



دیرستان پسرانه غیر دولتی ابتکار علم - دوره دوم

نام و نام خانوادگی: کلاس: یازدهم ریاضی موضوع امتحان: حسابان ۱ نام دبیر: آیدین مشروطه‌چی

۱- در جاهای خالی، پاسخ مناسب بنویسید. (۲ نمره)

الف) $A = (0, 6)$ و $B = (8, -8)$ مختصات دو سر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز دایره است.

ب) اگر نمودار $f(x)$ را رسم نماییم، صفرهای تابع، درواقع همان محل برخورد نمودار تابع با محور می‌باشند.

ج) تعداد تابع‌هایی که از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به مجموعه $B = \{m, n\}$ می‌توان نوشت، عبارت است از:

د) حاصل عبارت $[2 - \pi]$ برابر با است.

۲- درستی یا نادرستی هر کدام از عبارت‌های زیر را تعیین کنید. (۱ نمره)

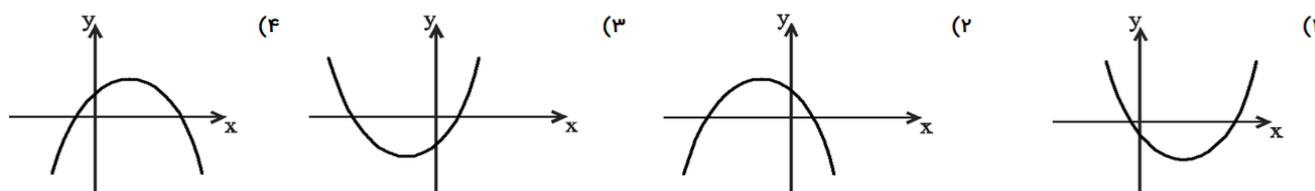
الف) به کمک روش هندسی حل معادلات همواره می‌توان مقدار دقیق همه ریشه‌ها را پیدا کرد. ☐

ب) اگر دامنه و برد دو تابع برابر باشد، آن دو تابع با هم برابرند. ☐

ج) معادله $x = y^2 - 3$ بیانگر یک تابع می‌باشد. ☐

ب) شرط اینکه که یک تابع وارون‌پذیر باشد، آن است که یک به یک باشد. ☐

۳- شکل‌های زیر نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند. در کدام یک از آنها $a < 0$ و $b > 0$ است؟ (۵/۰ نمره)



۴- اگر نقطه $A(2, 3)$ راس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟ (۵/۰ نمره)

الف) ۷ ب) ۹ ج) ۲۵ د) ۱۶

۵- مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید. (۱ نمره)

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$$

۶- اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ باشد، سایر صفرهای تابع را بیابید. (۱/۵ نمره)

۷- الف) معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ باشد. (۰/۷۵ نمره)

ب) مثلث ABC به راس‌های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید. ابتدا اندازه تمام اضلاع آن را محاسبه نمایید، سپس نوع مثلث را مشخص نمایید. (۱ نمره)

۸- دو معادله از معادلات زیر را به دلخواه حل کنید. (به روش جبری) (۲ نمره)

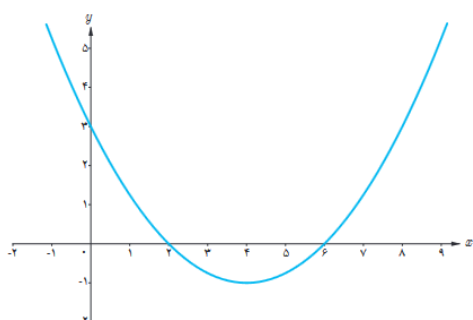
$$(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) - 2 = 0$$

$$\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}$$

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$$

$$||x| - 2| = 1$$

۹- اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، ضابطه سهمی را مشخص کنید. (۱/۵ نمره)



۱۰- در هر مورد مشخص نمایید کدام جفت تابع با هم مساوی هستند. (با ذکر توضیح) (۱/۵ نمره)

$$f(x) = \sqrt{x^2} \quad \text{و} \quad g(x) = |x|$$

$$h(x) = x^2 \quad \text{و} \quad t(x) = x|x|$$

$$p(x) = \frac{x}{x} \quad \text{و} \quad q(x) = 1$$

۱۱- دامنه توابع زیر را بدست آورید. (۱/۵ نمره)

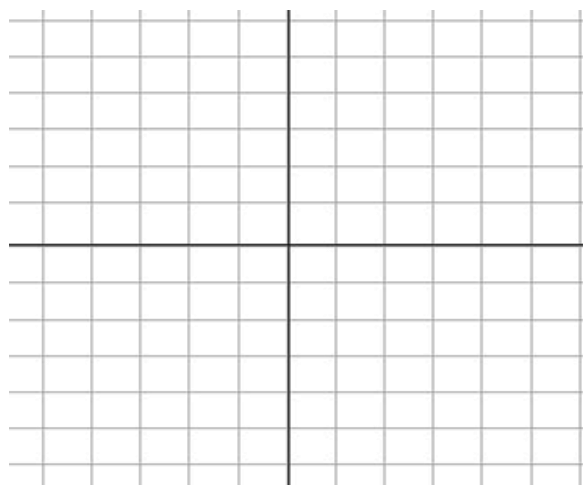
$$\frac{x-1}{x^2-25}$$

$$\sqrt{3x-6}$$

$$\frac{2x+3}{x^2+x-12}$$

۱۲- ضابطه تابع زیر را با توجه به دامنه داده شده $[-3, 3]$ بازه بندی کنید. سپس نمودار آنرا را رسم کنید. (۱/۵ نمره)

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{3}x \right\rfloor \quad -3 \leq x \leq 3$$



۱۳- تابع $g(x) = x^2 - 2x + 3$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ای از آن را که می‌تواند یک به یک باشد، تعیین کرده سپس وارون آن را بیابید. (۱/۵ نمره)

۱۴- اگر $f(x) = 4x$ و $g(x) = 2 - x$ باشد، توابع $f - g$ و $\frac{f}{g}$ را به همراه دامنه آن‌ها به دست آورید. (۱ نمره)

۱۵- اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 3$ باشد، دامنه و ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست آورید. سپس $g \circ f(10)$ را محاسبه نمایید. (۱/۲۵ نمره)

نام و نام خانوادگی مصمم:	نام و نام خانوادگی تجدید نظر کننده:	نمره ورقه به عدد:
محل امضا	محل امضا	نمره ورقه به حرف:



دیرستان پسرانه غیر دولتی ابتکار علم - دوره دوم

نام و نام خانوادگی: کلاس: یازدهم ریاضی موضوع امتحان: حسابان ۱ نام دبیر: آیدین مشروطه‌چی

$$O = \frac{A+B}{2} = \frac{14 + 14}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

۱- در جاهای خالی، پاسخ مناسب بنویسید. (۲ نمره)

الف) $A = (0, 6)$ و $B = (8, -8)$ مختصات دو سر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز دایره است.

ب) اگر نمودار $f(x)$ را رسم نماییم، صفرهای تابع، درواقع همان محل برخورد نمودار تابع با محور می‌باشند.

ج) تعداد تابع‌هایی که از مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به مجموعه $B = \{m, n\}$ می‌توان نوشت، عبارت است از:

د) حاصل عبارت $[2 - \pi]$ برابر با است.

$$\approx [-1, 14]$$

۲- درستی یا نادرستی هر کدام از عبارت‌های زیر را تعیین کنید. (۱ نمره)

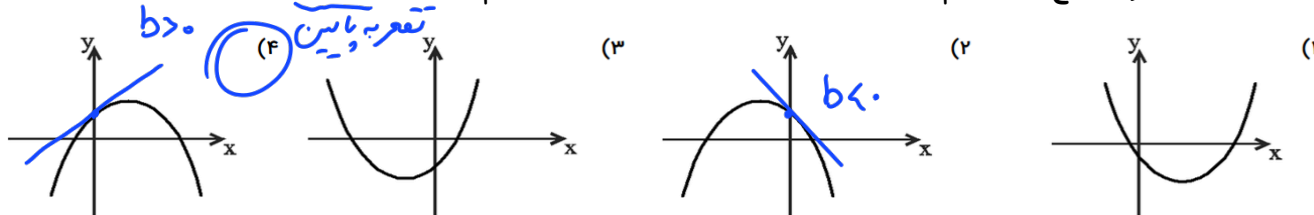
الف) به کمک روش هندسی حل معادلات همواره می‌توان مقدار دقیق همه ریشه‌ها را پیدا کرد. ☒

ب) اگر دامنه و برد دو تابع برابر باشد، آن دو تابع با هم برابرند. ☒

ج) معادله $x = y^2 - 3$ بیانگر یک تابع می‌باشد. ☒

ب) شرط اینکه که یک تابع وارون‌پذیر باشد، آن است که یک به یک باشد. ☒

۳- شکل‌های زیر نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند. در کدام یک از آنها $a < 0$ و $b > 0$ است؟ (۵/۰ نمره)



۴- اگر نقطه $A(2, 3)$ راس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟ (۵/۰ نمره)

الف) ۷ ب) ۹ ج) ۲۵ د) ۱۶ $a = \frac{|3x_1 - 4y_1 - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$ $S = a^2 = 9$

۵- مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید. (۱ نمره)

$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$ $q = 2$ $S_{10} = a_1 \times \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = \frac{1}{8} \times \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \frac{1023}{8}$

عامل $(x-2)$

۶- اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ باشد، سایر صفرهای تابع را بیابید. (۱/۵ نمره)

$$\begin{array}{l} x^3 - x^2 - 4x + 4 \div x^2 + x - 2 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ x^2 - 4x + 4 \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ -2x + 4 \\ \underline{2x - 4} \\ 0 \end{array} \Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x^2 + x - 2) = 0$$

خوردن سوال داده: $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} \text{ و } \boxed{x = -2}$$

۷- الف) معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ باشد. (۷۵/۰ نمره)

$$S = x_1 + x_2 = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

ب) مثلث ABC به راس‌های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید. ابتدا اندازه تمام اضلاع آن را محاسبه نمایید،

سپس نوع مثلث را مشخص نمایید. (۱ نمره)

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1 + 6)^2 + (7 + 2)^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$$

$$AC = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} \quad BC = \sqrt{(-6 - 3)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{81 + 25} = \sqrt{106}$$

$$AB = BC \rightarrow \text{مساوی الساقین}$$

۸- دو معادله از معادلات زیر را به دلخواه حل کنید. (به روش جبری) (۲ نمره)

$$(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) - 2 = 0 \quad *$$

$$\left(\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}\right) x(x+1) \Rightarrow 4(x+1) = 2x(x+1) + x(x-2) \Rightarrow 4x+4 = 2x^2+2x+x^2-2x$$

$$(2\sqrt{x})^2 = (\sqrt{3x+4})^2 \Rightarrow 4x = 3x+4 \Rightarrow \boxed{x=4} \checkmark$$

$$\rightarrow 3x^2 - 7x - 4 = 0$$

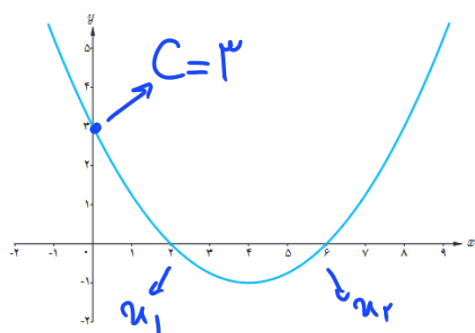
$$\Delta = 49 - 4(3)(-4) = 121$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm 11}{6} \rightarrow \boxed{x = 3} \text{ و } \boxed{x = -\frac{2}{3}} \checkmark$$

$$|x| - 2 = 1 \rightarrow \begin{cases} |x| - 2 = 1 \rightarrow |x| = 3 \rightarrow \boxed{x = \pm 3} \\ |x| - 2 = -1 \rightarrow |x| = 1 \rightarrow \boxed{x = \pm 1} \end{cases}$$

$$* x^2 - 1 = t \rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \rightarrow (t+2)(t-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -2 \rightarrow x^2 - 1 = -2 \rightarrow x^2 = -1 \text{ (خارج از حیطه)} \\ t = 1 \rightarrow x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow \boxed{x = \pm \sqrt{2}} \end{cases}$$

۹- اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، ضابطه سهمی را مشخص کنید. (۱/۵ نمره)



$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = P = \frac{c}{a} \\ 2 \times 4 = \frac{3}{a} \\ \rightarrow a = \frac{1}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = S = -\frac{b}{a} \\ 2 + 4 = -\frac{b}{\frac{1}{8}} \\ \rightarrow b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}x^2 - 2x + 3$$

۱۰- در هر مورد مشخص نمایید کدام جفت تابع با هم مساوی هستند. (با ذکر توضیح) (۱/۵ نمره)

$f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = |x|$ $D_f = D_g \checkmark$ برابرند
 $D_f = \mathbb{R}$ $D_g = \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = g(x) \checkmark$
 $h(x) = x^2$ و $t(x) = x|x|$ $D_h = D_t \checkmark$
 $D_h = \mathbb{R}$ $D_t = \mathbb{R}$ $h(x) \neq t(x) \times$ برابر نیستند
 $p(x) = \frac{x}{x}$ و $q(x) = 1$ $D_p \neq D_q \times$ برابر نیستند
 $D_p = \mathbb{R} - \{0\}$ $D_q = \mathbb{R}$ $\begin{cases} h(-1) = 1 \\ t(-1) = -1 \end{cases}$

۱۱- دامنه توابع زیر را بدست آورید. (۱/۵ نمره)

$$\frac{x-1}{x^2-25} = 0 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = \pm 5 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{\pm 5\}$$

$$\sqrt{3x-6} \quad 3x-6 \geq 0 \rightarrow 3x \geq 6 \rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D = [2, +\infty)$$

$$\frac{2x+3}{x^2+x-12} = 0 \rightarrow (x+4)(x-3) = 0 \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{3, -4\}$$

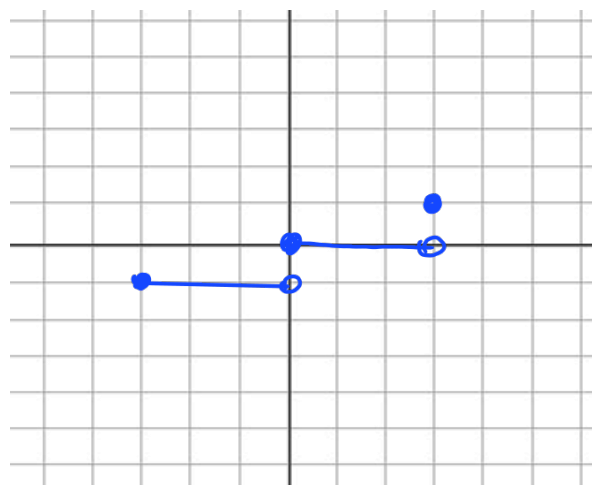
۱۲- ضابطه تابع زیر را با توجه به دامنه داده شده $[-3, 3]$ بازه بندی کنید. سپس نمودار آنرا را رسم کنید. (۱/۵ نمره)

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{3}x \right\rfloor \quad -3 \leq x \leq 3 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} -1 \leq \frac{1}{3}x \leq 1$$

$$-3 \leq x < 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} -1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \rightarrow \left\lfloor \frac{1}{3}x \right\rfloor = -1$$

$$0 \leq x < 3 \leftarrow 0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \rightarrow \left\lfloor \frac{1}{3}x \right\rfloor = 0$$

$$x = 3 \leftarrow \frac{1}{3}x = 1 \rightarrow \left\lfloor \frac{1}{3}x \right\rfloor = 1$$



۱۳- تابع $g(x) = x^2 - 2x + 3$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ای از آن را که می‌تواند یک به یک باشد، تعیین کرده سپس وارون آن را بیابید. (۱/۵ نمره)

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times 1} = 1 \quad D = [1, +\infty)$$

$$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{y-2} \Rightarrow |x-1| = \sqrt{y-2}$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} x-1 = \sqrt{y-2} \rightarrow x = \sqrt{y-2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y-2} + 1$$

۱۴- اگر $f(x) = 4x$ و $g(x) = 2-x$ باشد، توابع $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به همراه دامنه آن‌ها به دست آورید. (۱ نمره)

$$(f-g)(x) = 4x - (2-x) = 5x - 2 \quad D_g = \mathbb{R} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{4x}{2-x}$$

$$D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$2-x=0 \rightarrow \underline{x=2}$$

۱۵- اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 3$ باشد، دامنه و ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست آورید. سپس $g \circ f(10)$ را محاسبه نمایید. (۱/۲۵ نمره)

$$(g \circ f)(x) = g(f) = f^2 + 3 = x-1 + 3 = x+2$$

$$D_g = \mathbb{R} \quad D_f = [1, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

$$g \circ f(10) = 10 + 2 = 12$$

نمره ورقه به عدد:

نام و نام خانوادگی تجدید نظر کننده:

نام و نام خانوادگی مصمم:

نمره ورقه به حرف:

محل امضا

محل امضا

