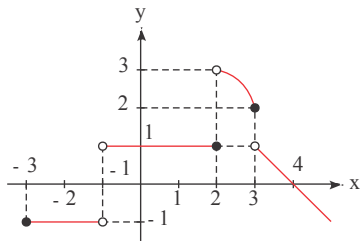
۵ شکل مقابل نمودار تابع f است، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + f(3)$ را بدست آورید.



۶ با کمک نمودار زیر مقدار عبارت $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + 2f(1)$ را بدست آورید.



۷ نمودار تابع f بصورت زیر رسم شده است، حدهای خواسته شده را بدست آورید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

ث) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

چ) $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x)$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x)$

خ) $f(-3)$

د) $f(2)$

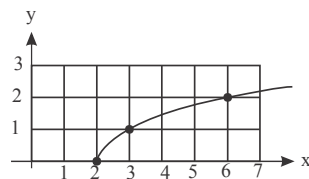
ذ) $f(3)$

ر) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ز) $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x)$

۸ اگر $f(x) = \sqrt{8 + 2x}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow (-4)} f(x)$ را بدست آورید.

۹ دربارهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x - 2}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:



ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ت) $f(2)$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



۱۰) حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 7} (-3)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x - 7)$ پ) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 4x + 5)$

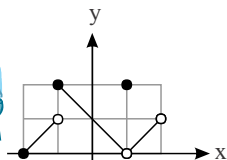
ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x^2 - x}$ ج) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

چ) $\lim_{x \rightarrow -2} [x]$ ح) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$ خ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 7}$

د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$ ذ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 5}$ ر) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 2}$

ز) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 2}{[x] + 1}$ ژ) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos x$ س) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)$

ش) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{[x]}$ ض) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}$ ص) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + [x])$



۱۱) برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ ب) $f(1) = 2$

پ) $f(2) = 1$ ت) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

چ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد. ح) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد.

۱۲) آیا حد تابع زیر در $x = 2$ موجود است؟

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x > 2 \\ -2 & x = 2 \\ x - 3 & x < 2 \end{cases}$$

۱۳) اگر $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود است؟



۱۴) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. آیا f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ آیا $f(0)$ موجود است؟

۱۵) مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطهٔ ۲ مساوی ۱- باشد.

۱۶) تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۳ حد نداشته باشد. $f(3) = 1$

۱۷) تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۲ تعریف نشده باشد. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

۱۸) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 0 \\ -2x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

۱۹) حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$

ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x}$



۲۰ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 9}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{8x^2 - 2x - 1}$

۲۱ حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x + [x])$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x] + 1}{3x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (3[x] - x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - [x]}{2[x]}$



۲۲) حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)} (2x^2 + 5x)(6x - 1)$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 - |x|}{|x| + 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{|x^2 - 1|}{|x| + 4}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-6}}{x+3}$

چ) $\lim_{x \rightarrow 5} (2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x+4} - 1)$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 + 5x + 8}{x^2 + 2}$

۲۳) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2 - x^3}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x^2 + 5x + 2}{2x^2 + x - 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 4x - 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$



۲۴ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + 1}{3 - \sin x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sqrt{2} (\sin x + \cos x)^3$

ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + 2 \cos x}{2 \sin^2 x - \cos x}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (1 - \sin^2 x) \times \tan^2 x$

۲۵ با توجه به نمودار زیر، پیوستگی تابع را در نقاط خواسته شده بررسی کنید.

الف) $x = -2$

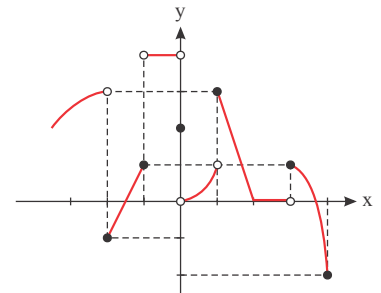
ب) $x = -1$

پ) $x = 0$

ت) $x = 1$

ث) $x = 2$

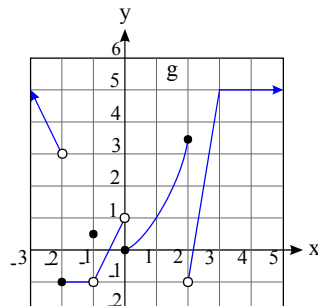
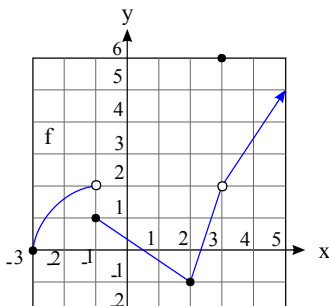
ج) $x = 3$



۲۶ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x - 3 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ -x + 2 & x > 2 \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



۲۷ با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ پ) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x))$ ث) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$ ج) $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x))$

چ) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^4$ ح) $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^2$

خ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ د) $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x))$

۲۸ نمودار دو تابع $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ و $g(x) = 1$ را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ موجود است؟ (چرا؟) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ چطور؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

۲۹ اگر m یک عدد صحیح باشد، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow m^+} [x]$

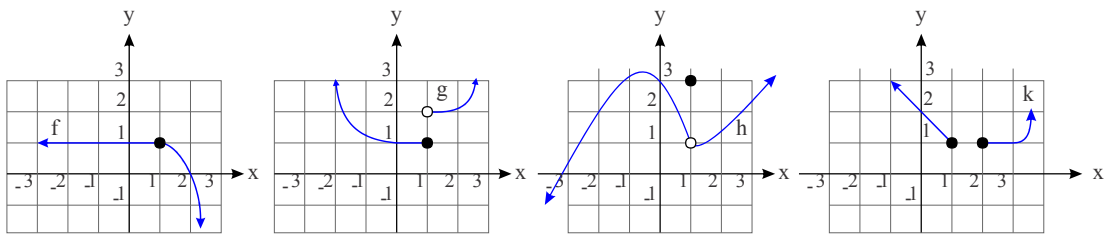
ب) $\lim_{x \rightarrow m^-} [x]$

پ) $\lim_{x \rightarrow m} [x]$

۳۰ با توجه به نمودار تابع $f(x) = [x]$ ، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



۳۱) کدام یک از توابع زیر در $x = 1$ پیوسته است؟



۳۲) اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & , x < 2 \\ a & , x = 2 \\ x + 3 & , x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار a را بدست آورید.

۳۳) در تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & , x > 1 \\ 5 & , x = 1 \\ -2x + b & , x < 1 \end{cases}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در $x = 1$ پیوسته باشد.

۳۴) مقدار a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & , x < 2 \\ 7 & , x = 2 \\ 2x + 3b & , x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته باشد.

۳۵) مقادیر a و b را طوری بدست آورید که تابع $f(x) = \begin{cases} 2 \cos x + a & , x < 0 \\ -2 & , x = 0 \\ 3x + 2b & , x > 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد.



۳۶ مقدار a را طوری بدست آورید که تابع زیر در نقطه $x = 3$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}, & x < 3 \\ x^2 - ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

۳۷ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}, & x > 0 \\ a \sin(x + \frac{\pi}{6}), & x \leq 0 \end{cases}$ به ازای چه مقداری از a در $x = 0$ پیوسته است؟

۳۸ توابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این تابع‌ها را در $x = 3$ بررسی کنید.

۳۹ مقادیر a و b را طوری بدست آورید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2[x], & x > 1 \\ a + 3, & x = 1 \\ bx + 6, & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد.

۴۰ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد، مقدار a را بدست آورید.

۴۱ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ -x + 3, & x > 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ چه نوع پیوستگی دارد؟



۴۲) هر یک از توابع زیر در چه بازه‌ای پیوسته هستند؟

الف) $f(x) = x^3 - 5x$

ب) $g(x) = \sin x$

پ) $h(x) = \log x$

ت) $k(x) = \sqrt{x-6}$

۴۳) در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع $f(t)$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می‌شود:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 7$$

سال $\frac{1}{2} = \frac{6}{12} \rightarrow 6$ ماه

الف) $f(2)$ و $f(5)$ را بیابید.

ب) آیا f در بازه $[0, 10]$ پیوسته است؟

۴۴) تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2 \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ چه نوع پیوستگی دارد؟

۴۵) تابعی مثال بنزید که حد آن در نقطه $x = 1$ مساوی ۱- باشد؛ ولی تابع در ۱ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.



پاسخنامه تشریحی

۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 3 = 3$$

۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$

۳

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1, f(2) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2) = 2 + (-1) + 3 = 4$$

۴

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, f(0) = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + f(0) = -1 + 1 + 1 = 1$$

۵

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2, f(3) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + f(3) = 1 + (-2) + 2 = 1$$

۶

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3, f(1) = 2$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + 2f(1) = 4 - 4(3) + 2(2) = -4$$

۷) نمودار تابع f بصورت زیر رسم شده است، حدهای خواسته شده را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = -1$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = \text{وجود ندارد}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$

خ) $f(-3) = -1$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$

د) $f(2) = 1$

ث) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1$

ذ) $f(3) = 2$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -1$

ر) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

ز) $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = -1$

۸

$$1 + 2x \geq 0 \rightarrow 2x \geq -1 \rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \rightarrow D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \sqrt{1 + 2x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \sqrt{1 + 2x} = \text{وجود ندارد}$$

۹

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$



ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ وجود ندارد

ت) $f(2) = 0$

الف) $\lim_{x \rightarrow 7} (-3) = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x - 7) = -2(0) - 7 = 0 - 7 = -7$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 4x + 5) = 3(-1)^2 - 4(-1) + 5 = 3 + 4 + 5 = 12$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{3^2 - 3(3)}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x^2 - x} = \frac{0}{2(0)^2 - 0} = \frac{0}{0}$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{(-2)^3 + 8}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$

چ) $\lim_{x \rightarrow -2} [x] =$ وجود ندارد $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} [x] = [(-2)^+] = -2 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} [x] = [(-2)^-] = -3 \end{cases}$

ح) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0^+} = 0$

خ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 7} = \sqrt{2 + 7} = \sqrt{9} = 3$

د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} = \sqrt{0^-} =$ وجود ندارد

ذ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x + 5} = \sqrt{2 + 5} = \sqrt{7}$

ر) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 2} = \sqrt{1 - 2} = \sqrt{-1}$ وجود ندارد

ز) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 2}{[x] + 1} = \frac{3^+ - 2}{[3^+] + 1} = \frac{3 - 2}{3 + 1} = \frac{1}{4}$

ژ) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \cos x = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

س) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

ش) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{[x]} = \frac{(-2)^+}{[(-2)^+]} = \frac{-2}{-2} = 1$

ص) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1 - (1)^2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$

ض) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + [x]) =$ وجود ندارد $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + [x]) = 0^+ + [0^+] = 0 + 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + [x]) = 0^- + [0^-] = 0 + (-1) = -1 \end{cases}$



۱۱

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ (نادرست است زیرا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$)

ب) $f(1) = 2$ درست

پ) $f(2) = 1$ (زیرا این حد وجود ندارد) نادرست است

ت) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$ درست

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ نادرست

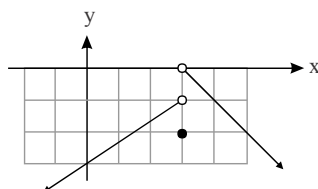
ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ درست

چ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ وجود ندارد درست

ح) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$ وجود ندارد درست

۱۲

ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم و داریم:

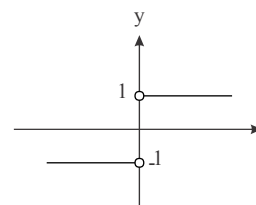


$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ وجود ندارد

۱۳

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

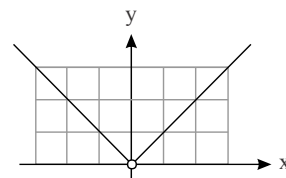
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ وجود ندارد



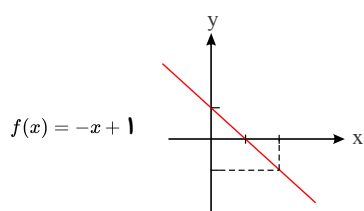
۱۴

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$f(0) =$ وجود ندارد

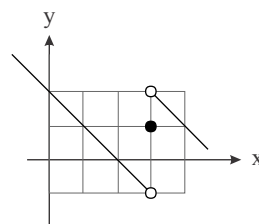


۱۵



$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x < 3 \\ 1 & x = 3 \\ -x + 5 & x > 3 \end{cases}$$

۱۶

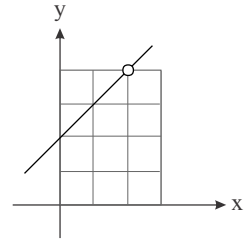


حد و پیوستگی

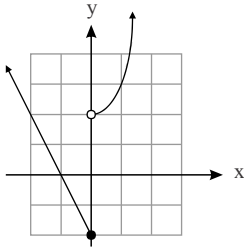


۱۷

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$



۱۸



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

۱۹

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{0}{0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{-\sqrt{2}(\cos x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{-\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \frac{1 - 1}{(0)^2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^2 x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{(1)^2}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \frac{(0)^2}{1 - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}{1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x}$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1)}{-(2 \sin x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x + 1}{-1} = \frac{2(\frac{1}{2}) + 1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

۲۰

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6} = \frac{2(-2)^2 - 8}{(-2)^2 - (-2) - 6} = \frac{0}{0}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x^2 - 4)}{(x + 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x - 2)}{(x - 3)} = \frac{2(-2 - 2)}{-2 - 3} = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(1)^2 - 1}{(1)^2 - 4(1) + 3} = \frac{0}{0}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 3} = \frac{1}{1 - 3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(-2)^2 + (-2) - 2}{(-2)^2 + 3(-2) + 2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x + 2)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{-2 - 1}{-2 + 1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 + 3x^2}{x^2 - 9} = \frac{(-3)^2 + 3(-3)^2}{(-3)^2 - 9} = \frac{0}{0}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2}{x - 3} = \frac{(-3)^2}{-3 - 3} = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{8x^2 - 2x - 1} = \frac{4(\frac{1}{2})^2 - 1}{8(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) - 1} = \frac{0}{0}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{(2x - 1)(4x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x + 1}{4x + 1} = \frac{2(\frac{1}{2}) + 1}{4(\frac{1}{2}) + 1} = \frac{2}{3}$$

۲۱

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x + [x]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 2 + [2^-] = 2 + 1 = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x] + 1}{3x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] + 1}{\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x} = \frac{[2^+] + 1}{3(2)} = \frac{2 + 1}{6} = \frac{1}{2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (3[x] - x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3[x] - \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 3[1^-] - 1 = 3(0) - 1 = -1$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - [x]}{2[x]} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3^-} x - \lim_{x \rightarrow 3^-} [x]}{\lim_{x \rightarrow 3^-} 2[x]} = \frac{3 - [3^-]}{2[3^-]} = \frac{3 - 2}{2(2)} = \frac{1}{4}$



$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 4)} = \frac{1^2 - 1}{(1)^2 - 2(1) + 4} = \frac{0}{3}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-1)} (2x^2 + 5x)(6x - 1) = \lim_{x \rightarrow (-1)} (2x^2 + 5x) \times \lim_{x \rightarrow (-1)} (6x - 1) \\ = (2(-1)^2 + 5(-1)) \times (6(-1) - 1) = (2 - 5) \times (-7) = (-3) \times (-7) = 21$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 - |x|}{|x| + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow (-3)} x^2 - |x|}{\lim_{x \rightarrow (-3)} |x| + 1} = \frac{(-3)^2 - |-3|}{|-3| + 1} = \frac{9 - 3}{3 + 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{|x^2 - 1|}{|x| + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow (-2)} |x^2 - 1|}{\lim_{x \rightarrow (-2)} |x| + 4} = \frac{|(-2)^2 - 1|}{|-2| + 4} = \frac{3}{2 + 4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{x+2}}{\lim_{x \rightarrow 7} (x-4)} = \frac{\sqrt{7+2}}{7-4} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-6}}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x-6}}{\lim_{x \rightarrow 1} x+3} = \frac{\sqrt{2(1)-6}}{1+3} = \frac{\sqrt{-4}}{4} = \text{حد وجود ندارد}$$

$$\text{چ) } \lim_{x \rightarrow 5} (2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x+4} - 1) = \lim_{x \rightarrow 5} (2\sqrt{x} + 1) \times \lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x+4} - 1) \\ = (2\sqrt{5} + 1)(\sqrt{9} - 1) = (2\sqrt{5} + 1)(2) = 4\sqrt{5} + 2$$

$$\text{ح) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 + 5x + 8}{x^2 + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow (-2)} (2x^2 + 5x + 8)}{\lim_{x \rightarrow (-2)} (x^2 + 2)} = \frac{2(-2)^2 + 5(-2) + 8}{(-2)^2 + 2} \\ = \frac{8 - 10 + 8}{4 + 2} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2} = \frac{(1)^2 - 3(1) + 2}{1^2 - 2} = \frac{0}{-1} \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+2} = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2 - x^3} = \frac{4(0)^2}{2(0)^2 - (0)^3} = \frac{0}{0} \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2(2-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{2-x} = \frac{4}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x^2 + 5x + 2}{x^2 + x - 1} = \frac{3(-1)^2 + 5(-1) + 2}{(-1)^2 + (-1) - 1} = \frac{0}{-1} \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(3x+2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x+2}{x-1} = \frac{3(-1)+2}{(-1)-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(3)^3 - 27}{3^2 - 2(3) - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x+1} = \frac{3^2 + 3(3) + 9}{3+1} = \frac{27}{4}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 4x - 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2} = \frac{3(1)^3 + 4(1) - 3(1)^2 - 4}{(1)^2 + 1 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2(x-1) + 4(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x^2 + 4)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4}{x+2} = \frac{3(1)^2 + 4}{1+2} = \frac{7}{3}$$



الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + 1}{3 - \sin x} = \frac{2(1) + 1}{3 - 0} = \frac{3}{3} = 1$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} = \frac{2 \times 1 \times 0}{1 + (0)^2} = \frac{0}{1} = 0$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sqrt{2}(\sin x + \cos x)^3 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \sqrt{2}(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$

ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + 2 \cos x}{2 \sin^2 x - \cos x} = \frac{(1)^2 + 2(0)}{2(1)^2 - (0)} = \frac{1 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (1 - \sin^2 x) \times \tan^2 x = (1 - (\frac{1}{2})) \times (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = (1 - \frac{1}{4}) \times \frac{3}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

الف) $x = -2 \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -1, \quad f(-2) = -1$

تابع f در $x = -2$ پیوستگی راست دارد

ب) $x = -1 \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 4, \quad f(-1) = 1$

تابع f در $x = -1$ پیوستگی چپ دارد

پ) $x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 2$

تابع f در $x = 0$ ناپیوسته است

ت) $x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \quad f(1) = 3$

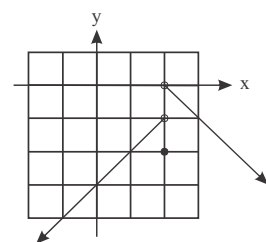
تابع f در $x = 1$ پیوستگی راست دارد

ث) $x = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0, \quad f(2) = 0$

تابع f در $x = 2$ پیوسته است

ج) $x = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1, \quad f(3) = 1$

تابع f در $x = 3$ پیوستگی راست دارد



تابع f در $x = 2$ ناپیوسته است و در سایر نقاط ناپیوسته است. (۲۶)

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$ ت) $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x)) = 2 + 5 = 7$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$ وجود ندارد $+(-1) =$ وجود ندارد



وجود ندارد = (وجود ندارد) $5 + 2(-1) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 5 \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x)) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x))$ ج

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^2$ ح

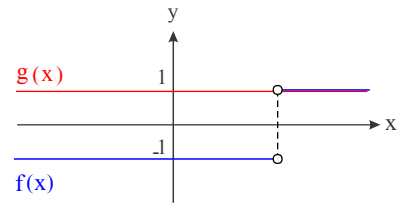
وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-1}{\text{وجود ندارد}}$ خ

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x)) = 5 \times 5 = 25$$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}, \quad g(x) = 1$$

وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1$$



در نقاط $x > 3$ حد دو تابع با هم برابرند.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow m^+} [x] = m$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow m^-} [x] = m - 1$$

وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow m} [x]$ پ

تابع $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح پیوسته نیست و در سایر نقاط پیوسته است. ۳۰

۳۱

تابع f در $x = 1$ پیوسته است.

توابع g, h, k در $x = 1$ پیوسته نیستند.

۳۲

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x - [x] = 3(2) - [2^-] = 6 - 1 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 3 = 2 + 3 = 5, \quad f(2) = a$$

تابع f در $x = 2$ پیوسته است پس داریم: $a = 5$

۳۳

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + 3 = a(1)^2 + 3 = a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2x + b = -2(1) + b = -2 + b, \quad f(1) = 5$$



$$\rightarrow \begin{cases} a + 3 = 5 \rightarrow \boxed{a = 2} \\ -2 + b = 5 \rightarrow \boxed{b = 7} \end{cases}$$

۳۴

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x + 3b = 2(2) + 3b = 4 + 3b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax - 1 = a(2) - 1 = 2a - 1, f(2) = 7$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4 + 3b = 7 \rightarrow 3b = 3 \rightarrow \boxed{b = 1} \\ 2a - 1 = 7 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow \boxed{a = 4} \end{cases}$$

۳۵

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 2b = 3(0) + 2b = 2b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \cos x + a = 2(1) + a = 2 + a, f(0) = -2$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2b = -2 \rightarrow \boxed{b = -1} \\ 2 + a = -2 \rightarrow \boxed{a = -4} \end{cases}$$

۳۶

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}, & x < 3 \\ x^2 - ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - ax = (3)^2 - a(3) = 9 - 3a$$

$$f(3) = 3^2 - a(3) = 9 - 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{-(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)(x + 3)}{-(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 3}{-1} = -6$$

$$\rightarrow 9 - 3a = -6 \rightarrow 15 = 3a \rightarrow \boxed{a = 5}$$

۳۷

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = a \sin\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a}{2}, f(0) = \frac{a}{2}$$

$$\rightarrow \frac{a}{2} = 2 \rightarrow \boxed{a = 4}$$

۳۸

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x - 3)}(x + 3)}{\cancel{(x - 3)}} = 6, f(3) = 6$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ بنابراین تابع f در $x = 3$ پیوسته است.



$$g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 6$$

وجود ندارد $g(3) = 6$ بنابراین تابع g در $x = 3$ پیوسته نیست.

۳۹

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2[x] = (1)^2 + 2[1^+] = 1 + 2(1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} bx + 6 = b(1) + 6 = b + 6, f(1) = a + 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + 3 = 3 \rightarrow a = 0 \\ b + 6 = a + 3 \rightarrow b + 6 = 3 \rightarrow b = -3 \end{cases}$$

۴۰

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$, f(1) = a \rightarrow a = -2$$

۴۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 3) = -1 + 3 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$$

$$f(1) = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

تابع f در $x = 1$ پیوستگی راست دارد

۴۲ الف $f(x) = x^3 - 5x$ چون تابع چند جمله‌ای است و دامنه آن هم $\mathbb{R}$ می‌باشد پس تابع f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته می‌باشد.

ب $g(x) = \sin x$ تابع مثلثاتی $\sin x$ دارای دامنه‌ای بصورت $\mathbb{R}$ می‌باشد و تمام بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته می‌باشد.

پ $h(x) = \log x$ تابع $\log x$ دارای دامنه‌ای بصورت $\mathbb{R}^+$ می‌باشد و در تمام بازه $(0, +\infty)$ پیوسته می‌باشد.

ت $k(x) = \sqrt{x-6}$ تابع $\sqrt{x-6}$ دارای دامنه‌ای بصورت $\mathbb{R}^{\geq 6}$ می‌باشد و در تمام بازه $[6, +\infty)$ پیوسته می‌باشد.

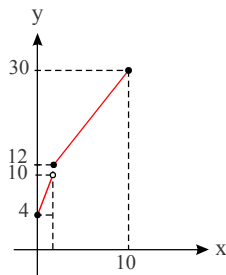
۴۳

$$f(t) = \begin{cases} 6t + 4 & 0 \leq t < 1 \\ 2t + 10 & 1 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

$$\text{الف } f(2) = 2(2) + 10 = 14$$

$$f(5) = 2(5) + 10 = 20$$

ب) با توجه به نمودار رسم شده مشاهده می‌شود که تابع f در بازه $[0, 10]$ پیوسته نیست.





$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x + 2 \cos x = 1 + 2(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} -\cos x = -(0) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

تابع f در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوستگی چپ دارد

