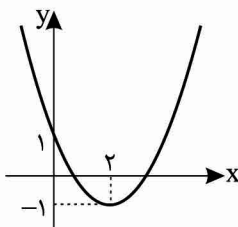


ردیف	سؤال	بارم
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (الف) مجموعه ریشه‌های معادله $x-2 =3$ برابر است. (ب) شیب خط عمود بر خط $y-2x=3$ برابر است. (ج) معادله درجه دومی که ریشه‌هایش $5+\sqrt{2}$ و $5-\sqrt{2}$ باشد به صورت می‌باشد. (د) اگر $f = \{(2, 5), (7, 3), (-1, \sqrt{3})\}$، f^{-1} به صورت می‌باشد.	۱
۲	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (الف) برای تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ نمایش $\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, \frac{1}{9}] \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ نیز قابل قبول است. (ب) تابع $y = [x - \frac{1}{4}]$ و تابع $y = [x] - \frac{1}{4}$ با هم برابر هستند. (ج) تابع $f(x) = x-2 - 1$ در بازه $(-\infty, 2]$ وارون‌پذیر است. (د) معادله $\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x+2} = 0$ فاقد ریشه حقیقی می‌باشد. ☐ درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☐ درست ☐ نادرست	۱
۳	حداقل چند جمله از دنباله حسابی $2, 4, 6, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل از ۱۱۰ بیشتر شود؟	۱/۵
۴	در شکل زیر نمودار سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. ضرایب a, b و c را تعیین کنید. 	۱/۲۵
۵	اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\alpha+1$ و $\beta+1$ باشد.	۱/۵
۶	معادله $ x-3 + x-1 = 1$ را به روش هندسی حل کنید و تعداد جواب‌ها را مشخص کنید.	۱/۲۵
۷	معادلات زیر را حل کنید.	۱/۷۵
	(الف) $\frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{2}{x-1} = 3$ (ب) $x^2 - 9 = \sqrt{1-x^2}$	

ردیف	سؤال	بارم
۸	نقاط $A(-1, 1)$ ، $B(0, 0)$ و $C(1, 2)$ سه رأس یک مثلث هستند. الف) معادله میانه وارد بر ضلع BC را به دست آورید. ب) اندازه ارتفاع وارد بر ضلع AC را بیابید.	۱/۷۵
۹	نمودار تابع با ضابطه $y = 2[x] + 1$ را در بازه $(-1, 2)$ رسم کنید.	۱/۷۵
۱۰	نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به بالا ببرید. الف) ضابطه تابع جدید را بنویسید. ب) نمودار تابع جدید را با انتقال رسم کنید. (مراحل رسم معلوم باشد).	۱
۱۱	تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x-2} - 1$ مفروض است. الف) ثابت کنید f یک به یک است. ب) تابع وارون f را به دست آورید. ج) نمودار f و f^{-1} را در یک صفحه مختصات رسم کنید.	۱/۲۵
۱۲	اگر $f = \{(2, 1), (1, -3), (-1, 2), (-3, 2), (4, -3)\}$ و $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$ باشد، آنگاه توابع $f \times g$ و $f - g$ را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۱۳	دو تابع $g(x) = \sqrt{5-x}$ و $f(x) = \frac{1}{x-4}$ مفروض است: الف) دامنه و ضابطه تابع $f \circ g$ را بیابید. ب) حاصل عبارت $(g \circ f)(5)$ چیست؟	۱/۷۵
۱۴	الف) نامعادله $(\sqrt{2})^{x-2} < \frac{1}{4^x}$ را حل کنید. ب) نمودار $y = 2^{x+2} - 1$ را به کمک نمودار $y = 2^x$ رسم کنید. ج) a را چنان تعیین کنید که تابع نمایی $y = (\frac{a-1}{3})^x$ افزایشی (صعودی) باشد.	۰/۷۵ ۰/۷۵ ۰/۵
	جمع بarm	۲۰

پاسخنامه

پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

$$|x-2|=3 \Rightarrow x-2=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow -1+5=4$$

الف) ۴

$$y-2x=3 \Rightarrow y=2x+3 \Rightarrow \text{شیب خط عمود} = 2 \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{1}{2}$$

ب) $-\frac{1}{2}$

$$x^2-10x+23=0 \quad \text{ج)}$$

$$\frac{1}{f} = \left\{ \left(2, \frac{1}{5}\right), \left(7, \frac{1}{3}\right), \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right\} \quad \text{د)}$$

(حسابان یازدهم، صفحه‌های ۸، ۹، ۱۱، ۳۵ و ۳۹)

پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

د) نادرست ($x = -2$)

ج) درست

ب) نادرست

الف) نادرست

(حسابان یازدهم، صفحه‌های ۲۱، ۴۰، ۵۳ و ۶۱)

پاسخ سؤال ۳: (۱/۵ نمره)

$$a_1=2, d=2 \quad (\text{نمره } 25/0)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow \frac{n}{2}(4 + (n-1)2) > 110 \Rightarrow \frac{n}{2}(2n+2) > 110 \quad (\text{نمره } 5/0)$$

$$n^2 + n - 110 > 0 \Rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+440}}{2} = -11, 10 \quad \begin{array}{c} -11 \quad 10 \\ + \quad \cdot \quad - \quad \cdot \quad + \end{array} \quad \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n > 10 \Rightarrow n \text{ حداقل} = 11 \quad (\text{نمره } 25/0)$$

(حسابان یازدهم، صفحه‌های ۳ و ۴)

پاسخ سؤال ۴: (۱/۲۵ نمره)

با توجه به مشخص بودن رأس سهمی، ضابطه سهمی به صورت زیر است:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

$$\begin{aligned} h: \text{طول رأس سهمی} &\Rightarrow \begin{cases} f(x) = a(x-2)^2 - 1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4a - 1 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad (\text{نمره } 25/0) \\ k: \text{عرض رأس سهمی} &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) - 1 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases} \quad (\text{نمره } 25/0)$$

(حسابان یازدهم، صفحه‌های ۱۶ و ۱۱)

پاسخ سؤال ۵: (۱/۵ نمره)

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4 \quad (\text{نمره } 25/0), \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2 \quad (\text{نمره } 25/0)$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله جدید را محاسبه می‌کنیم.

$$S_{\text{جدید}} = \alpha + 1 + \beta + 1 = \alpha + \beta + 2 = S + 2 = 4 + 2 = 6 \quad (\text{نمره } 25/0)$$

$$P_{\text{جدید}} = (\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = P + S + 1 = -2 + 4 + 1 = 3 \quad (\text{نمره } 25/0)$$

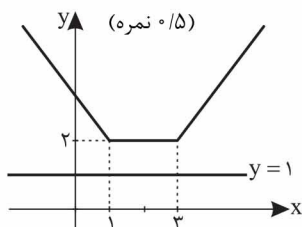
$$x^2 - Sx + P = 0 \quad (\text{نمره } 25/0) \Rightarrow x^2 - 6x + 3 = 0 \quad (\text{نمره } 25/0)$$

(حسابان یازدهم، صفحه ۱۵)

پاسخ سؤال ۶: (۱/۲۵ نمره)

نمودار توابع $y=1$ و $y=|x-3|+|x-1|$ را رسم کرده و برخورد آنها را بررسی می‌کنیم.

$$y = |x-3| + |x-1| \quad (\text{نمره } 5/0)$$



$$|x-3| + |x-1| = 1 \Rightarrow y = |x-3| + |x-1| = \begin{cases} x-3+x-1=2x-4 & x \geq 3 \\ -x+3+x-1=2 & 1 < x < 3 \\ -x-3-x+1=-2x+4 & x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{نمره } 5/0)$$

خط $y=1$ نمودار تابع $y=|x-3|+|x-1|$ را قطع نمی‌کند، پس معادله جواب ندارد. (نمره ۲۵/۰)

(حسابان یازدهم، صفحه ۲۴)

$$\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)} = 3 \frac{x(x-1)^2}{x \neq 1} \rightarrow 1 + 2(x-1) = 3(x-1)^2$$

(نمره ۰/۲۵)

$$(x-1) = t \Rightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2 \\ t=-\frac{1}{3} \Rightarrow x-1=-\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

(نمره ۰/۲۵)

ب)

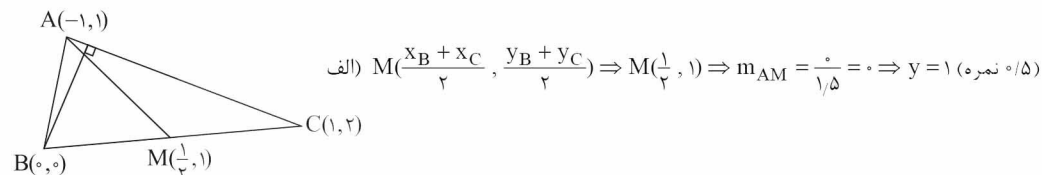
$$\left. \begin{aligned} x^2 - 9 &= \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad (1) \\ x^2 - 9 &\geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \cup x \leq -3 \quad (2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1) \cap (2) = \emptyset$$

(نمره ۰/۲۵)

(نمره ۰/۲۵)

معادله جواب ندارد.

(حسابان یازدهم، صفحه ۱۹)



ب) $m_{AC} = \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$ (نمره ۰/۲۵)

$$y-1 = \frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow y-1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

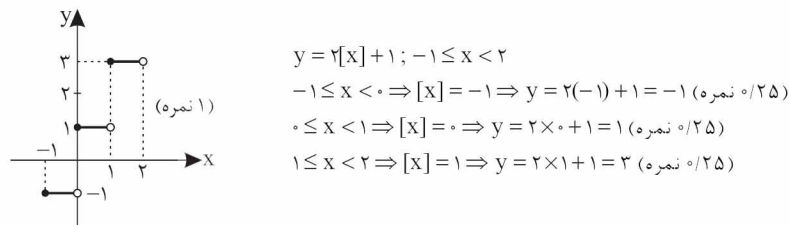
(نمره ۰/۲۵)

$$2y = x + 3 \Rightarrow 2y - x - 3 = 0$$

$$BH = \frac{|\frac{1}{2} - x - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

(نمره ۰/۲۵)

(حسابان یازدهم، صفحه ۳۶)



نمودار تابع به صورت مقابل است.

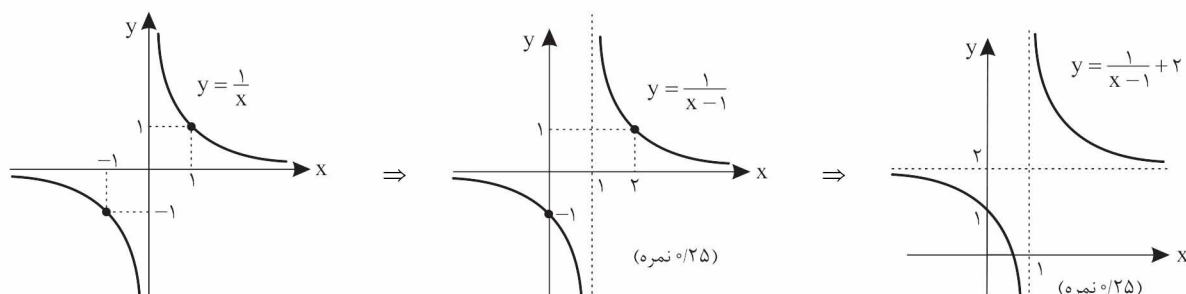
(حسابان یازدهم، صفحه های ۴۹ و ۵۱)

الف)

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y = \frac{1}{x-1} + 2$$

(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

ب)



(حسابان یازدهم، صفحه های ۴۵ و ۵۲)

$$y = \sqrt{x-2} - 1$$

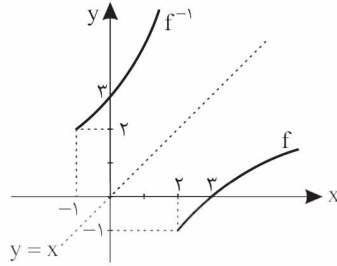
الف) $y_1 = y_2 \Rightarrow \sqrt{x_1-2} - 1 = \sqrt{x_2-2} - 1 \Rightarrow \sqrt{x_1-2} = \sqrt{x_2-2} \Rightarrow x_1-2 = x_2-2 \Rightarrow x_1 = x_2$ (نمره ۰/۲۵)

ب) $y+1 = \sqrt{x-2} \Rightarrow x-2 = (y+1)^2 \Rightarrow x = (y+1)^2 + 2$

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = (x+1)^2 + 2 & (\text{نمره } ۰/۵) \\ D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty) \end{cases}$$

ج) $(2, -1) \in f \Rightarrow (-1, 2) \in f^{-1}$

$(3, 0) \in f \Rightarrow (0, 3) \in f^{-1}$



(با رسم شکل نیز یک‌به‌یک بودن تابع را می‌توان نشان داد)

(نمره ۰/۵)

(حسابان یازدهم، صفحه‌های ۵۵، ۵۹ و ۶۲)

اعمال جبری فقط در دامنه مشترک انجام می‌شود.

$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_g = [0, 2]$ (نمره ۰/۲۵)

$D_f \cap D_g = \{1, 2\}$ (نمره ۰/۲۵)

$g(1) = 1, g(2) = 0$ (نمره ۰/۲۵)

$f = \{(2, 1), (1, -3), (-1, 2), (-3, 2), (4, -3)\}$

$f \times g = \{(2, 0), (1, -3)\}$ (نمره ۰/۲۵)

$f - g = \{(2, 1), (1, -4)\}$ (نمره ۰/۲۵)

(حسابان یازدهم، صفحه ۷۰)

پس مقدار تابع g را در دامنه مشترک با f به دست می‌آوریم.

الف) $D_g = (-\infty, 5], D_f = \mathbb{R} - \{4\} \Rightarrow D_{f(g(x))} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \Rightarrow D_{f \circ g} = (-\infty, 5] - \{-1\}$
 (نمره ۰/۲۵)
 $\begin{matrix} 5 \geq x & \sqrt{5-x} \neq 4 \\ \text{(نمره } ۰/۲۵) & 5-x \neq 16 \\ & x \neq -11 \\ & \text{(نمره } ۰/۵) \end{matrix}$

$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{5-x}-4}$ (نمره ۰/۵)

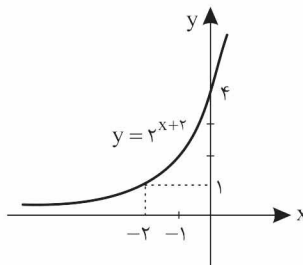
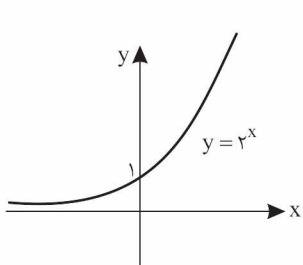
ب) $g(f(5)) = g(1) = \sqrt{5-1} = 2$ (نمره ۰/۲۵)

(حسابان یازدهم، صفحه ۶۹)

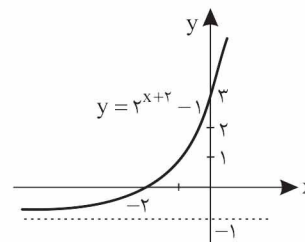
الف) $((2)^{\frac{1}{2}})^{x-2} < 2^{-2x}$ (نمره ۰/۲۵)

$\Rightarrow 2^{\frac{1}{2}(x-1)} < 2^{-2x} \Rightarrow \frac{1}{2}x - 1 < -2x \Rightarrow \frac{5}{2}x < 1 \Rightarrow x < \frac{2}{5}$ (نمره ۰/۵)

ب)



(نمره ۰/۲۵)



(نمره ۰/۵)

ج) $\frac{a-1}{2} > 1 \Rightarrow a > 4$ (نمره ۰/۵)

(حسابان یازدهم، صفحه ۷۸)

