



خط گذرا از دو نقطه $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ ، بر منحنی پیوسته $y = f(x)$ در نقطه $x = 3$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x}$ وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۵

(۳) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

مشتق تابع f در نقطه $x = 2$ به صورت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - 8}{h} = 12$ بیان شده است، k کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۶

(۳) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{(x-1) \cdot \sqrt[5]{3x-2}}{(\Delta x - 3)^4}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{8}$ (۱) $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{5}{16}$ (۳) $\frac{3}{40}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

اگر $f(x) = (x^2 - x)$ و $g(x) = \sqrt{2x}$ حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x)g(2 + \Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x}$ برابر کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۷

(۳) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x - |x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^3 - |x^3|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{2}$ (۱) $-\frac{1}{2}$

(۴) -۱

(۳) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ اگر $f(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{x+|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^5 + |x^5|}$ باشد، مقدار $g'(\sqrt[5]{3})f'(g(\sqrt[5]{3}))$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$
(۳) -1 (۴) 1

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیهٔ اول محوره‌ای مختصات، مماس است؟

- (۱) -4 (۲) 4 و -12
(۳) -4 و 12 (۴) 12

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۸ اگر $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ ، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3
(۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۹ اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1
(۳) 2 (۴) 3

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۰ اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع fog کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3
(۳) 4 (۴) مشتق ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۱ مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ $x = 1$ برابر ۳ است. اگر $f(1) = 0$ و $f'(1) = -4$ و $g'(1)$ موجود باشد، مقدار $g(1)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱۲

اگر تابع f در $x = -2$ مشتق پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $x^2 f(x)$ در $x = -2$ ، کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۱۰
(۳) ۱۲
(۴) ۱۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۳

اگر تابع f در $x = 4$ مشتق پذیر و $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = \frac{-3}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{4}$
(۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۱۴

تابع f مشتق پذیر و با دوره تناوب ۵ است. اگر $f'(-1) = \frac{3}{2}$ و $g(x) = f(x+1) + f(3x+10)$ باشد، حاصل $g'(-2)$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) $\frac{7}{2}$
(۳) ۶
(۴) $\frac{13}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۵

تابع چندجمله‌ای درجه دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقی مانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به ترتیب -2 و $\frac{1}{2}x + 1$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$ ، کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۶

مشتق تابع $f(x) = x \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$ در نقطه $x = -3$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{4}{3}$
(۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۷

اگر $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}$ ، آنگاه $f'(2)$ کدام است؟

- (۱) $-0/2$
(۲) $-0/1$
(۳) $0/1$
(۴) $0/2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱۸

در تابع با ضابطه $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟

- (۱) -۲۱
(۲) -۱۸
(۳) ۱۲
(۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۹

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4} \right] (x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$ مقدار $f'(2) - f'(5)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۰

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{48}$
(۲) $\frac{5}{24}$
(۳) $\frac{7}{24}$
(۴) $\frac{7}{16}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۱

باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $2x + x^2$ به‌ترتیب ۱ و $3x + 1$ است. اگر $Q(-2) = 3$ ، آنگاه مقدار باقی‌مانده تقسیم $P'(x)$ بر $2x + x^2$ کدام است؟

- (۱) -۶
(۲) -۵
(۳) -۴
(۴) -۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۲

مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3$ در نقطه $x = 2$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$
(۲) $-\frac{5}{4}$
(۳) $-\frac{5}{2}$
(۴) $-\frac{15}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۳

مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{2x - x^2}{3x + 5}\right)^2}$ در نقطه $x = -2$ ، کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۴

تابع f در $x = 2$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x = 2$ کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۲/۵

(۴) ۴

(۳) ۳/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۵

از تساوی $y = \sqrt[3]{x}$ ، مقدار $y''y^5$ برابر کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{3}x$ (۱) $-\frac{4}{9}x$ (۴) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{9}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۶

فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطه مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطه مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

(۲) ۹

(۱) ۸

(۴) ۱۲

(۳) ۱۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۷

خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$ ، در نقطه $x = 2$ ، مشترک‌اند. مقدار b کدام است؟

(۲) ۵

(۱) ۴

(۴) ۷

(۳) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۸

اگر $h(0) = 2h'(0) = -g(1) = -g'(1) = f'(-1) = 1$ ، مقدار مشتق تابع $f \circ g \circ h$ در صفر کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) -۲

(۴) ۲

(۳) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۹

اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \frac{3}{2}$ و $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$ ، آنگاه $(g \circ f)'(1)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۳۰

مشتق عبارت $\left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$ به ازای $x = -8$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) 1 (۴) 2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳۱

اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{1}{3}$ ، مشتق $f(\sqrt{|x|} + 3)$ در نقطه $x = -1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{12}$
(۳) $-\frac{1}{6}$ (۴) $-\frac{1}{12}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۳۲

اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$
(۳) 2 (۴) 3

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۳

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{12}$
(۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{5}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۴

اگر $f(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ ، حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{x}$ (۲) $\frac{3}{x^2}$
(۳) $\frac{1}{3x}$ (۴) $\frac{x - 3}{x^2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۳۵

اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt[3]{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

- (۱) -۶
(۲) -۳
(۳) $-\frac{3}{2}$
(۴) $-\frac{3}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۳۶

خط به معادله $y = 3x - 5$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(fog)'(2)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۷

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4}+h) - f(\frac{1}{4})}{h}$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۸

تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر از مرتبه دوم است. به ازای هر عدد حقیقی x تابع $g(x) = f(4 - x^2)$ است. اگر $f'(1) = -5$ و $f''(1) = -1$ باشد، مقدار $g''(\sqrt{3})$ کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) -۲
(۳) ۲
(۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۳۹

اگر $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{30}$
(۲) $-\frac{5}{12}$
(۳) $\frac{5}{6}$
(۴) $-\frac{13}{15}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۴۰

اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ حاصل $f'(x) \cdot g'(f(x))$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) ۱
(۳) x
(۴) $\frac{1}{2}x$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴۱

فرض کنید $1 + \left(x[x^2 + \frac{1}{2}]\right)^2 = f(x)$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$. مقدار مشتق تابع $f \circ g$ در $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$ ، چندبرابر $(-128\sqrt{2})$ است؟

(۲) ۱

(۱) -۴

(۴) ۴

(۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۴۲

اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ ، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1 + x^2})$ کدام است؟

(۲) $x - \sqrt{1 + x^2}$ (۱) $-x + \sqrt{1 + x^2}$ (۴) $\sqrt{1 + x^2}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۴۳

اگر $f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x + 2}$ ، آنگاه مشتق تابع $f(xf(x))$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) -۱

(۴) ۱

(۳) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۴۴

اگر $f'(0) = g(0) = 1$ و $f(x) = x + 1 + (g(x))^5$ ، مقدار $f''(0)$ برابر کدام است؟

(۲) $5g''(0)$ (۱) $4g''(0)$ (۴) $5g''(0) + 20$ (۳) $4g''(0) + 20$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۴۵

دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = 3x + |x|$ و $g(x) = \frac{3}{4}x + a|x|$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a ، تابع $g \circ f$ در مبدأ مختصات مشتق‌پذیر است؟

(۲) $-\frac{1}{2}$ (۱) $-\frac{1}{4}$ (۴) هیچ مقدار a (۳) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۶

خط $y = -1$ بر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2x^2 - x + a$ مماس است. a کدام است؟

(۲) $-\frac{7}{8}$ (۱) $-\frac{9}{8}$ (۴) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{7}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۴۷

خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2}{x-1}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۴۸

عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ در نقطه $x = 1$ واقع بر آن کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{5}$
(۲) $\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۴۹

خط به معادله $y = 2x - 5$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادله $y = ax^2 + bx + 1$ مماس است، a کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۵۰

خط d موازی محور x ها، سهمی $y = x^2 - 1$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. مجموع عرض‌های این دو نقطه کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $-\frac{1}{4}$
(۴) $-\frac{3}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۵۱

خط d موازی محور x ها، قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $1/25$
(۲) $3/25$
(۳) $0/75$
(۴) $2/75$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۵۲

به ازای کدام مقدار a خط به معادله $y = -3x + 2$ بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2 + a}{x - 2}$ مماس است؟

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۵۳

خط d در نقطه $(-1, 5)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر شیب خط d برابر $-\frac{1}{p}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}f(x)$ باشد، مقدار $g'(-1)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{7}{6}$ (۴) $\frac{13}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵۴

اگر $y = 2x + b$ بر نمودار $y = \frac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۵۵

در کدام نقطه از منحنی $y = x^2 - 4x + 5$ ، خط مماس بر منحنی، بر $3x - 6y = 1$ عمود است؟

- (۱) $(-2, 17)$ (۲) $(-1, 10)$
(۳) $(1, 2)$ (۴) $(2, 1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۵۶

خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{2x-1}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن، از نقطه $(-1, 0)$ می‌گذرد. α کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱
(۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۵۷

معادله خط مماس بر نمودار $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $4y - 3x = n$ است. مقدار $m + n$ چقدر است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲
(۳) ۲ (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵۸

به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله $y = 5x + a$ ، بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ مماس است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲
(۳) ۲ (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۵۹

خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{5x - 4}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x = 4$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

- (۱) -۴ (۲) -۱
(۳) ۲ (۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۶۰

خط به معادله $y = 3x - 2$ در نقطه $x = 2$ ، بر منحنی پیوسته $y = f(x)$ مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - 4f(x)}{x - 2}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶
(۳) ۱۲ (۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۶۱

خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 + 3x^2 + 1$ ، بر خط به معادله $x - 3y = 2$ عمود است. این خط مماس، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

- (۱) (۱, ۳) (۲) (۱, ۴)
(۳) (۲, -۶) (۴) (۲, -۴)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۶۲

خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 - x^2$ در نقطه $x = 1$ واقع بر آن، منحنی را در نقطه دیگر (A) قطع می‌کند. عرض نقطه A کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲
(۳) ۲ (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۶۳

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4x - 5}{x + 1}$ و دامنه $[0, 8]$ ، خط مماس بر نمودار آن، موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) -۲ (۲) -۱/۵
(۳) -۱ (۴) -۰/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۴

به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله $(m + 2)y = mx$ ، موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y = \sqrt{1 + x^2}$ است؟

- (۱) $m > -1$ (۲) $m < -1$
(۳) $m > 1$ (۴) $m < 1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۶۵

تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ را در نظر بگیرید، شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۸
(۳) -۸
(۴) -۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۶۶

خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x$ ، با بیشترین شیب ممکن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$
(۲) $-\frac{5}{3}$
(۳) $-\frac{7}{3}$
(۴) $-\frac{8}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۶۷

اگر تابع f در x_0 مشتق‌پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -2$ ، مقدار $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $2 - f(x_0)$
(۲) $2 + f(x_0)$
(۳) ۲
(۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۶۸

اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$ باشد، b کدام است؟

- (۱) -۸
(۲) -۶
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۶۹

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+a}-b}{x} & ; x \neq 0 \\ \frac{1}{12} & ; x = 0 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ پیوسته است. b کدام است؟

- (۱) ± 1
(۲) ± 2
(۳) ± 3
(۴) ± 4

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۷۰

اگر $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{2(x-1)}$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۷۱

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{a(1 + \sqrt[3]{1-x})}{x^2 - 2x} & ; x > 2 \\ x - a & ; x \leq 2 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

(۲) $1/6$ (۱) $1/2$ (۴) $3/2$ (۳) $2/4$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۷۲

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x - 3} & ; x > 3 \\ ax - 3a - \frac{3}{a} & ; x \leq 3 \end{cases}$ در نقطه $x = 3$ پیوسته است؟

(۲) 2 (۱) -2 (۴) a هرچه باشد(۳) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۷۳

در تابع $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) صفر

(۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

۷۴

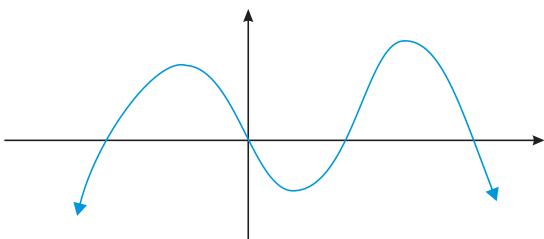
اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

(۲) -1 (۱) -2 (۴) 2 (۳) 1

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۷۵

نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. معادله $f'(x) = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟



(۱) صفر

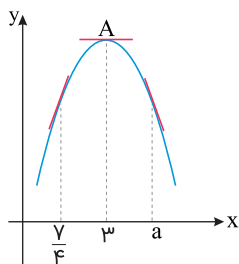
(۲) یک

(۳) دو

(۴) سه

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

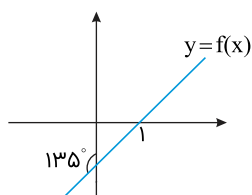
نمودار زیر مربوط به یک سهمی می‌باشد. سه خط مماس رسم شده است. اگر A رأس سهمی و $f'(\frac{7}{4}) + f'(3) + f'(a) = 0$ شود، مقدار a کدام است؟



- (۱) $\frac{19}{4}$
 (۲) $\frac{13}{4}$
 (۳) $\frac{17}{4}$
 (۴) $\frac{15}{4}$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

نمودار $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار f' چگونه می‌تواند باشد؟



- (۱)
 (۲)
 (۳)
 (۴)

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4x+4h) - f(4x)}{4h}$ کدام است؟

- (۱) $(4f(4x))'$
 (۲) $\frac{1}{4}f'(x)$
 (۳) $f'(x)$
 (۴) $f'(4x)$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

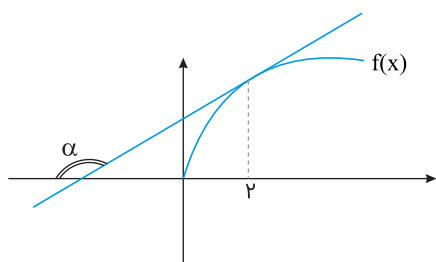
اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = 1 - \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{2(x-4)}$ باشد، مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر منحنی چقدر است؟

- (۲) $\frac{2}{3}$
(۴) ۳

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۳) ۲

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۶

اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(2+h) - f(2)} = 2$ باشد، زاویه α چند درجه است؟



- (۱) ۱۳۵
(۲) ۱۲۰
(۳) ۱۵۰
(۴) ۱۶۵

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۰۶

اگر $2f(2) = f'(2) = 4$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'''(x) - f'''(2)}{x - 2}$ کدام است؟

- (۲) ۱۲
(۴) ۹۶

- (۱) ۹۲
(۳) ۴۸

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳۹۹۶

اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{2h + h^2} = 2 + \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ باشد، $f'(4)$ کدام است؟

- (۲) -۲
(۴) -۴

- (۱) ۲
(۳) ۴

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۰۶

در سهمی $y = 4x^2 - 8x + 3$ ، طول نقطه‌ای که شیب خط مماس بر آن، قرینه شیب خط مماس در نقطه‌ای به طول ۳ $x = 3$ می‌باشد، کدام است؟

- (۲) -۱
(۴) -۲

- (۱) ۱
(۳) ۲

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

اگر $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{2h} = 4$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4}$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۸

(۴) -۴

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

حاصل ضرب مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x) = |x - 2|[-x]$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

(۱) -۶

(۲) ۴

(۳) -۴

(۴) ۶

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۱

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۱



۱	☐ ☒ ☐ ☐	۱۱	☒ ☐ ☐ ☐	۲۱	☐ ☐ ☐ ☒	۳۱	☐ ☒ ☐ ☐	۴۱	☐ ☐ ☐ ☒
۲	☐ ☐ ☒ ☐	۱۲	☐ ☐ ☐ ☒	۲۲	☐ ☐ ☐ ☒	۳۲	☐ ☐ ☒ ☐	۴۲	☐ ☐ ☒ ☐
۳	☒ ☐ ☐ ☐	۱۳	☐ ☐ ☒ ☐	۲۳	☐ ☐ ☐ ☒	۳۳	☐ ☐ ☒ ☐	۴۳	☐ ☐ ☒ ☐
۴	☐ ☐ ☐ ☒	۱۴	☐ ☐ ☒ ☐	۲۴	☐ ☐ ☒ ☐	۳۴	☐ ☒ ☐ ☐	۴۴	☐ ☒ ☐ ☐
۵	☐ ☐ ☒ ☐	۱۵	☐ ☐ ☒ ☐	۲۵	☐ ☐ ☒ ☐	۳۵	☒ ☐ ☐ ☐	۴۵	☒ ☐ ☐ ☐
۶	☐ ☐ ☒ ☐	۱۶	☐ ☒ ☐ ☐	۲۶	☐ ☐ ☐ ☒	۳۶	☐ ☐ ☐ ☒	۴۶	☐ ☒ ☐ ☐
۷	☒ ☐ ☐ ☐	۱۷	☐ ☐ ☒ ☐	۲۷	☐ ☐ ☐ ☒	۳۷	☐ ☐ ☒ ☐	۴۷	☐ ☐ ☐ ☒
۸	☐ ☒ ☐ ☐	۱۸	☒ ☐ ☐ ☐	۲۸	☐ ☒ ☐ ☐	۳۸	☐ ☒ ☐ ☐	۴۸	☐ ☒ ☐ ☐
۹	☒ ☐ ☐ ☐	۱۹	☒ ☐ ☐ ☐	۲۹	☒ ☐ ☐ ☐	۳۹	☐ ☒ ☐ ☐	۴۹	☐ ☐ ☐ ☒
۱۰	☐ ☒ ☐ ☐	۲۰	☒ ☐ ☐ ☐	۳۰	☒ ☐ ☐ ☐	۴۰	☐ ☒ ☐ ☐	۵۰	☒ ☐ ☐ ☐
۵۱	☒ ☐ ☐ ☐	۶۱	☐ ☐ ☒ ☐	۷۱	☐ ☐ ☒ ☐	۸۱	☐ ☐ ☒ ☐		
۵۲	☐ ☒ ☐ ☐	۶۲	☐ ☒ ☐ ☐	۷۲	☐ ☐ ☐ ☒	۸۲	☐ ☐ ☐ ☒		
۵۳	☐ ☐ ☒ ☐	۶۳	☐ ☐ ☒ ☐	۷۳	☐ ☐ ☒ ☐	۸۳	☐ ☒ ☐ ☐		
۵۴	☐ ☐ ☒ ☐	۶۴	☒ ☐ ☐ ☐	۷۴	☐ ☒ ☐ ☐	۸۴	☒ ☐ ☐ ☐		
۵۵	☐ ☐ ☒ ☐	۶۵	☐ ☐ ☐ ☒	۷۵	☐ ☐ ☐ ☒	۸۵	☒ ☐ ☐ ☐		
۵۶	☐ ☐ ☒ ☐	۶۶	☐ ☐ ☐ ☒	۷۶	☐ ☐ ☒ ☐				
۵۷	☐ ☐ ☒ ☐	۶۷	☐ ☐ ☐ ☒	۷۷	☒ ☐ ☐ ☐				
۵۸	☐ ☒ ☐ ☐	۶۸	☒ ☐ ☐ ☐	۷۸	☐ ☐ ☐ ☒				
۵۹	☐ ☐ ☒ ☐	۶۹	☐ ☒ ☐ ☐	۷۹	☐ ☒ ☐ ☐				
۶۰	☐ ☐ ☒ ☐	۷۰	☐ ☒ ☐ ☐	۸۰	☒ ☐ ☐ ☐				



گام اول

الف) معادله خط گذرا از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به صورت زیر است:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) خط در نقطه $x = 3$ بر منحنی مماس است بنابراین مختصات این نقطه در معادله خط و منحنی صدق می‌کند.

گام دوم

ابتدا معادله خط گذرا از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(-1, 3)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{-1 - 1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

طبق قسمت ج از گام اول داریم:

$$f(3) = y(3) = -\frac{1}{2}(3) + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow f(3) = 1$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول $f'(3) = \frac{-1}{2}$ است. اکنون با دو روش حاصل حد داده شده را به دست می‌آوریم.
روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow 3} - \frac{(f(x) + 5)(f(x) - 1)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} - (f(x) + 5) \frac{(f(x) - f(3))}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} - (f(x) + 5)(f'(3)) = - (f(3) + 5)f'(3) = -6 \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \end{aligned}$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \frac{f^2(3) + 4f(3) - 5}{3 - 3} = \frac{1 + 4 - 5}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f'(x)f(x) + 4f'(x)}{-1} = \frac{2f'(3)f(3) + 4f'(3)}{-1} \\ &= \frac{2 \left(-\frac{1}{2}\right)(1) + 4 \left(-\frac{1}{2}\right)}{-1} = \frac{-1 - 2}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3 \end{aligned}$$

روش اول:

حد داده شده را ساده کرده و سپس مقدار k را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - 8}{h} = 12 &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(4 + 4h + h^2) + 2k + kh - 2k - 8}{h} = 12 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 8h + 2h^2 + kh - 8}{h} = 12 &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 8h + kh}{h} = 12 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} 2h + 8 + k = 12 &\Rightarrow 8 + k = 12 \Rightarrow k = 4 \end{aligned}$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

حد داده شده را با استفاده از قاعده هوییتال حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - 8}{h} = \frac{0}{0} \\ \xrightarrow{\text{هوییتال}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \times 2(1)(2+h) + k}{1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 4h + k}{1} = 12 \Rightarrow 8 + k = 12 \Rightarrow k = 4 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

به ازای $x = 1$ عبارت $(x-1)$ برابر صفر می‌شود (عامل صفرشونده)، همچنین تابع $g(x) = \frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(\omega x - 3)^4}$ نیز در نقطه $x = 1$ پیوسته است؛ بنابراین برای به دست آوردن مقدار $f'(1)$ کافی است مشتق عبارت $(x-1)$ را در تابع $g(x)$ ضرب و حاصل را به ازای $x = 1$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{(x-1) \sqrt[5]{3x-2}}{(\omega x - 3)^4} \xrightarrow[\text{در نقطه } x=1]{\text{عبارت } (x-1) \text{ عامل صفرشونده}} f'(x) = 1 \times \frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(\omega x - 3)^4} \\ \Rightarrow f'(1) = \frac{\sqrt[5]{3-2}}{(\omega - 3)^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ب) می‌دانیم: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

گام دوم

باتوجه به اینکه می‌دانیم $(fg)(x) = f(x)g(x)$ است، می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x)g(2 + \Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(fg)(2 + \Delta x) - (fg)(2)}{\Delta x} = (fg)'(2)$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول داریم:

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = (2x - 1)\sqrt{2x} + (x^2 - x)\frac{2}{2\sqrt{2x}} \\ \Rightarrow (fg)'(2) &= (4 - 1)\sqrt{4} + (2^2 - 2)\frac{1}{\sqrt{4}} = (3 \times 2) + \frac{2}{2} = 6 + 1 = 7 \end{aligned}$$

$$g'f'(g) = (fog)'$$

$$D_g(-\infty, 0) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x^3 + x^3} = \frac{1}{2x^3}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3} - \left|\frac{1}{2x^3}\right|}} \stackrel{g \leq 0}{=} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^3}}} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$(fog)'(x) = x' = 1$$

$$g'(x)f'(g(x)) = (fog)'(x)$$

$$x > 0 : g(x) = \frac{1}{2x^5}, \quad x > 0 : f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{2x}}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) \stackrel{x>0}{=} -\frac{1}{\sqrt[5]{2\left(\frac{1}{2x^5}\right)}} = -x$$

$$(fog)'(x) = -1 \Rightarrow (fog)'(\sqrt[5]{3}) = g'(\sqrt[5]{3})f'(g(\sqrt[5]{3})) = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

برای آنکه نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول مماس باشد، باید معادله تقاطع تابع را با خط $y = x$ نوشته و Δ را برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4(m+6) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (m-12)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -2 \end{cases}$$

شیب نمودار در نقطه برخورد برابر ۱ است. از معادله کلی، مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y' = 4x + m + 1 \xrightarrow{y'=1} 1 = 4x + m + 1 \Rightarrow x = -\frac{m}{4}$$

چون نمودار بر نیمساز ناحیه اول مماس می‌باشد، بنابراین $x > 0$ لذا $m = -4$ قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق یک تابع داریم:

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$$

ب) هرگاه u و v دو تابع بر حسب x باشند و داشته باشیم $f(x) = u \times v$ ، آنگاه مشتق تابع f چنین تعریف می‌شود:

$$f'(x) = u' \times v + v' \times u$$

گام دوم

باتوجه به قسمت ب از گام اول ابتدا ضابطه مشتق $f'(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = (x-2) \sqrt[3]{x^2} = (x-2) x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = 1 \times x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} (x-2) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$$

هدف ما محاسبه $f'(-1)$ است، پس داریم:

$$f'(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2} + \frac{2(-1-2)}{3\sqrt[3]{-1}} = 1 + \frac{2(-3)}{3(-1)} = 1 + 2 = 3$$

$$y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=2} y'(2) = g'(2)f'(g(2)) \Rightarrow 6 = g'(2)f'\left(\frac{5}{2-1}\right) \Rightarrow 6 = g'(2)f'(5) \quad (1)$$

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow g'(2) = -3$$

$$(1) : 6 = -3f'(5) \Rightarrow f'(5) = -2$$

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} (fog)(x) &= \frac{f}{\Delta} (fx + |x|) - \frac{1}{\Delta} |fx + |x|| \\ \text{اگر } x \geq 0 &\Rightarrow (fog)(x) = \frac{f}{\Delta} (\Delta x) - \frac{1}{\Delta} (\Delta x) = fx - x = 3x \\ \text{اگر } x < 0 &\Rightarrow fog(x) = \frac{f}{\Delta} (fx - x) - \frac{1}{\Delta} \left| \underbrace{fx - x}_{3x} \right| \\ &= \frac{12}{\Delta} x - \frac{1}{\Delta} (-3x) = \frac{15}{\Delta} x = 3x \end{aligned}$$

بنابراین $(fog)(x) = 3x$ پس:

$$(fog)'(x) = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

مشتق تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

گام دوم

باتوجه به مشخص بودن مقادیر $y'(1)$ ، $f(1)$ و $f'(1)$ ، مقدار $g(1)$ را حساب می‌کنیم (دلیل اینکه مقدار دقیق $g'(1)$ ذکر نشده صفر بودن $f(1)$ است).

$$y'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)} \Rightarrow 3 = \frac{(-4)g(1) - 0}{g^2(1)} \Rightarrow 3 = \frac{-4g(1)}{g^2(1)} \Rightarrow 3 = \frac{-4}{g(1)} \Rightarrow g(1) = -\frac{4}{3}$$

باتوجه به اینکه حد وجود دارد، پس صورت کسر نیز باید به ازای $h = 0$ صفر باشد، بنابراین داریم:

$$f(-2 + h) + 3 = 0 \xrightarrow{h=0} f(-2) = -3$$

طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2 + h) + 3}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = -3 \\ f'(-2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(x^2 f(x))' = 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-2} -4f(-2) + 4f'(-2) = -4(-3) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 12 + 2 = 14$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

باتوجه به اینکه حد وجود دارد، پس صورت کسر نیز باید به ازای $x = 4$ صفر باشد، بنابراین داریم:

$$f(x) + 7 = 0 \xrightarrow{x=4} f(4) = -7$$

تابع f در $x = 4$ مشتق پذیر است؛ بنابراین می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f'(4) = -\frac{3}{2}, f(4) = -7$$

گام دوم

$$\left(\frac{f(2x)}{x}\right)' = \frac{2f'(2x)x - f(2x)}{x^2}$$

$$\xrightarrow{x=2} \frac{2f'(4) \times 2 - f(4)}{4} = \frac{2\left(-\frac{3}{2}\right)(2) - (-7)}{4} = \frac{-6 + 7}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= f'(x+1) + 3f'(3x+10) \\
 x = -2 : g'(-2) &= f'(-2+1) + 3f'(3(-2)+10) \\
 &= f'(-1) + 3f'(4)
 \end{aligned}$$

تابع f دوره تناوب ۵ دارد، پس $f'(-1) = f'(4)$

$$g'(-2) = 4f'(-1) = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

تابع P به صورت زیر است:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

P' به صورت زیر است:

$$P'(x) = 2ax + b$$

سؤال گفته اگر P را بر P' تقسیم کنیم، خارج قسمت $1 + \frac{x}{2}$ و باقی مانده -2 است. اتحاد تقسیم را می نویسیم:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= P'(x) \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right) + (-2) \Rightarrow ax^2 + bx + c = (2ax + b) \left(\frac{x}{2} + 1\right) - 2 \\
 &\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + \left(2a + \frac{b}{2}\right)x + (b - 2)
 \end{aligned}$$

ضرایب عبارات هم درجه را برابر قرار می دهیم:

$$x^2 \text{ ضرایب} \Rightarrow a = a$$

$$x \text{ ضرایب} \Rightarrow b = 2a + \frac{b}{2} \xrightarrow{\times 2} 2b = 4a + b \Rightarrow b = 4a$$

$$\text{جملات درجه صفر} \Rightarrow c = b - 2$$

a, b, c سه عدد طبیعی اند. چون می خواهیم کمترین مقدار $a + b + c$ را حساب کنیم، پس باید در رابطه $b = 4a$ ، $a = 1$ و $b = 4$ باشد، پس:

$$c = b - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow \min(a + b + c) = 1 + 4 + 2 = 7$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} \\
 \Rightarrow f'(x) &= \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{1}{3} \times \frac{3(x+2) - (3x+1)}{(x+2)^2} \times \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}} \times x \\
 &= \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{5x}{3(x+2)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}} \xrightarrow{x=-2} 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

الف) مشتق تابع $y = \sqrt{u}$ از رابطه $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ به دست می‌آید.

ب) مشتق تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

گام دوم

با استفاده از روابط گام اول، ابتدا $f'(x)$ و سپس $f'(2)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{3(2x+1) - 2(3x-1)}{(2x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}} = \frac{5}{2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{5}{2\sqrt{\frac{6-1}{4+1}}} = \frac{5}{2\sqrt{\frac{5}{5}}} = \frac{5}{2} = \frac{1}{10}$$

حد داده شده برابر مشتق تابع $f(x)$ در $x = 2$ است، بنابراین مشتق تابع را در $x = 2$ به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

$$f'(x) = 3 \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^2 \times \left(\frac{-1}{2 \sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} (2x-3)^2} \right)$$

$$\Rightarrow f'(2) = 12 \times \frac{-1}{2 \times \sqrt{\frac{2+2}{4-3}} (4-3)^2} = -21$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4} \right] (x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

$$2 < 4 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}} \quad (I)$$

$$5 > 4 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{x}{4} \right] (x^2 - 9x), \quad \left[\frac{5}{4} \right] = 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} f'(2) = \frac{5}{4}$$

$$\xrightarrow{(II)} f'(5) = 1$$

پس $f'(2) - f'(5) = \frac{1}{4}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

گام اول

می‌دانیم: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ بنابراین حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ برابر $f'(1)$ است.

گام دوم

کافی است مقدار مشتق تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}} \times \frac{4(x+3) - (4x+5)}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4+5}{1+3}}} \times \frac{4(1+3) - (4+5)}{(1+3)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{16} = \frac{7}{32}$$

گزینه ۴

با اطلاعات مسئله داریم:

$$P(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1 \quad (1)$$

از طرفین رابطه (۱) مشتق می‌گیریم:

$$P'(x) = (2x + 2)Q(x) + (x^2 + 2x)Q'(x) + 3$$

$$P'(-2) = -2Q(-2) + 3 = -2(3) + 3 = -3$$

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3 = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x)^3}$$

سپس مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 + 2x)'(x^2 - x)^3 - ((x^2 - x)^3)'(x^2 + 2x)}{(x^2 - x)^6} \\ &= \frac{(2x + 2)(x^2 - x)^3 - (3(x^2 - x)^2)(x^2 + 2x)}{(x^2 - x)^6} \\ f'(2) &= \frac{6 \times 8 - 3 \times 3 \times 4 \times 8}{64} = -\frac{15}{4} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{2x - x^2}{3x + 5} \right)^{\frac{2}{3}} \\ f'(x) &= \frac{2}{3} \left(\frac{2x - x^2}{3x + 5} \right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{(2 - 2x)(3x + 5) - 3(2x - x^2)}{(3x + 5)^2} \right) \\ \Rightarrow f'(-2) &= \frac{2}{3} \left(\frac{-4 - 4}{-6 + 5} \right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{6(-1) - 3(-4 - 4)}{(-6 + 5)^2} \right) \\ &= \frac{2}{3} (8)^{-\frac{1}{3}} (-6 + 24) = \frac{2 \times 18}{3\sqrt[3]{8}} = 6 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

باتوجه به عبارت $f(2) = 9$ و $f'(2) = \frac{3}{2}$ می‌شود.

$$\begin{aligned} g(x) &= x\sqrt{f(x)} \Rightarrow g'(x) = \sqrt{f(x)} + x \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \Rightarrow g'(2) = \sqrt{f(2)} + 2 \frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} \\ \Rightarrow g'(2) &= \sqrt{9} + 2 \times \frac{\frac{3}{2}}{2\sqrt{9}} = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

برای سهولت در مشتق‌گیری به جای $\sqrt[3]{x}$ ، عبارت $x^{\frac{1}{3}}$ را قرار می‌دهیم. ضابطه مشتق دوم یا همان y'' را تعیین کرده و حاصل $y''y^{\frac{5}{3}}$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} y = \sqrt[3]{x} &\Rightarrow y = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \\ \Rightarrow y'' &= \left(\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \\ \Rightarrow y''y^{\frac{5}{3}} &= -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} (\sqrt[3]{x})^{\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \times \sqrt[3]{x^5} = -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

از آنجا که این دو نمودار در یک نقطه بر یک خط مماس هستند، پس هم مقادیر و هم مشتق‌هایشان در این نقطه برابر است. داریم:

$$\begin{aligned} y_1 = x\sqrt{x} &\Rightarrow y'_1 = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \\ y_2 = x^2 + ax + b &\Rightarrow y'_2 = 2x + a \\ y'_1(4) = y'_2(4) &\Rightarrow 2 + \frac{4}{2} = 8 + a \Rightarrow a = -5 \end{aligned}$$

و نیز داریم:

$$y_1(4) = y_2(4) \Rightarrow 16 = 16 - 5(4) + b \Rightarrow 16 = -4 + b \Rightarrow b = 12$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$\begin{cases} f(2) = \frac{2+2}{2-1} = 4 \xrightarrow{f(2)=g(2)} 2a + 2b = 4 \quad (1) \\ g(2) = 2a + 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = -3 \\ g'(x) = 2ax + b \Rightarrow g'(2) = 2a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'(2)=g'(2)} 2a + b = -3 \quad (2)$$

باتوجه به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} 2a + 2b = 4 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow b = 7$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

گام اول

می‌دانیم $g \circ f(x) = g(f(x))$ و $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ است.

گام دوم

باتوجه به گام اول و فرض‌های صورت سؤال، مشتق تابع $y = f \circ g \circ h(x)$ را در نقطه $x = 0$ به دست می‌آوریم:

$$y = f \circ g \circ h(x) = f(g(h(x)))$$

$$\Rightarrow y' = (g(h(x)))' \times f'(g(h(x))) = h'(x) \times g'(h(x)) \times f'(g(h(x)))$$

$$\xrightarrow{x=0} y'(0) = h'(0) \times g'(h(0)) \times f'(g(h(0)))$$

$$\xrightarrow{h(0)=1, \quad h'(0)=1} y'(0) = \frac{1}{\sqrt{e}} \times g'(1) f'(g(1))$$

$$\xrightarrow{-g(1)=1, \quad -g'(1)=1} y'(0) = \frac{1}{\sqrt{e}} \times (-1) f'(-1)$$

$$\xrightarrow{f'(-1)=1} y'(0) = \frac{1}{\sqrt{e}} (-1) (1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = g'(2)$$

ب) می‌دانیم:

$$(g \circ f)'(1) = f'(1) g'(f(1))$$

گام دوم

با استفاده از ضابطه تابع $f(x)$ ، مقادیر $f(1)$ و $f'(1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{5 - x^2} \Rightarrow f(1) = \sqrt{5 - 1} = 2$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{5 - x^2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{5 - 1}} = \frac{-1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$$

پس مقدار $(g \circ f)'(1)$ برابر است با:

$$(g \circ f)'(1) = f'(1) g'(f(1)) \xrightarrow{f(1)=2} (g \circ f)'(1) = f'(1) \times g'(2) = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

می‌دانیم مشتق تابع $y = u^n$ که u تابعی بر حسب x است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y' = nu'u^{n-1}$$

گام دوم

با استفاده از گام اول مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2} \right)^2 \Rightarrow y = \left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}} \right)^2$$

$$\Rightarrow y' = 2 \times \left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \right) \left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}} \right) \Rightarrow y' = 2 \left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) \left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}} \right)$$

$$\xrightarrow{x=-8} y' = 2 \left(-\frac{16}{64} - \frac{2}{3 \times (-2)} \right) \left(\frac{16}{-8} - 4 \right) = 2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) (-2 - 4) = 2 \left(\frac{1}{12} \right) (-6) = -\frac{12}{12} = -1$$

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

ب) اگر $y = f(u)$ باشد به طوری که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y' = u' f'(u)$$

گام دوم

مشتق تابع $f(\sqrt{|x|+3})$ در همسایگی نقطه $x = -1$ محاسبه می شود بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{x=-1} |x| = -x \Rightarrow f(\sqrt{|x|+3}) = f(\sqrt{3-x})$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول می توان چنین نوشت:

$$y = f(\sqrt{3-x}) \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{3-x}} f'(\sqrt{3-x})$$

$$\Rightarrow y'(-1) = \frac{-1}{\sqrt{3+1}} f'(\sqrt{3+1}) = \frac{-1}{2 \times 2} f'(2)$$

$$\xrightarrow{f'(2)=-\frac{1}{2}} y'(-1) = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

فرض دوم مسئله، تعریف مشتق تابع $f(x)$ در $x = 2$ است:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3}$$

$$g(1) = 1 + \sqrt{1} = 2$$

طبق قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \times f'(g(1)) = g'(1) \times f'(2) = \frac{4}{3} g'(1)$$

ازطرفی:

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{x=1} g'(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

در نتیجه:

$$(f \circ g)'(1) = \frac{4}{3} g'(1) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ برابر $f'(4)$ است، بنابراین برای به دست آوردن $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ کافی است $f'(4)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5 - 2x) + 2(1 + \sqrt{x})}{(5 - 2x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{4}(5 - 8) + 2(1 + 2)}{(5 - 8)^2} = \frac{-\frac{3}{4} + 6}{9} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

گام اول

می‌دانیم $f \circ g(x) = f(g(x))$ و $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ است.

گام دوم

با داشتن ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ ، ابتدا ضابطه $f \circ g(x)$ را تعیین کرده، سپس از آن مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3}, \quad g(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{(g(x))^3 - 2}{1 + (g(x))^3} = \frac{(\sqrt[3]{x-1})^3 - 2}{1 + (\sqrt[3]{x-1})^3} = \frac{x-1-2}{1+x-1} = \frac{x-3}{x}$$

$$\Rightarrow y = f \circ g(x) = \frac{x-3}{x}$$

ضابطه y' را به دست می‌آوریم:

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = y' = \frac{x - (x-3)}{x^2} = \frac{x - x + 3}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

گام اول

طبق تعریف مشتق، حد خواسته‌شده مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = -1$ است یعنی:

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

گام دوم

به ازای $x = -1$ عبارت $(x^2 - x - 2)$ برابر صفر می‌شود و تابع $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - 7x}$ نیز در $x = -1$ پیوسته است؛ بنابراین برای محاسبه مشتق در نقطه $x = -1$ ، کافی است از عامل صفرشونده (عبارت $(x^2 - x - 2)$) مشتق گرفته، در تابع $g(x)$ ضرب کنیم و در نهایت مقدار آن را به ازای $x = -1$ به دست آوریم:

$$x = -1 : f'(x) = (2x - 1) \sqrt[3]{x^2 - 7x} \Rightarrow f'(-1) = (-2 - 1) \sqrt[3]{(-1)^2 - 7(-1)} = (-3) \sqrt[3]{8} = -3 \times 2 = -6$$

چون خط $y = 3x - 5$ در $x = 2$ بر $g(x)$ مماس است، پس $g'(2) = 3$ و $A(2, 1) \in g$ خواهد بود.

ازطرفی چون $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x-1)} = \frac{2}{3}$ است، پس:

$$\frac{1}{2}f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$y = f \circ g(x) \Rightarrow y' = g'(x) f'(g(x)) \Rightarrow y'(2) = g'(2) f'(g(2))$$

$$\Rightarrow y'(2) = 3f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

حاصل $f'(\frac{1}{4})$ را می‌خواهیم:

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{1}{4}} \frac{-\frac{1}{2} - 1(-\frac{5}{4})}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$g(x) = f(4 - x^2) \Rightarrow g'(x) = -2xf'(4 - x^2)$$

$$\Rightarrow g''(x) = -2(f'(4 - x^2) + x(-2x)f''(4 - x^2))$$

$$\Rightarrow g''(\sqrt{3}) = -2(f'(1) - 6f''(1)) = -2(-5 - 6 \times (-1)) = -2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

$$f(x) = (x - 4)\sqrt[3]{x + 3} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x + 3} + (x - 4) \frac{1}{3\sqrt[3]{(x + 3)^2}}$$

$$f(5) = 2, \quad f'(5) = \frac{25}{12}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(5-h) - 1)(f(5-h) - 2)}{h(5-h)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(5-h) - 1}{(5-h)} \right) \times \left(\frac{-(f(5-h) - 2)}{-h} \right) \\ = \left(\frac{f(5) - 1}{5} \right) (-f'(5)) = \frac{1}{5} \times \left(-\frac{25}{12} \right) = -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

راه حل دوم: از قاعده هوییتال نیز می‌توان برای به دست آوردن حد استفاده کرد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

می‌دانیم $\text{gof}(x) = g(f(x))$ و $(\text{gof})'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ است. توجه کنید که دامنه تعریف تابع $\text{gof}(x)$ به صورت زیر است:

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

گام دوم

باتوجه به گام اول، ابتدا ضابطه $\text{gof}(x)$ را تعیین کرده و مشتق آن را به دست می‌آوریم. برای تعیین ضابطه $g(f(x))$ کافی است در ضابطه $g(x)$ به جای متغیر x ، ضابطه $f(x)$ را قرار دهیم.

$$D_f = (-1, 1), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{\text{gof}} = (-1, 1)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x \quad ; \quad -1 < x < 1$$

$$\Rightarrow y = \text{gof}(x) = x \Rightarrow f'(x) g'(f(x)) = y' = 1 \quad ; \quad -1 < x < 1$$

می‌دانیم: $(f \circ g(x))' = g'(x) f'(g(x))$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{-2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \frac{-2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{-2 \times \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{\lambda}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{9}{\lambda}-1\right)^4}} = \frac{\frac{-6}{\sqrt{\lambda}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{16}}} = \frac{-6 \times 16}{\sqrt[3]{16}} = \frac{-16}{\sqrt[3]{2}} = -8\sqrt[3]{2}$$

$$g\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{\lambda}-1}} = 2$$

حال باید $f'(2)$ را حساب کنیم. در همسایگی $x = 2$ حاصل براکت ۴ می‌شود.

$$f(x) = 16x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$$

$$(f \circ g)\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{\lambda}}\right) = -8\sqrt[3]{2} \times 64 = (-128\sqrt[3]{2}) \times 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

اگر $y = f(u)$ باشد به‌طوری‌که u خود تابعی از x است، آنگاه داریم:

$$y' = u' f'(u)$$

گام دوم

باتوجه به گام اول و با فرض اینکه $u = x + \sqrt{1+x^2}$ است، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ را به دست می‌آوریم، همچنین داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(u) = \frac{1}{u}$$

$$y = f(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = (x + \sqrt{1+x^2})' f'(x + \sqrt{1+x^2}) = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

گام اول

می‌دانیم: $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$

گام دوم

با تعریف $u = xf(x)$ و باتوجه به گام اول، مشتق $f(xf(x))$ را تعیین و مقدار آن را در $x = 2$ محاسبه می‌کنیم.

$$u = xf(x) \Rightarrow u' = f(x) + xf'(x)$$

$$y = f(xf(x)) \Rightarrow y' = (f(x) + xf'(x))f'(xf(x))$$

اکنون ضابطه $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{x+2} - \frac{x}{2\sqrt{x+2}} \right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{xf(x)+2}} \right) \\ &= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{x+2} - \frac{x}{2\sqrt{x+2}} \right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}x - x\sqrt{x+2} + 2}} \right) \\ \Rightarrow y'(2) &= \left(\frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{3-4+2}} \right) = (-1) \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ابتدا ضابطه $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x + 1 + (g(x))^{\Delta} \Rightarrow f'(x) = 1 + \Delta g'(x) (g(x))^{\Delta}$$

$$\Rightarrow f'(\circ) = 1 + \Delta g'(\circ) (g(\circ))^{\Delta}$$

باتوجه به اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\xrightarrow{f'(\circ)=g(\circ)=1} 1 = 1 + \Delta g'(\circ) (1)^{\Delta} \Rightarrow \Delta g'(\circ) = \circ \Rightarrow g'(\circ) = \circ$$

در محاسبه ضابطه تابع $f''(x)$ با عبارت $(g(x))^{\Delta} g'(x)$ روبه‌رو هستیم. چون $g'(\circ) = \circ$ است پس عبارت $g'(x)$ عامل صفرشونده تابع $f'(x)$ در نقطه $x = \circ$ می‌شود و داریم:

$$\Rightarrow f''(\circ) = \circ + \Delta g''(\circ) (g(\circ))^{\Delta}$$

$$\xrightarrow[g(\circ)=1]{x=\circ} f''(\circ) = \Delta g''(\circ) (1)^{\Delta} = \Delta g''(\circ)$$

گام اول

الف) تابع در یک نقطه مشتق پذیر است؛ هرگاه مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و باهم برابر باشد.
 ب) مشتق تابع $g \circ f(x)$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$y = g \circ f(x) = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

گام دوم

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته اند؛ بنابراین مشتق چپ و راست تابع $g \circ f$ را در نقطه $x = 0$ به طور مستقیم تعیین می کنیم.

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 4x \Rightarrow f'(x) = 4 \\ g(x) = \left(\frac{3}{4} + a\right)x \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{4} + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)'_+(0) = f'_+(0)g'_+(f(0)) = 4\left(\frac{3}{4} + a\right) = 3 + 4a$$

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \\ g(x) = \left(\frac{3}{4} - a\right)x \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{4} - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)'_-(0) = f'_-(0)g'_-(f(0)) = 2\left(\frac{3}{4} - a\right) = \frac{3}{2} - 2a$$

باتوجه به قسمت الف) از گام اول، تابع $g \circ f$ در $x = 0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$(g \circ f)'_+(0) = (g \circ f)'_-(0) \Rightarrow 3 + 4a = \frac{3}{2} - 2a \Rightarrow 6a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

راه حل اول:

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی منحنی، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) مختصات نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس و معادلهٔ منحنی صدق می‌کند.

ج) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.

شیب خط $y = -1$ برابر صفر است:

$$f'(x) = 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{4}, -1\right) \in f \Rightarrow 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + a = -1 \Rightarrow a = -\frac{7}{8}$$

راه حل دوم:

خط بر یک منحنی مماس است در صورتی که معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

با مساوی قرار دادن معادلهٔ خط و منحنی، معادلهٔ تلاقی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$2x^2 - x + a = -1 \Rightarrow 2x^2 - x + a + 1 = 0$$

می‌دانیم معادلهٔ درجه دو در صورتی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta = 0$ شود:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(a+1) = 0 \Rightarrow 1 - 8(a+1) = 0$$

$$\Rightarrow 8(a+1) = 1 \Rightarrow a+1 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = -\frac{7}{8}$$

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.
 ب) معادله خطی به شیب m که از نقطه (x_0, y_0) عبور می‌کند، به صورت زیر است:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ج) در محل برخورد یک منحنی با محور عرض‌ها، مقدار x برابر صفر است.

گام دوم

$$y = \frac{x^2}{x-1} \xrightarrow{x=2} y(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$m_{\text{مماس}} = y'(2) = \frac{2^2 - (2 \times 2)}{(2-1)^2} = \frac{4-4}{1} = 0$$

بنابراین معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $(2, 4)$ به صورت زیر است:

$$y - y(2) = y'(2)(x - 2) \xrightarrow[\substack{y'(2)=0 \\ x=2}}{y - 4 = 0} \Rightarrow y = 4$$

پس محل برخورد خط مماس بر منحنی در نقطه $(2, 4)$ یعنی خط $y = 4$ با محور y ها دارای عرض ۴ است.

گام اول

الف) عرض از مبدأ یک خط، به ازای جایگذاری $x = 0$ ، در معادله آن به دست می‌آید.
 ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.
 ج) معادله خطی به شیب m که از نقطه (x_1, y_1) عبور می‌کند به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

ابتدا معادله خط مماس را می‌نویسیم. طبق قسمت "ب" از گام اول، شیب این خط برابر است با:

$$y = \sqrt{x^2 + 3x} \Rightarrow y' = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$$

$$y'(1) = \frac{2 + 3}{2\sqrt{1 + 3}} = \frac{5}{2\sqrt{4}} = \frac{5}{2 \times 2} = \frac{5}{4} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{5}{4}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow y(1) = 2$$

بنابراین، طبق قسمت "ج" از گام اول، معادله خط مماس در نقطه $(1, 2)$ برابر است با:

$$y - y(1) = y'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4} + 2 \Rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$$

با جایگذاری $x = 0$ در معادله خط مماس، داریم:

$$\xrightarrow{x=0} y = \frac{5}{4}(0) + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی، برابر $\frac{3}{4}$ است.

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی منحنی، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) مختصات نقطه تماس در معادله خط مماس و معادله منحنی صدق می‌کند.

ج) شیب خطی به معادله $y = ax + b$ برابر a است.

گام دوم

شیب خط $y = 2x - 5$ برابر ۲ است؛ بنابراین مشتق تابع به معادله $y = ax^2 + bx + 1$ در نقطه $x = 1$ نیز برابر ۲ می‌شود:

$$y = ax^2 + bx + 1 \Rightarrow y' = 2ax + b \xrightarrow{x=1} m_{\text{مماس}} = y'(1) = 2 \Rightarrow 2a + b = 2 \quad (I)$$

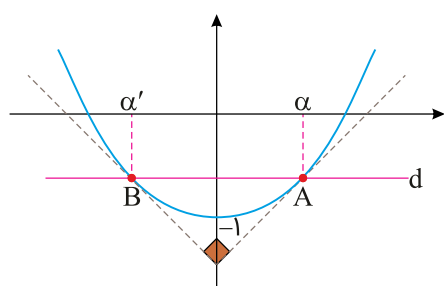
طبق قسمت ب از گام اول، به ازای $x = 1$ مقدار به دست آمده از معادله خط و منحنی برابر است، پس داریم:

$$y = 2x - 5 \Rightarrow y(1) = 2 - 5 = -3$$

$$y = ax^2 + bx + 1 \Rightarrow y(1) = a + b + 1 = -3 \Rightarrow a + b = -4 \quad (II)$$

از دو معادله (I) و (II)، a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ -a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 6$$



نقاط تماس را $A(\alpha, \alpha^2 - 1)$ و $B(-\alpha, \alpha^2 - 1)$ فرض می‌کنیم. چون مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمود هستند، داریم:

$$f'(\alpha) \times f'(-\alpha) = -1 \quad (*)$$

$$f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$\xrightarrow{(*)} (2\alpha) \times (-2\alpha) = -1 \Rightarrow 4\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{2}$$

خط d را به معادله $y = k$ فرض می‌کنیم. قرینه سهمی نسبت به محور x ها به صورت $y = -x^2 - 1$ می‌باشد. اگر خط و سهمی در دو نقطه متقاطع باشند، پس:

$$-x^2 - 1 = k \Rightarrow x^2 = -k - 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-k-1}$$

شیب مماس‌ها عبارت‌اند از:

$$y' = -2x \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{-k-1}$$

اگر این دو شیب بر هم عمود باشند، پس:

$$-2\sqrt{-k-1} \times 2\sqrt{-k-1} = -1 \Rightarrow 4(-k-1) = 1 \Rightarrow -k-1 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = -\frac{5}{4}$$

فاصله خط d یعنی $y = -\frac{5}{4}$ از مبدأ برابر $\frac{5}{4}$ یعنی $1\frac{1}{4}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

در صورتی که خط بر منحنی مماس باشد، معادله تلاقی دو منحنی، ریشه مضاعف دارد:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^2 + a}{x - 2} \\ y = -3x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 + a}{x - 2} = -3x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + a = -3x^2 + 6x - 4 \Rightarrow 4x^2 - 6x + (a + 4) = 0$$

برای به دست آوردن ریشه مضاعف، $\Delta = 0$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4(4)(a + 4) = 0 \Rightarrow 36 - 16a - 64 = 0 \Rightarrow a = 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

اطلاعات مسئله نشان می‌دهد که $f(-1) = 5$ و $f'(-1) = -\frac{1}{3}$ است.

$$g(x) = \sqrt[3]{x}f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}f(x) + \sqrt[3]{x}f'(x)$$

$$g'(-1) = \frac{1}{3}f(-1) - f'(-1) = \frac{1}{3} \times 5 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{13}{6}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱ $x =$ ، عرض دو تابع را مقدار یکسانی قرار می‌دهد:

$$2 + b = \frac{1 + a}{a + 1} = 1 \Rightarrow b = -1$$

پس توابع به صورت $y = 2x - 1$ و $y = \frac{x + a}{ax + 1}$ هستند و در $x = 1$ مشتق یکسانی دارند.

$$y' = 2$$

$$y' = \frac{1 - a^2}{(ax + 1)^2} \xrightarrow{x=1} \frac{1 - a^2}{(a + 1)^2}$$

حال داریم:

$$\frac{1 - a^2}{(a + 1)^2} = 2 \Rightarrow \frac{1 - a}{(a + 1)} = 2$$

$$\Rightarrow 2a + 2 = 1 - a \Rightarrow 3a = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$$

$$a - b = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

$$6y - 3x = 1 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{1}{2}$$

چون خط مماس بر منحنی بر خط داده شده عمود است، شیب آن ۲- است. حالا داریم:

$$y' = 2x - 4 \Rightarrow 2x - 4 = -2 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{\text{نقطه}} (1, 2)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.
 ب) معادله خطی به شیب m که از نقطه (x_1, y_1) عبور می‌کند به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

فرض می‌کنیم نقطه $A\left(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)$ بر روی منحنی قرار داشته باشد. با محاسبه مشتق تابع در این نقطه، معادله خط مماس را تشکیل می‌دهیم.

$$y' = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2}$$

$$\xrightarrow{A\left(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)} y'_A = \frac{2(\alpha+1) - (2\alpha-1)}{(\alpha+1)^2} = \frac{2\alpha+2-2\alpha+1}{(\alpha+1)^2} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

$$y - y_A = y'_A(x - x_A) \Rightarrow y - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(x - \alpha)$$

خط مماس از نقطه $(-1, 0)$ می‌گذرد و بنابراین مختصات این نقطه در معادله خط صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=-1, y=0} 0 - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(-1 - \alpha)$$

$$\Rightarrow -\frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = -\frac{3(\alpha+1)}{(\alpha+1)^2} \Rightarrow \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{\alpha+1}$$

دقت کنید که نقطه $x = -1$ عضو دامنه تابع $y = \frac{2x-1}{x+1}$ نیست و تابع در این نقطه تعریف نشده است بنابراین $\alpha = -1$ است (زیرا نقطه $A\left(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)$ روی منحنی تابع قرار دارد) پس می‌توان عبارت $\alpha+1$ را در کسر فوق ساده کرد. داریم:

$$2\alpha - 1 = 3 \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$y' = \frac{(2x+m)(x+3) - (x^2+mx+1)}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow y'(1) = \frac{(2+m)(4) - (m+2)}{16} = \frac{3m+6}{16} \quad (1)$$

$$4y - 3x = n \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4} \Rightarrow y'(1) = \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{3m+6}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3m+6 = 12 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2$$

$$y(1) = \frac{m+2}{4} \xrightarrow{m=2} y(1) = 1$$

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 4y - 3x = 1 \Rightarrow n = 1$$

$$\Rightarrow m + n = 2 + 1 = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

خط $y = 5x + a$ بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ در نقطه‌ای مماس می‌شود که شیب خط مماس برابر با ۵ باشد.

$$y = 2x^2 - 3x + 6 \Rightarrow \text{شیب خط مماس} = \text{مشتق} \Rightarrow 4x - 3 = 5 \Rightarrow x = 2$$

پس خط در نقطه‌ای به طول ۲ بر تابع مماس است. به علاوه خط و تابع در این نقطه برخورد دارند. اگر $x = 2$ را در تابع قرار دهیم داریم:

$$y(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 6 = 8 - 6 + 6 = 8 \Rightarrow \text{نقطهٔ تماس } (2, 8)$$

نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس باید صدق کند:

$$y = 5x + a \xrightarrow{(2,8)} 8 = 5(2) + a \Rightarrow a = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

$$f(x) = \frac{5x - 4}{\sqrt{x}}$$

حال $f(4)$ و $f'(4)$ را به دست آورده و معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$f(4) = \frac{5 \times 4 - 4}{\sqrt{4}} = \frac{16}{2} = 8$$

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x - 4)}{x} \Rightarrow f'(4) = \frac{10 - \frac{1}{4}(16)}{4} = \frac{3}{4}$$

معادله خط مماس:

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Rightarrow y - 8 = \frac{3}{4}(x - 4)$$

$$\xrightarrow[\text{عرض از مبدأ}]{x=0} y - 8 = \frac{3}{4}(-4) \Rightarrow y - 8 = -3 \Rightarrow y = 5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.
ب) مختصات نقطه تماس، هم در معادله خط مماس و هم در معادله تابع صدق می‌کند.

گام دوم

شیب خط $y = 3x - 2$ برابر ۳ است؛ بنابراین طبق قسمت الف از گام اول نتیجه می‌گیریم $f'(2) = 3$ است. با جایگذاری $x = 2$ در معادله خط، عرض نقطه تماس نیز برابر است با:

$$f(2) = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$$

اکنون با ساده کردن حد داده‌شده حاصل آن را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4f(x)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(f(x) - 4)}{x - 2} \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}_{f(2)} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}}_{f'(2)} = f(2) \times f'(2) = 4 \times 3 = 12 \end{aligned}$$

گام اول

الف) شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر است؛ بنابراین حاصل ضرب آنها برابر ۱- می شود.

۲) شیب خطی به معادله $y = ax + b$ برابر a است.

ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

د) معادله خط به شیب m که از نقطه (x_1, y_1) عبور می کند به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

ابتدا معادله خط داده شده را به فرم استاندارد نوشته و شیب آن را به دست می آوریم.

$$x - 3y = 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

پس طبق قسمت الف از گام اول، شیب خط مماس بر منحنی برابر ۳- است. فرض می کنیم خط در نقطه $x = x_0$ بر منحنی مماس شده است بنابراین:

$$y = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow y'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 = -3$$

$$\Rightarrow 3x_0^2 + 6x_0 + 3 = 0 \xrightarrow{\div 3} x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \Rightarrow (x_0 + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$$

$$y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$$

پس نقطه تماس دارای مختصات $(-1, 3)$ است. طبق قسمت د از گام اول، معادله خط مماس برابر است با:

$$y - 3 = -3(x + 1) \Rightarrow y = -3x - 3 + 3 \Rightarrow y = -3x$$

از میان گزینه ها، فقط نقطه $(2, -6)$ در معادله خط صدق می کند.

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادله خطی به شیب m که از نقطه (x_1, y_1) عبور می‌کند، به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ج) مختصات نقطه تلاقی در هر دو معادله، صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه به قسمت "الف" و "ب" از گام اول، معادله خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$y = x^3 - x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2x \Rightarrow m_{\text{مماس}} = y'(1) = 3 - 2 = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y(1) = (1)^3 - (1)^2 = 1 - 1 = 0$$

$$y - y(1) = y'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 0 = x - 1 \Rightarrow y = x - 1$$

سپس با مساوی قرار دادن معادله خط $y = x - 1$ و معادله منحنی، مختصات نقطه تلاقی را محاسبه می‌کنیم:

$$x - 1 = x^3 - x^2 \Rightarrow x - 1 = x^2(x - 1) \Rightarrow (x - 1)(1 - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(1 - x)(1 + x) = 0 \xrightarrow{x \neq 1} 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

بنابراین $x_A = -1$ است و داریم:

$$y_A = (-1)^3 - (-1)^2 = -1 - 1 = -2$$

شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای بازه را به هم وصل می‌کند، پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{4x - 5}{x + 1} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -5 \\ f(8) = \frac{27}{9} = 3 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3 - (-5)}{8 - 0} = 1$$

بنابراین شیب خط مماس هم باید ۱ باشد:

$$f'(x) = \frac{4(x+1) - (4x-5)}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{9}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 & \text{ق.ق} \\ x+1 = -3 \Rightarrow x = -4 & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

خطی را می‌خواهیم که در $x = 2$ بر منحنی مماس است:

$$f(2) = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow (2, 1), m = 1$$

$$y - 1 = 1(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

گام اول

الف) دو خط موازی اند اگر و تنها اگر شیب آن‌ها باهم برابر باشد.
 ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

برای یافتن شیب خط، ابتدا معادله آن را به صورت استاندارد بازنویسی می‌کنیم:

$$(m+2)y = mx \Rightarrow y = \left(\frac{m}{m+2}\right)x$$

شیب این خط برابر $\left(\frac{m}{m+2}\right)$ است. کافی است ضابطه $f'(x)$ را تعیین کنیم و مساوی شیب خط قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x_0) = \frac{m}{m+2} \Rightarrow \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} = \frac{m}{m+2}$$

می‌دانیم $1 < \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} < 1$ - همواره برقرار است بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{m}{m+2} > -1 \Rightarrow \frac{m}{m+2} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{m+m+2}{m+2} > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > -1 \\ \frac{m}{m+2} < 1 \Rightarrow \frac{m}{m+2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{m-m-2}{m+2} < 0 \Rightarrow m > -2 \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های دو معادله فوق داریم: $m > -1$

راه حل اول: وارون تابع را حساب می‌کنیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \Rightarrow y\sqrt{x} - y = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x}(y - 1) = y + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y + 1}{y - 1}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{y + 1}{y - 1}\right)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2 = g(x)$$

$$g'(x) = 2\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) \times \frac{-2}{(x - 1)^3} \Rightarrow g'(2) = 2 \times 3 \times \frac{-2}{1} = -12$$

راه حل دوم: اگر نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر f^{-1} باشد، آنگاه متناظر با آن نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر f خواهد بود.

$$2 = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \Rightarrow 2\sqrt{x} - 2 = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow x = 9$$

پس نقطه $A(9, 2)$ روی f قرار دارد.

$$f'(x) = \frac{-2}{(\sqrt{x} - 1)^3} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9) = \frac{-2}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{-1}{12}$$

پس شیب خط مماس بر f^{-1} در نقطه $A'(2, 9)$ برابر -12 است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4x - 1$$

بیشترین شیب مماس، ماکزیمم مقدار مشتق است که در رأس سهمی $-x^2 + 4x - 1$ اتفاق می‌افتد.

$$x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2, \quad f(2) = \frac{10}{3} \Rightarrow A\left(2, \frac{10}{3}\right)$$

$$\text{شیب خط مماس: } m = f'(2) = -4 + 8 - 1 = 3$$

$$\text{عرض از مبدأ: } y - \frac{10}{3} = 3(x - 2) \xrightarrow{x=0} y = \frac{10}{3} - 6 = \frac{-8}{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^{-}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad f'_{+}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^{+}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ب) تابع f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر است هرگاه مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود و باهم برابر باشد.

گام دوم

وقتی $h \rightarrow 0^{-}$ حاصل حد داده شده $\frac{0}{0}$ و مبهم می‌شود. با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^{-}} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \stackrel{H}{=} \lim_{h \rightarrow 0^{-}} \frac{0 - (-1)f'(x_0 - h)}{1} = \lim_{h \rightarrow 0^{-}} f'(x_0 - h) = f'_{-}(x_0)$$

چون تابع در x_0 مشتق‌پذیر است، پس داریم:

$$f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0) = -2$$

بنابراین حاصل حد داده شده برابر -2 می‌شود.

گزینه ۱

هنگامی که $x = 1$ باشد، مخرج کسر صفر می‌شود؛ در نتیجه باید صورت کسر در این حالت صفر شود تا حالت $\frac{0}{0}$ ایجاد شود که بعد از رفع ابهام حاصل حد، عددی غیرصفر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{a+b}-2=0 \Rightarrow a+b=4$$

در اینجا برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\text{HOP} : \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{2x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{4\sqrt{a+b}} = \frac{3}{2} \xrightarrow{a+b=4} a = 12 \Rightarrow b = -8$$

$$f(\circ) = \frac{1}{1^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \circ} f(x) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sqrt[p]{x+a} - b}{x} = \frac{1}{1^2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[p]{\circ+a} - b = \circ & (1) \\ \text{HOP : } \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\frac{1}{\sqrt[p]{(x+a)^p}}}{1} = \frac{1}{1^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[p]{a^p}} = \frac{1}{1^2} \Rightarrow \sqrt[p]{a} = \pm 1 \xrightarrow{(1)} b = \pm 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1}{2(1-1)} = \frac{\circ}{\circ} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f'(x)}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$$

$$f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x^2 + x - 1} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(2x^2 + x - 1) - (2x + 1)(x^{\frac{3}{2}})}{(2x^2 + x - 1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{\frac{3}{2}(2+1-1) - (2+1)(1)}{(2+1-1)^2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

گام اول

تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است پس در نقطه ای به طول $x = 2$ هم باید پیوسته باشد.

گام دوم

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 2 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1 + \sqrt[3]{1-x})}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a \left(\frac{-1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} \right)}{2x - 2} = \frac{a \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{1}} \right)}{2} = -\frac{a}{2}$$

تابع در $x = 2$ باید پیوسته باشد. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{2} = 2 - a \Rightarrow -a = 4 - 2a \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{1} = 4$$

گام اول

الف) برای این که تابع در $x = 3$ پیوسته باشد، باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$$

ب) وقتی $x \rightarrow 3^+$ حاصل حد $\frac{0}{0}$ شده و مبهم است. با استفاده از قاعده هوییتال حاصل حد راست تابع را در نقطه $x = 3$ به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} ax - 3a - \frac{3}{\lambda} = 3a - 3a - \frac{3}{\lambda} = -\frac{3}{\lambda} \\ f(3) &= 3a - 3a - \frac{3}{\lambda} = -\frac{3}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x - 3} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{x+1}}}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{4}}}{1 - \frac{1}{2\sqrt{3-2}}} \\ &= -\frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = -\frac{\frac{3}{4}}{2} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

مشاهده می‌شود فارغ از اینکه مقدار a چند باشد، حاصل حد راست، حد چپ و مقدار تابع در نقطه $x = 3$ برابر است. پس به ازای هر مقدار a ، تابع $f(x)$ در نقطه $x = 3$ پیوسته است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{ax} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + x}{ax} = \frac{3x}{ax} = \frac{3}{a} \\ \frac{3}{a} = 3 &\Rightarrow a = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{x - 2} = \frac{0}{0} \\ \stackrel{\text{hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}}}{1} &= \frac{2 - \frac{10}{2 \times 4}}{1} = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

وقتی $x \rightarrow 2$ ، صورت کسر برابر صفر می‌شود؛ اما حاصل حد وقتی $x \rightarrow 2$ ، مخالف صفر است بنابراین باید به ازای $x = 2$ مخرج کسر هم برابر صفر شود؛ یعنی:

$$ax + b = 0 \xrightarrow{x=2} 2a + b = 0 \quad (I)$$

اکنون حاصل حد $\frac{0}{0}$ و مبهم است. با استفاده از قاعده هوییتال رفع ابهام کرده و مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{2 \times 2}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

با استفاده از رابطه (I) مقدار b برابر است با:

$$2 \left(\frac{1}{2} \right) + b = 0 \Rightarrow b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

در نقاطی که خطوط مماس در آن‌ها موازی محور x ‌ها است، مشتق برابر صفر است، پس در سه نقطه مشتق برابر صفر است.

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

چون A رأس سهمی است، پس $f'(3) = 0$ می‌باشد، یعنی مماس در A افقی است. ازطرفی سهمی یک تابع متقارن است، پس دو نقطه با طول‌های $\frac{7}{4}$ و a نسبت به ۳ متقارن هستند.

$$\frac{7}{4} + a = 2 \times 3 \Rightarrow a = 6 - \frac{7}{4} = \frac{24 - 7}{4} = \frac{17}{4}$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

تابع $f(x)$ یک تابع خطی با شیب $\tan 45^\circ = 1$ می‌باشد، پس $f'(x) = 1$ است. بنابراین گزینه "۱" صحیح می‌باشد.

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

بنا بر تعریف مشتق $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ کاملاً مشخص است که تعریف $f'(4x)$ می‌شود

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4x+4h) - f(4x)}{4h}$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

باتوجه به تعریف مشتق:

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

طبق داده مسئله:

$$f'(4) = 1 - \frac{1}{4}f'(4) \Rightarrow \frac{3}{4}f'(4) = 1 \Rightarrow f'(4) = \frac{4}{3}$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

باتوجه به تعریف مشتق داریم:

$$f'(2) + \frac{1}{f'(2)} = 2 \Rightarrow f'(2) = 1$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۰

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^3(x) - f^3(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - f(2))(f^2(x) + f^2(2) + f(2)f(x))}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \lim_{x \rightarrow 2} (f^2(x) + f^2(2) + f(2)f(x)) \\ &= f'(2) \times 3f^2(2) = 4 \times 12 = 48 \end{aligned}$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h(2+h)} &= 2 + f'(4) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}f'(4) &= 2 + f'(4) \Rightarrow f'(4) = -4 \end{aligned}$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۰

روش اول:

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 3 \Rightarrow f'(x) = 8x - 8$$

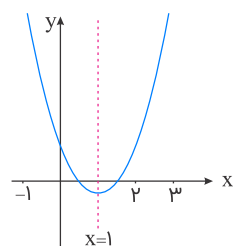
$$f'(3) = 8(3) - 8 = 16$$

قرینه شیب خط مماس برابر ۱۶- است. بنابراین:

$$f'(x) = 8x - 8 = -16 \Rightarrow 8x = -8 \Rightarrow x = -1$$

روش دوم:

$$y = 4x^2 - 8x + 3 \text{ تابعی درجه } 2 \text{ با محور تقارن } 1 \text{ است، پس داریم: } \frac{-(-8)}{2(4)} = 1$$

مطابق سهمی رسم شده، شیب خط مماس در $x = 3$ ، قرینه شیب خط مماس رسم شده در $x = -1$ است.

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{2h} = \frac{1}{2} f'_+(2) = 4 \Rightarrow f'_+(2) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 2} = f'_+(2) \times \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی

در همسایگی راست $x = 2$ داریم:

$$f(x) = (x - 2)(-3) \Rightarrow f'_+(2) = -3$$

در همسایگی چپ $x = 2$ داریم:

$$f(x) = (2 - x)(-2) \Rightarrow f'_-(2) = 2$$

$$f'_+(2)f'_-(2) = (-3) \times 2 = -6$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۹

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۹

۱

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \left[x + \frac{1}{3} \right] + [x]$ روی بازه $(0, 3)$ در چند نقطه، مشتق ناپذیر است؟

۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۲

اگر $f(x) = |x - 2| + \sqrt{2x}$ باشد، حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ کدام است؟

 $-\frac{1}{2}$ (۲)

-۲ (۱)

 $\frac{3}{2}$ (۴)

 $\frac{1}{2}$ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۳

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 5 & ; x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & ; x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر می باشد. b کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & ; x < 1 \\ 2\sqrt{4x - 3} & ; x \geq 1 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

۱ (۲)

 $\frac{1}{2}$ (۱)

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۵

در تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x} + |x - 1|$ مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ کدام است؟

۳ (۲)

۲ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۶

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x-1)|x-1| & ; x=1 \\ a & ; x=1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ مشتق پذیر است. a کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۷

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax - a & ; x < 1 \\ x^2 - x & ; x \geq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقادیر a در نقطه $x=1$ مشتق پذیر است؟

- (۱) -۱
(۲) ۱
(۳) هر مقدار a
(۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۸

تابع با ضابطه $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$ در کدام بازه مشتق پذیر است؟

- (۱) $[0, 1]$
(۲) $(-1, 0)$
(۳) $[1, +\infty)$
(۴) $(-\infty, -1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۹

اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$ همواره مشتق پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۰

در تابع با ضابطه $f(x) = |x| \cdot [x]$ مقدار $f'_-(0) - f'_+(0)$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۱

فرض کنید $g(x) = ax^2 + bx + c$ و $(a \neq 0)$ و $f(x) = \begin{cases} g(x) & ; x \geq k \\ g'(x) & ; x < k \end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b + c = a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
(۲) ۱
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۲

به ازای کدام مقدار a ، اختلاف شیب نیم‌خط‌های مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x) = |4x - 3|\sqrt{ax}$ ، در نقطه $x = \frac{3}{4}$ برابر $2\sqrt{6}$ می‌شود؟

(۱) ۲ (۲) ۸

(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{8}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۳

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{9}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ ، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۴

اگر $f(x) = x^3 - [2x^2]x$ باشد، مقدار $f'_-(\sqrt{2})$ و $f'_+(\sqrt{2})$ از راست به چپ کدام است؟ (با تغییر)

(۱) $f'_-(\sqrt{2})$ وجود ندارد و $f'_+(\sqrt{2})$ وجود ندارد. (۲) $f'_-(\sqrt{2})$ وجود ندارد و $f'_+(\sqrt{2}) = 2$

(۳) $f'_-(\sqrt{2}) = 3$ و $f'_+(\sqrt{2})$ وجود ندارد. (۴) $f'_-(\sqrt{2}) = 3$ و $f'_+(\sqrt{2}) = 2$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۵

اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - [x] + |x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$

(۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۶

تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{x} & ; x \geq 1 \\ ax^2 + bx & ; x < 1 \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱

(۳) ۳ (۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{ax+b} & ; x > 2 \\ -x^3 + 6x & ; x \leq 2 \end{cases}$ ، اگر $f'(2)$ موجود باشد، a کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

اگر $f(x) = \frac{x^2}{|1-x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ کدام است؟ (با تغییر)

- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{3}{4}$
(۴) وجود ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

فرض کنید $g(x) = ax^2 + 5x + b$ اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & ; x \leq 2 \\ g'(x) & ; x > 2 \end{cases}$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a + b$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{15}{2}$
(۲) $-\frac{5}{2}$
(۳) $\frac{5}{2}$
(۴) $\frac{15}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

تعداد نقاط مشتق ناپذیری تابع با ضابطه $f(x) = ||x| - 1|$ بر روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

تابع با ضابطه $y = x\sqrt{x^2}$ از نظر پیوستگی و مشتق پذیری در صفر چگونه است؟

- (۱) پیوسته و مشتق پذیر است.
(۲) پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.
(۳) نه پیوسته است و نه مشتق پذیر
(۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق پذیر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

اگر مماس چپ و راست تابع با ضابطه $f(x) = |x|(x+a)$ در نقطه گوشه‌ای (زاویه دار) آن عمود برهم باشند، مجموعه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $\{-1\}$
(۲) $\{1\}$
(۳) $\{-1, 1\}$
(۴) $\emptyset$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲۳

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x| & ; x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است. $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۲۴

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & ; x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & ; x < 2 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۵

مشتق راست تابع با ضابطه $f(x) = ([x] - |x|) \sqrt[3]{9x}$ در نقطه $x = -3$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{16}{3}$
(۲) -۵
(۳) -۴
(۴) $\frac{7}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۲۶

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & ; x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & ; x < 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است، $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) $3 - \sqrt{2}$
(۲) $2 - \sqrt{2}$
(۳) $2 - 2\sqrt{2}$
(۴) $3 - 2\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۷

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x > 1 \\ ax + b & ; x \leq 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است. b کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$
(۲) $\frac{7}{3}$
(۳) $\frac{8}{3}$
(۴) $\frac{10}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

تابع f با ضابطه زیر، در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ x + 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 2x + 2 & ; 1 \leq x < 2 \\ x^2 + 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

(۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر

(۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر

(۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

(۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x}$ ، در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

اگر $f(x) = 1 - |x|$ باشد، تعداد نقاط مشتق ناپذیری تابع با ضابطه $y = f(f(x))$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \text{ گویا} \\ 0 & ; x \text{ گنگ} \end{cases}$ در چند نقطه مشتق دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) بی شمار

(۴) هیچ نقطه

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1 + |x|}$ در نقطه $x = \alpha$ مشتق ندارد، مقدار $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) تعریف نشده

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۳۳

فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & ; x < -1 \\ x & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که gof یا fog در آنها مشتق پذیر نیست، کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۳۴

فرض کنید $f(x) = (x[x])^3$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ، مقدار مشتق چپ تابع fog در $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $(-48\sqrt{5})$ است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۵

اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ ، مشتق اول و دوم تابع $f^{-1}(x)$ در نقطه $x = 0$ چگونه است؟

- (۱) مشتق اول دارد - مشتق دوم دارد.
(۲) مشتق اول دارد - مشتق دوم ندارد.
(۳) مشتق اول ندارد - مشتق دوم دارد.
(۴) مشتق اول ندارد - مشتق دوم ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۳۶

مشتق چپ تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۲) $-\sqrt{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۴) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۳۷

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، از نقطه $x = 1$ تا $x = 1/21$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در نقطه $x = 1$ ، چقدر کمتر است؟ (با تغییر)

- (۱) $\frac{1}{42}$
(۲) $\frac{1}{21}$
(۳) $\frac{3}{42}$
(۴) $\frac{2}{21}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳۸

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند، برابر آهنگ لحظه‌ای در نقطه a می‌باشد. a کدام است؟

- (۱) ۱۱/۷۵
(۲) ۱۲/۲۵
(۳) ۱۲/۵
(۴) ۱۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۳۹

آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$ نسبت به تغییر x روی بازه‌ای از $x = 5$ تا $x = 9$ کدام است؟

- (۱) ۵/۴
(۲) ۵/۵
(۳) ۶/۵
(۴) ۷/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۴۰

در تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $2 + h$ تغییر کند برابر $\frac{1}{9}$ است. h کدام است؟

- (۱) ۱/۵
(۲) ۲
(۳) ۲/۵
(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۴۱

در تابع با ضابطه $f(x) = x^3$ ، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی $x = 3$ و $\Delta x = 0/1$ ، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x = 3$ چقدر بیشتر است؟

- (۱) ۰/۳۱
(۲) ۰/۴۲
(۳) ۰/۶۲
(۴) ۰/۹۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۴۲

در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر روی بازه $[2/25, 2/56]$ ، از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

- (۱) $\frac{1}{93}$
(۲) $\frac{2}{93}$
(۳) $\frac{1}{62}$
(۴) $\frac{1}{31}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۴۳

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، آهنگ متوسط از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 5$ ، برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \alpha$ است. α کدام است؟

- (۱) ۲/۵
(۲) $1 + \sqrt{3}$
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۴

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 3$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟

- (۱) ۱
(۲) $1/5$
(۳) ۲
(۴) $2/5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۵

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه $x = 4$ تا $x = 6/25$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x = 4$ چقدر کمتر است؟

- (۱) $\frac{1}{36}$
(۲) $\frac{1}{18}$
(۳) $\frac{5}{72}$
(۴) $\frac{1}{12}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۶

در تابع با ضابطه $f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه $x = 4$ تا $x = 12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x = 4$ چقدر بیشتر است؟

- (۱) $\frac{7}{540}$
(۲) $\frac{11}{540}$
(۳) $\frac{7}{270}$
(۴) $\frac{11}{270}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۴۷

در تابع با ضابطه $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ ، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در نقطه $a + \frac{h}{p}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به $a + h$ تغییر کند، کدام گزینه است؟

- (۱) h
(۲) $2h$
(۳) $3h$
(۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۴۸

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، در نقطه $x = 1$ با $\Delta x = 0/44$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟ (با تغییر)

- (۱) $\frac{1}{30}$
(۲) $\frac{1}{24}$
(۳) $\frac{1}{12}$
(۴) $\frac{1}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۹

در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin x \cos 2x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin^2 x - \cos^2 x$ است؟

- (۱) -1
(۲) ۱
(۳) $-\frac{1}{2}$
(۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۵۰

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ نسبت به متغیر x روی بازه $[0, 3]$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در $x = \sqrt{2}$ ، چقدر کمتر است؟

(۲) $\frac{1}{18}$
(۴) $\frac{1}{9}$

(۱) صفر
(۳) $\frac{1}{12}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۵۱

آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$ در بازه $[5, 6]$ ، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

(۲) $3 + 2\sqrt{2}$
(۴) $2 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$

(۱) $4 + \sqrt{2}$
(۳) $2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵۲

در تابع با ضابطه $f(x) = (x + 2)\sqrt{4x + 1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 2]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{4}$ چقدر بیشتر است؟

(۲) 0.15
(۴) 0.25

(۱) 0.10
(۳) 0.20

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۵۳

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ ، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = 2$ ، از آهنگ تغییر متوسط در بازه $[1, 4]$ کدام است؟

(۲) 0.5
(۴) 0.75

(۱) 0.25
(۳) 0.45

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۵۴

در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2x + 1} + \frac{1}{x + 1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{4}$ چقدر کمتر است؟

(۲) 0.04
(۴) 0.06

(۱) 0.03
(۳) 0.05

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۵

نقطه $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{x + 8}$ در حرکت است. T فاصله نقطه M تا مبدأ مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطه $x = 7$ کدام است؟

(۲) $\frac{15}{8}$
(۴) $\frac{5}{4}$

(۱) $\frac{15}{16}$
(۳) $\frac{3}{7}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۵۶

حاصل ضرب مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x) = |x - 2|[-x]$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

- (۱) -۶
(۲) ۴
(۳) -۴
(۴) ۶

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۹

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۹

۵۷

تابع $f(x) = x|x^2 - 4|$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

- (۱) صفر
(۲) یک
(۳) دو
(۴) سه

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۸

۵۸

تابع $f(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$ در کدام نقطه مماس دارد، ولی مشتق ندارد؟

- (۱) ۳
(۲) ۱
(۳) -۲
(۴) -۳

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۸

۵۹

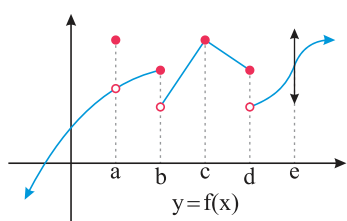
تابع $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$ در چند نقطه از دامنه خود مشتق ندارد؟

- (۱) صفر
(۲) یک
(۳) دو
(۴) سه

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

۶۰

در چند نقطه از تابع زیر، مشتق وجود ندارد، اما حد وجود دارد؟



- (۱) ۵
(۲) ۴
(۳) ۳
(۴) ۲

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۶

۶۱

در صورتی که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & ; x < 1 \\ x^3 + bx & ; x \geq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار b کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) -۱
(۴) نشدنی

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۶

۶۲

آهنگ لحظه‌ای حجم کره‌ای در لحظه‌ای که شعاع آن برابر a باشد، برابر ۱۶π است. آهنگ لحظه‌ای سطح کره در همان لحظه چقدر است؟

(۲) ۱۶π

(۱) ۱۰π

(۴) ۱۴π

(۳) ۱۲π

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۹

۶۳

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x > 1 \\ 2 & ; x = 1 \\ 4x & ; x < 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

(۲) $+\infty$

(۱) $-\infty$

(۴) 2

(۳) 4

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۶۴

در $f(x) = \frac{4}{x}$ اگر آهنگ لحظه‌ای در نقطه c با آهنگ متوسط در بازه $[1, 4]$ تابع باهم برابر باشند، آنگاه $f'(2c)$ چقدر است؟

(۲) $0/2$

(۱) $0/25$

(۴) $-0/2$

(۳) $-0/25$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

۶۵

آهنگ متوسط تابع $f(x) = x^3 + x$ در فاصله $[1, 2]$ دو برابر آهنگ لحظه‌ای در کدام نقطه از بازه است؟

(۲) $\frac{4}{3}$

(۱) 1

(۴) $\frac{5}{3}$

(۳) $\frac{3}{2}$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۰

۶۶

تابع $f(x) = [-x]$ در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟

(۲) $[1, 2)$

(۱) $(1, 3)$

(۴) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

(۳) $(1, 2]$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۶۷

آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$ در نقطه‌ای به طول ۸ کدام است؟

(۲) $\frac{17}{12}$

(۱) $\frac{17}{24}$

(۴) $\frac{17}{48}$

(۳) $\frac{15}{12}$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۴۰۱

۶۸

اگر $f(x) = [-x]|x - 2|$ باشد، حاصل ضرب مشتق چپ و راست تابع $f(x)$ در $x = 2$ چقدر است؟ (علامت جزء صحیح است.)

- (۱) -۶
(۲) ۶
(۳) ۲
(۴) -۳

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

۶۹

اگر $f(x) = x - |x^2 - 4|$ باشد، مجموع شیب‌های نیم‌مماس چپ و راست تابع f در نقطه $x = 2$ چقدر است؟

- (۱) ۵
(۲) -۳
(۳) -۵
(۴) ۲

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۰

۷۰

مشتق تابع $f(x) = x^2[x]$ در نقاط غیر صحیح کدام است؟

- (۱) $x[x]$
(۲) صفر
(۳) $2x[x]$
(۴) $[x]$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۷۱

آهنگ متوسط تابع $f(x) = x^3 + 2x^2$ در بازه $[1, 2]$ برابر آهنگ لحظه‌ای در کدام نقطه است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{43} + 2}{3}$
(۲) $\frac{\sqrt{43} - 2}{3}$
(۳) $\frac{\sqrt{34} + 2}{3}$
(۴) $\frac{\sqrt{34} - 2}{3}$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۷۲

آهنگ لحظه‌ای مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع با ارتفاع h وقتی ارتفاع برابر $\sqrt{3}$ باشد، چقدر است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) ۱

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۰

۷۳

اگر $f(x) = x^2 + |2x - 4|$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۴
(۳) ۲
(۴) صفر

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۰

۷۴

اتومبیلی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -4t^2 + 16t$ در حال حرکت است. اگر سرعت متوسط در بازه $[1, b]$ برابر ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۲/۵
(۴) ۳/۵

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۰

۷۵

معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^3 - t^2 + 10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای برابر سرعت متوسط است؟

- (۱) $\frac{1 + \sqrt{61}}{3}$
(۲) $\frac{\sqrt{61} - 1}{3}$
(۳) $\frac{\sqrt{61}}{3}$
(۴) $\frac{2 + \sqrt{61}}{3}$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۰

۷۶

اگر $f(x) = |x - 2| \left[-\frac{x}{3}\right]$ باشد، $f'_+(2) - f'_-(2)$ چقدر است؟

- (۱) ۲
(۲) -۲
(۳) ۳
(۴) -۳

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۰

۷۷

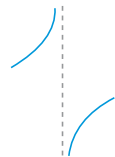
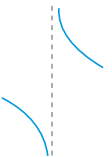
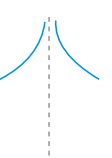
آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 + \sqrt{x}}$ در $x = 4$ کدام است؟

- (۱) $\frac{79}{36}$
(۲) $\frac{49}{18}$
(۳) $\frac{13}{18}$
(۴) $\frac{-47}{18}$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۴۰۰

۷۸

اگر $f(x) = x\sqrt[3]{1-x}$ باشد، $f'(x)$ در همسایگی $x = 1$ چگونه است؟

- (۱) 
(۲) 
(۳) 
(۴) 

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۹

۷۹ در تابع $f(x) = |x - 1| x^2$ مقدار مشتق چپ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) صفر
(۴) -۵

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

۸۰ در کدام نقطه زیر آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ دو برابر آهنگ متوسط آن در بازه $[-1, 3]$ است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $-\frac{3}{4}$
(۴) ۱

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۹

۸۱ آهنگ متوسط تابع $f(x) = x^3 + x$ در فاصله $[1, 2]$ دو برابر آهنگ لحظه‌ای در کدام نقطه از بازه است؟

- (۱) ۱
(۲) $\frac{4}{3}$
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) $\frac{5}{3}$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۹

۸۲ معادله نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = |-x^2 + x|$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $y = -x - 1$
(۲) $y = x + 1$
(۳) $y = -x + 1$
(۴) $y = x - 1$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

۸۳ معادله خط نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ در $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $y = 4x - 8$
(۲) $y = 8 - 4x$
(۳) $y = 4 - 2x$
(۴) $y = 2x - 4$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۸۴ تابع $f(x) = \begin{cases} x^4 - 1 & ; x \geq 1 \\ 4x - 3 & ; x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ چگونه است؟

- (۱) دارای مماس قائم است.
(۲) دارای نقطه گوشه‌ای است.
(۳) مشتق‌پذیر است.
(۴) پیوسته نیست.

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x} & ; x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$ چگونه است؟

(۱) پیوسته نیست.

(۳) نقطه گوشه‌ای است.

(۲) مشتق‌پذیر است.

(۴) دارای مماس قائم است.

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹



۱	○○○●	۱۱	○○●○	۲۱	●○○○	۳۱	●○○○	۴۱	○○○●
۲	○●○○	۱۲	○○●○	۲۲	○○●○	۳۲	○○●○	۴۲	●○○○
۳	○●○○	۱۳	○○●○	۲۳	●○○○	۳۳	○○●○	۴۳	○○●○
۴	○●○○	۱۴	○●○○	۲۴	○●○○	۳۴	○○○○	۴۴	●○○○
۵	○○●○	۱۵	○○●○	۲۵	○●○○	۳۵	○●○○	۴۵	●○○○
۶	●○○○	۱۶	○○○○	۲۶	○○●○	۳۶	●○○○	۴۶	○●○○
۷	○●○○	۱۷	○○●○	۲۷	○○○○	۳۷	●○○○	۴۷	○○○○
۸	○○○○	۱۸	○○○○	۲۸	○○●○	۳۸	○●○○	۴۸	○○○○
۹	○●○○	۱۹	●○○○	۲۹	○○●○	۳۹	○●○○	۴۹	●○○○
۱۰	○○●○	۲۰	○○○○	۳۰	○○●○	۴۰	○○●○	۵۰	●○○○
۵۱	○○○○	۶۱	○○○○	۷۱	○●○○	۸۱	●○○○		
۵۲	○○○○	۶۲	○●○○	۷۲	●○○○	۸۲	○○●○		
۵۳	○●○○	۶۳	●○○○	۷۳	○○●○	۸۳	○●○○		
۵۴	○●○○	۶۴	○○●○	۷۴	●○○○	۸۴	○○○○		
۵۵	●○○○	۶۵	●○○○	۷۵	●○○○	۸۵	○○○○		
۵۶	●○○○	۶۶	○○●○	۷۶	○○○○				
۵۷	○○●○	۶۷	○○○○	۷۷	●○○○				
۵۸	○○●○	۶۸	●○○○	۷۸	○○●○				
۵۹	○○○○	۶۹	○○○○	۷۹	○●○○				
۶۰	○○●○	۷۰	○○●○	۸۰	○○●○				



گام اول

الف) تابع $y = [f(x)]$ به ازای مقادیری که تابع $f(x)$ برابر یک عدد صحیح می‌شود، ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.
 ب) هرکدام از دو تابع $[x + \frac{1}{3}]$ و $[x]$ روی بازه $(0, 3)$ مشتق‌ناپذیر شوند، کل تابع $f(x) = [x + \frac{1}{3}] + [x]$ مشتق‌ناپذیر خواهد شد.

گام دوم

روش اول:

بررسی می‌کنیم در چه نقاطی از بازه $(0, 3)$ ، عبارت درون جزء صحیح برابر یک عدد صحیح می‌شود:

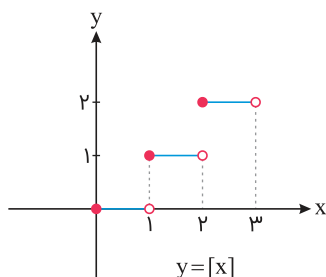
$$۱) \quad y = [x] : \quad x \in \mathbb{Z}, \quad x \in (0, 3) \Rightarrow x = 1, \quad x = 2$$

$$۲) \quad y = [x + \frac{1}{3}] : \quad x + \frac{1}{3} \in \mathbb{Z}, \quad x \in (0, 3) \Rightarrow x = \frac{2}{3}, \quad x = \frac{5}{3}, \quad x = \frac{8}{3}$$

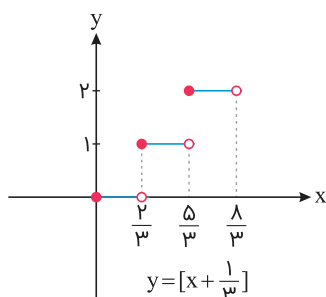
بنابراین تابع $f(x)$ در مجموع در ۵ نقطه ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

روش دوم:

با رسم نمودار توابع $y = [x]$ و $y = [x + \frac{1}{3}]$ ، نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:



نقاط ناپیوستگی: $x = 1, \quad x = 2$



نقاط ناپیوستگی: $x = \frac{2}{3}, \quad x = \frac{5}{3}, \quad x = \frac{8}{3}$

بنابراین تابع $f(x)$ در ۵ نقطه ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

گام اول

حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ بیانگر مقدار مشتق چپ تابع در نقطه $x = 2$ یا همان $f'_-(2)$ است.

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را وقتی $x < 2$ است، تعیین می‌کنیم سپس ضابطه $f'(x)$ و مقدار $f'(-2)$ را به دست می‌آوریم.

$$x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$$

$$f(x) = 2 - x + \sqrt{2x} \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} - 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = f'_-(2) = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{4}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

ابتدا از ضوابط داده‌شده مشتق چپ و راست را به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2} \Rightarrow f'_+(1) = -3$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'_-(1) = 2 + a$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow -3 = 2 + a \Rightarrow a = -5$$

چون تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر می‌باشد، بنابراین پیوسته نیز هست.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow 3 - 5 = (1)^2 - 5(1) + b \Rightarrow b = 2$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک مجموعه مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.
 ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است در صورتی که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > 1$ و $x < 1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنیم.
 بررسی شرط پیوستگی:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{4x-3} = 2\sqrt{4-3} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^3 + bx = a + b \\ f(1) &= 2\sqrt{4-3} = 2 \end{aligned} \right\} \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)}{\longrightarrow} a + b = 2 \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + b & ; x < 1 \\ 2 \times \frac{4}{2\sqrt{4x-3}} & ; x > 1 \end{cases}$$

تابع در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است در صورتی که $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ موجود و باهم برابر باشند، داریم:

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 3a + b = \frac{4}{\sqrt{4-3}} \Rightarrow 3a + b = 4 \quad (II)$$

دو معادله I و II را در یک دستگاه حل کرده و مجهول‌های a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} 3a + b = 4 \\ a + b = 2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{(I)} 1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$$

گام اول

$f'_+(1)$ یعنی مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ و $f'_-(1)$ یعنی مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$.

گام دوم

برای تعیین مشتق راست و چپ تابع در نقطه $x = 1$ ، ابتدا باید تکلیف قدر مطلق را روشن کنیم. ضابطه تابع و مشتق آن را به ازای $x > 1$ و $x < 1$ تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1 \\ x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = -x + 1 \end{cases}$$

می‌دانیم $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ پس:

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + x - 1 & ; x > 1 \\ x^{\frac{3}{2}} - x + 1 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 & ; x > 1 \\ \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1 & ; x < 1 \end{cases}$$

با جایگذاری $x = 1$ در ضابطه‌های بالا و پایین تابع $f'(x)$ ، مقدار $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'_+(1) = \frac{3}{2}\sqrt{1} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$f'_-(1) = \frac{3}{2}\sqrt{1} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$f'_+(1) + 3f'_-(1) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است در صورتی که:
اولاً در این نقطه پیوسته باشد یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی:

$$f'_-(1) = f'_+(1)$$

گام دوم

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = -(x - 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 1)(-(x - 1)) = -(x - 1)^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow a = 0$$

همچنین داریم:

$$f'_-(x) = 2(x - 1) \Rightarrow f'_-(1) = 0$$

$$f'_+(x) = -2(x - 1) \Rightarrow f'_+(1) = 0$$

بنابراین تابع به ازای $a = 0$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است.

تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است اگر اولاً در این نقطه پیوسته باشد $\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \right)$ ، ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در نقطه $x = 1$ موجود و باهم برابر باشند.
بررسی پیوستگی در نقطه $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow a - a = 1 - 1 \Rightarrow 0 = 0$$

به یک رابطه همواره درست رسیدیم، پس تابع در $x = 1$ پیوسته است.
بررسی مشتق‌پذیری در نقطه $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} ax - a & ; x < 1 \\ x^2 - x & ; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a & ; x < 1 \\ 2x - 1 & ; x > 1 \end{cases}$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow a = 2 - 1 = 1 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین تابع $f(x)$ تنها به ازای $a = 1$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است.

تابع $y = [f(x)]$ به ازای مقادیری که عبارت درون جزء صحیح برابر عدد صحیح شود، ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است؛ بنابراین تابع روی بازه‌ای مشتق پذیر است که خروجی آن فقط یک مقدار باشد.
بررسی گزینه اول:

$$x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \in [1, \infty)$$

$x = 0$ ریشه مخرج کسر است. به ازای $0 < x \leq 1$ ، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع در این بازه ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است.
بررسی گزینه دوم:

$$x \in (-1, 0) \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in (-\infty, -1)$$

در این بازه، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است.
بررسی گزینه سوم:

$$x \in [1, +\infty) \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = \begin{cases} 0 & ; 0 < \frac{1}{x} < 1 \\ 1 & ; \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$ در نقطه $x = 1$ ناپیوسته است بنابراین روی بازه $[1, +\infty)$ مشتق ناپذیر می‌شود.
بررسی گزینه چهارم:

$$x \in (-\infty, -1) \Rightarrow x < -1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = -1$$

تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$ روی بازه $(-\infty, -1)$ ، یک تابع ثابت است پس روی این بازه پیوسته و مشتق پذیر می‌شود.

برای اینکه تابع در یک نقطه مشتق پذیر باشد باید ابتدا در آن نقطه پیوسته باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 4a - 2b + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -8 + 2 = -6 \Rightarrow 4a - 2b = -10 \Rightarrow 2a - b = -5$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & ; x > -2, f'_+(-2) = -4a + b \\ 3x^2 - 1 & ; x < -2, f'_-(-2) = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a + b = 11 \\ 2a - b = -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} -2a = 6 \Rightarrow a = -3, b = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 - x + 4 & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$$

$$f(1) = -3 - 1 + 4 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) $f'_+ (0)$ بیانگر مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ و $f'_- (0)$ بیانگر مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ است.

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases} \quad \text{ب) می دانیم:}$$

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را به ازای $x > 0$ و $x < 0$ تعیین و مشتق چپ و راست آن را در نقطه $x = 0$ محاسبه می کنیم.

$$x > 0 : |x| = x, [x] = 0 \Rightarrow f(x) = x \times 0 = 0 \Rightarrow f'_+(0) = 0$$

$$x < 0 : |x| = -x, [x] = -1 \Rightarrow f(x) = (-x)(-1) = x \Rightarrow f'_-(0) = 1$$

بنابراین:

$$f'_-(0) - f'_+(0) = 1 - 0 = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} ax^r + bx + a - b & ; x \geq k \\ \gamma ax + b & ; x < k \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k) \Rightarrow ak^r + bk + a - b = \gamma ak + b$$

$$\Rightarrow ak^r + (b - \gamma a)k + a - \gamma b = 0 \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \gamma ax + b & ; x \geq k \\ \gamma a & ; x < k \end{cases}$$

$$f'_+(k) = f'_-(k) \Rightarrow \gamma ak + b = \gamma a \quad (2)$$

$$(1), (2) : ak^r + (\gamma a - \gamma ak - \gamma a)k + a - \gamma(\gamma a - \gamma ak) = 0$$

$$\Rightarrow ak^r - \gamma ak^r + a - \gamma a + \gamma ak = 0$$

$$\Rightarrow -ak^r + \gamma ak - \gamma a = 0 \Rightarrow -k^r + \gamma k - \gamma = 0 \Rightarrow k = 1, \gamma$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$y = \begin{cases} (\gamma x - \gamma)\sqrt{ax} & ; x \geq \frac{\gamma}{\gamma} \\ -(\gamma x - \gamma)\sqrt{ax} & ; x < \frac{\gamma}{\gamma} \end{cases}$$

$$\text{به دلیل جمله صفرکننده} \Rightarrow y'_+(\frac{\gamma}{\gamma}) = \gamma \sqrt{a \times \frac{\gamma}{\gamma}} = \gamma \sqrt{\gamma a}$$

$$\gamma \sqrt{\gamma a} - (-\gamma \sqrt{\gamma a}) = \gamma \sqrt{\gamma} \Rightarrow \gamma \sqrt{\gamma a} = \gamma \sqrt{\gamma} \Rightarrow \gamma \times \gamma a = \gamma \Rightarrow a = \frac{1}{\gamma}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ مشتق پذیر است، هرگاه:

(۱) در نقطه $x = a$ پیوسته باشد.

(۲) مشتق چپ و راست در نقطه $x = a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = f(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \sqrt{5 - 2x} = \sqrt{5 - 2(-2)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left(-\frac{1}{2}x^2 + bx + c\right) = -\frac{1}{2}(-2)^2 + b(-2) + c = -2 - 2b + c$$

$$f(-2) = \sqrt{5 - 2(-2)} = 3$$

$$\Rightarrow -2 - 2b + c = 3 \Rightarrow -2b + c = 5 \quad (*)$$

اکنون شرط مشتق پذیری را بررسی می کنیم:

$$f'_-(-2) = f'_+(-2)$$

$$\begin{cases} f'_-(x) = \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} \Rightarrow f'_-(-2) = \frac{-2}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \\ f'_+(x) = -x + b \Rightarrow f'_+(-2) = 2 + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} = 2 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3} \xrightarrow{(*)} -2\left(-\frac{7}{3}\right) + c = 5$$

$$\Rightarrow c = 5 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3}$$

گام اول

$f'_+(\sqrt{2})$ مشتق راست تابع f در نقطه‌ای به طول $x = \sqrt{2}$ و $f'_-(\sqrt{2})$ مشتق چپ تابع f در نقطه‌ای به طول $x = \sqrt{2}$ است.

گام دوم

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه $\sqrt{2}$ بررسی می‌کنیم:

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - [2(\sqrt{2})^2](\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} x^3 - [2x^2]x = (\sqrt{2})^3 - \underbrace{[2(\sqrt{2}^+)^2]}_{4+} \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} x^3 - [2x^2]x = (\sqrt{2})^3 - \underbrace{[2(\sqrt{2}^-)^2]}_{4-} \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

بنابراین تابع از سمت چپ ناپیوسته است، در نتیجه مشتق چپ وجود ندارد. مشتق راست تابع را به دست می‌آوریم:

$$x \rightarrow \sqrt{2}^+ \Rightarrow x > \sqrt{2} \Rightarrow x^2 > 2 \Rightarrow 2x^2 > 4 \Rightarrow [2x^2] = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 4x \Rightarrow f'_+(x) = 3x^2 - 4$$

$$\Rightarrow f'_+(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 - 4 = 3(2) - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'_+(1)$$

تابع در $x = 1$ پیوستگی راست دارد. مشتق تابع را در همسایگی راست بررسی می‌کنیم.

$$x > 1 : f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + x} = \sqrt{x^2 + x - 1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 1}} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{3}{2}$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعه $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.
 ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است در صورتی که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > 1$ و $x < 1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنیم. با بررسی این دو شرط، مقادیر a و b را می‌یابیم.
 بررسی شرط پیوستگی:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2 \times 1}{1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + bx = a + b \\ f(1) &= \frac{2 \times 1}{1} = 2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)} a + b = 2 \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^{-\frac{3}{2}} & ; x > 1 \\ 2ax + b & ; x < 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(1) &= -(1)^{-\frac{3}{2}} = -1 \\ f'_-(1) &= 2a + b \end{aligned} \right\} \xrightarrow{f'_+(1) = f'_-(1)} 2a + b = -1 \quad (II)$$

دو رابطه I و II را به صورت یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \xrightarrow{(-)} -a = 3 \Rightarrow a = -3 \xrightarrow{(I)} -3 + b = 2 \Rightarrow b = 5$$

تابع باید در $x = 2$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lambda}{ax + b} = \frac{\lambda}{2a + b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^3 + \epsilon x) = -\lambda + 12 = \epsilon \Rightarrow \frac{\lambda}{2a + b} = \epsilon \Rightarrow 2a + b = 2$$

مشتق چپ و راست هم باید در این نقطه برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\lambda a}{(ax + b)^2} & ; x > 2 \\ -3x^2 + \epsilon & ; x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(2) = \frac{-\lambda a}{(2a + b)^2} = \frac{-\lambda a}{2^2} = -2a \\ f'_-(2) = -12 + \epsilon = -\epsilon \end{cases} \Rightarrow -2a = -\epsilon \Rightarrow a = 3, \quad b = -\epsilon$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

راهحل اول:

$$f'_-(3) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

تابع f در $x = 3$ پیوستگی چپ ندارد و در نتیجه $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ وجود ندارد.

راهحل دوم:

بدون توجه به تعریف مشتق، حد خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{(3+h)^2}{|1 - (3+h)|} [3+h] - \frac{27}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{(3+h)^2}{|-2-h|} \times 2 - \frac{27}{2}}{h} = \frac{\frac{9}{2} \times 2 - \frac{27}{2}}{0^-} = \frac{-\frac{9}{2}}{0^-} = +\infty$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x + b & ; x \leq 2 \\ 2ax + 5 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax + 5 & ; x \leq 2 \\ 2a & ; x > 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 4a + 5 = 2a \Rightarrow a = \frac{-5}{2}$$

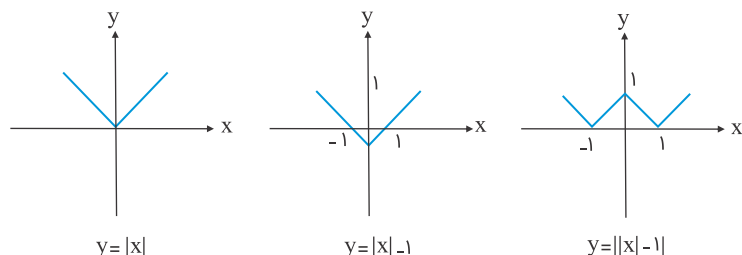
$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow 4a + 10 + b = 4a + 5 \Rightarrow b = -5$$

$$a + b = \frac{-5}{2} - 5 = \frac{-15}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

روش اول: رسم نمودار تابع

یکی از راه‌های تشخیص نقاط مشتق‌ناپذیر، رسم نمودار توابع است. دقت کنید که نقاط زاویه‌دار، بازگشتی، دارای مماس قائم و ... در نمودار تابع، نقاط مشتق‌ناپذیر تابع محسوب می‌شوند.



باتوجه به نمودار، سه نقطه به طول‌های $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ ، نقاط زاویه‌دار بوده و تابع در این نقاط مشتق‌ناپذیر است.

روش دوم: تعیین ریشه‌های ساده عبارت‌های داخل قدر مطلق

تابع در ریشه‌های ساده عبارت داخل قدر مطلق نیز مشتق‌ناپذیر است. این تابع دو عبارت قدر مطلق دارد؛ یکی $|x|$ و دیگری $||x| - 1|$. ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$۱) |x| : \quad x = 0$$

$$۲) ||x| - 1| : \quad |x| - 1 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

تابع در سه نقطه $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ مشتق‌ناپذیر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است.

ب) تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad ; \quad 0 \in D_f$$

ج) تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است در صورتی که اولاً در این نقطه پیوسته باشد و ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی $f'_-(0) = f'_+(0)$.

گام دوم

چون $x^2 \geq 0$ همواره برقرار است پس $D_f = \mathbb{R}$.

اکنون ضابطه تابع را به ازای $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین می کنیم:

$$y = x\sqrt{x^2} = x|x| = \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = x^2 \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = -x^2 \end{cases}$$

باتوجه به قسمت ب از گام اول، شرط پیوستگی تابع را بررسی می کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

بنابراین تابع در $x = 0$ پیوسته است.

باتوجه به قسمت ج از گام اول، شرط مشتق پذیری تابع را بررسی می کنیم:

$$y' = \begin{cases} 2x & ; \quad x > 0 \\ -2x & ; \quad x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'_-(0) = y'_+(0) = 0$$

پس تابع در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است.

گام اول

الف) نکته: در توابع دارای عبارت قدر مطلق، ریشه ساده عبارت درون قدر مطلق نقطه گوشه‌ای (زاویه‌دار) یا مشتق‌ناپذیر تابع است؛ بنابراین در تابع $f(x) = |x|(x + a)$ نقطه گوشه‌ای (زاویه‌دار) تابع، نقطه $x = 0$ است.

ب) شیب مماس راست در نقطه $x = 0$ برابر $f'_+(0)$ و شیب مماس چپ در نقطه $x = 0$ برابر $f'_-(0)$ است.

ج) مماس چپ و راست در نقطه $x = 0$ بر هم عمودند پس داریم: $f'_-(0) \cdot f'_+(0) = -1$

گام دوم

$$x > 0 : |x| = x \Rightarrow f(x) = x(x + a) = x^2 + ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'_+(0) = 2(0) + a = 0 + a = a$$

$$x < 0 : |x| = -x \Rightarrow f(x) = (-x)(x + a) = -x^2 - ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2x - a \Rightarrow f'_-(0) = -2(0) - a = 0 - a = -a$$

$$f'_+(0) f'_-(0) = -1 \Rightarrow a(-a) = -1 \Rightarrow -a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

تابع f در $x = 2$ مشتق‌پذیر است، پس بایستی در $x = 2$ پیوسته باشد و همچنین مشتق چپ و راست تابع در $x = 2$ برابر باشند.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 4 + 2a + b = |4 - 4| \Rightarrow \frac{1}{2} \times 4 + 2a + b = 0$$

$$\Rightarrow 2a + b = -2 \quad (1)$$

تابع f را در همسایگی چپ $x = 2$ (به دلیل وجود قدرمطلق) تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

X				
$X^2 - 2X$	+	0	-	0

بنابراین باتوجه به جدول تعیین علامت اگر $0 < x < 2$ باشد، $|x^2 - 2x| = 2x - x^2$ است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x < 0 \\ -x^2 + 2x & ; 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & ; x < 0 \\ -2x + 2 & ; 0 < x < 2 \\ x + a & ; x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 2 + a = -2(2) + 2 \Rightarrow a = -4$$

$$(1) \xrightarrow{a=-4} -4 + b = -2 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow a + b = 2$$

زمانی تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است که در $x = 2$ مشتق داشته باشد.
بنابراین باید f در $x = 2$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست آن برابر باشد.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow -4 + 2a + b = 1 \Rightarrow 2a + b = 5 \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & ; x \geq 2 \\ -2x + a & ; x < 2 \end{cases}$$

$$f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow -4 + a = -1 \Rightarrow a = 3$$

$$(1) : 6 + b = 5 \Rightarrow b = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

باتوجه به اینکه ضابطه تابع شامل جزء صحیح است، وقتی $x \rightarrow (-3)^+$ داریم:

$$x \rightarrow (-3)^+ \Rightarrow x > -3 \Rightarrow [x] = -3, |x| = -x$$

$$\Rightarrow f(x) = (-3 + x) \sqrt[3]{9x} = (x - 3) \sqrt[3]{9x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{9x} + \frac{9}{3\sqrt[3]{9x^2}}(x - 3)$$

$$\Rightarrow f'_+(-3) = \sqrt[3]{-27} + \frac{9}{3\sqrt[3]{729}}(-6) = -3 + \frac{9}{3 \times 9}(-6) = -3 - 2 = -5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) $f'(1)$ موجود است؛ یعنی در $x = 1$ تابع $f(x)$ هم پیوسته است و هم مشتق پذیر.
 ب) تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

ج) تابع در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است هرگاه:

$$f'_+(1) = f'_-(1)$$

گام دوم

باتوجه به اینکه $1 - \sqrt{2} < 1$ است، برای محاسبه $f(1 - \sqrt{2})$ باید از ضابطه مربوط به x های کوچکتر از ۱ استفاده کنیم؛ بنابراین لازم است ابتدا با بررسی شرط پیوستگی و مشتق پذیری، مقادیر a و b را بیابیم.
 بررسی شرط پیوستگی:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x - \frac{1}{x} \right) = 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + ax + b = a + b + 1 \\ f(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)} a + b + 1 = 0 \Rightarrow a + b = -1 \quad (I)$$

برای بررسی شرط مشتق پذیری، ابتدا ضابطه مشتق تابع را به دست آورده و سپس مشتق چپ و راست را در نقطه $x = 1$ مساوی قرار می دهیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} & ; x > 1 \\ 2x + a & ; x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow 1 + 1 = 2 + a \Rightarrow a + 2 = 2 \Rightarrow a = 0$$

با جایگذاری در رابطه I مقدار b را محاسبه می کنیم:

$$a + b = -1 \Rightarrow 0 + b = -1 \Rightarrow b = -1$$

بنابراین ضابطه تابع به ازای $x < 1$ به صورت زیر می شود:

$$x < 1 : f(x) = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 - 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$$

گام اول

مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ موجود است هرگاه:

اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد.

ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در این نقطه موجود و برابر باشند.

گام دوم

بررسی شرط پیوستگی در نقطه $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \sqrt[3]{(2+6)^2} = a + b \Rightarrow \sqrt[3]{8^2} = a + b \Rightarrow a + b = 4 \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری در نقطه $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x > 1 \\ ax + b & ; x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (2x+6)^{\frac{2}{3}} & ; x > 1 \\ ax + b & ; x \leq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \times \frac{2}{3} \times (2x+6)^{-\frac{1}{3}} & ; x > 1 \\ a & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{2x+6}} & ; x > 1 \\ a & ; x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{2+6}} = a \Rightarrow a = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

با جایگذاری در رابطه (I) داریم:

$$a + b = 4 \xrightarrow{a=\frac{2}{3}} \frac{2}{3} + b = 4 \Rightarrow b = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است در صورتی که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع موجود و برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد.

گام دوم

تابع $f(x)$ در نقاط درونی هر یک از زیربازه‌ها، پیوسته و مشتق‌پذیر است بنابراین کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع در سه نقطه مرزی $x=0$ ، $x=1$ و $x=2$ بررسی شود.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در نقطه $x=0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 0 + 1 = 1 \\ f(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطه $x=0$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x + 2 = 4 \\ f(1) &= 2(1) + 2 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

تابع $f(x)$ در نقطه $x=1$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=2$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + 2 = 4 + 2 = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \\ f(2) &= 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطه $x=2$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & ; x < 2 \\ 2x & ; x > 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_-(2) &= 2 \\ f'_+(2) &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_-(2) \neq f'_+(2)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطه $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

بنابراین تابع $f(x)$ در یک نقطه ناپیوسته و در سه نقطه مشتق‌ناپذیر است.

$$f(x) = \frac{|x| |x^2 - 2|}{x}$$

دامنه تابع f ، $\mathbb{R} - \{0\}$ است. تابع f در ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق یعنی $\pm\sqrt{2}$ مشتق ندارد. همچنین در ریشه مخرج یعنی $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

دقت کنید که تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری روی دامنه دو نقطه و روی $\mathbb{R}$ سه نقطه است. منظور سؤال بررسی مشتق‌ناپذیری روی $\mathbb{R}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

برای تعیین ضابطه تابع $f(f(x))$ ، کافی است در ضابطه $f(x)$ به جای متغیر x تابع $f(x)$ را جایگذاری کنیم:

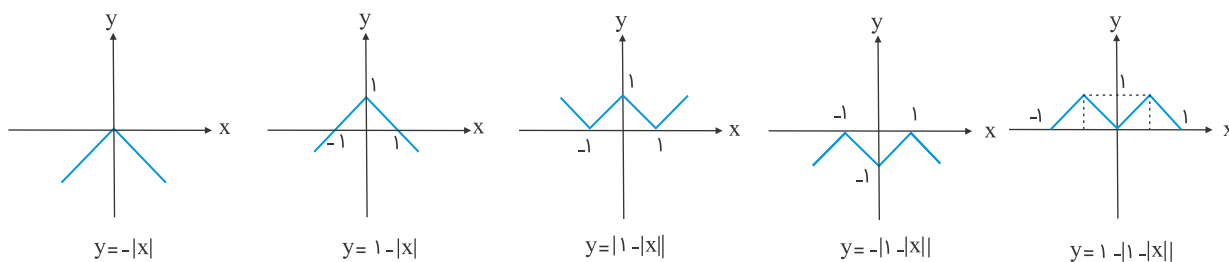
$$f(x) = 1 - |x| \Rightarrow f(f(x)) = 1 - |f(x)| = 1 - |1 - |x||$$

می‌دانیم تابع در ریشه‌های ساده عبارت درون قدر مطلق مشتق‌ناپذیر است:

$$۱) |x| : x = 0$$

$$۲) |1 - |x|| : 1 - |x| = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

علاوه بر آن، با رسم نمودار تابع نیز می‌توان نقاط مشتق‌ناپذیر را مشخص کرد:



بنابراین تابع $y = |1 - |x||$ دارای سه نقطه مشتق‌ناپذیر $x = -1$ ، $x = 1$ ، $x = 0$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است در صورتی که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع دو ضابطه‌ای که روی اعداد گنگ و گویا تعریف شده، در نقاطی پیوسته است که ضابطه‌ها باهم برابر باشند و در نقاط پیوسته‌ای که ضابطه مشتق باهم برابرند، مشتق‌پذیر است.

گام دوم

برای یافتن نقاط مشتق‌پذیر تابع $f(x)$ ابتدا دو ضابطه آن را مساوی قرار می‌دهیم تا نقاط پیوسته را به دست آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \text{گویا } x \\ 0 & ; \text{گنگ } x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

تابع $f(x)$ فقط در نقطه $x = 0$ پیوسته است. بررسی می‌کنیم که آیا در این نقطه مشتق‌پذیر نیز هست یا نه!

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; \text{گویا } x \\ 0 & ; \text{گنگ } x \end{cases} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در نقطه $x = 0$ مشتق دارد.

گام اول

توابع شامل قدر مطلق در ریشه‌های ساده عبارت درون قدر مطلق مشتق ندارند؛ بنابراین تابع $f(x) = \sqrt{1+|x|}$ در $x = 0$ مشتق ندارد پس $\alpha = 0$ است.

گام دوم

به ازای $x > 0$ و $x < 0$ ضابطه مشتق تابع $f(x)$ و مقادیر $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ را تعیین می‌کنیم سپس حاصل عبارت $f'_+(0) - f'_-(0)$ را به دست می‌آوریم:

$$x > 0 : |x| = x \Rightarrow f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\Rightarrow f'_+(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$$x < 0 : |x| = -x \Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

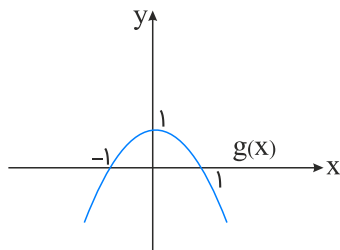
$$\Rightarrow f'_-(0) = \frac{-1}{2\sqrt{1-0}} = \frac{-1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

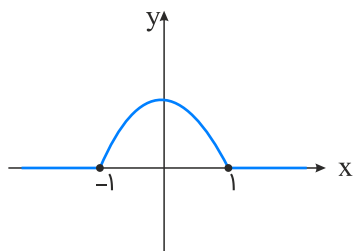
$$f'_+(0) - f'_-(0) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \leq -1 \\ x & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = 1 - x^2$$



$$g \circ f(x) = \begin{cases} g(-1) = 0 & ; x \leq -1 \\ 1 - x^2 & ; -1 \leq x \leq 1 \\ g(1) = 0 & ; x > 1 \end{cases}$$

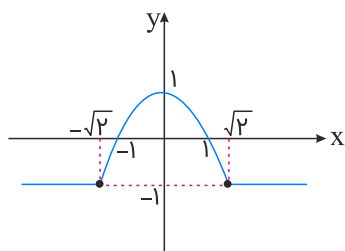


در $x = -1$ و $x = 1$ نقطه گوشه‌ای داریم و $g \circ f$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -1 & ; g(x) \leq -1 \\ g(x) & ; -1 \leq g(x) \leq 1 \\ 1 & ; g(x) > 1 \end{cases} = \begin{cases} -1 & ; x \leq -\sqrt{2} \text{ یا } x \geq \sqrt{2} \\ g(x) & ; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ 1 & ; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$g(x) \leq -1 \Rightarrow 1 - x^2 \leq -1 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ \text{یا} \\ x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$$

در $x = \pm\sqrt{2}$ نقطه گوشه‌ای داریم و تابع مشتق‌پذیر نیست!



$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \frac{-x}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}} = -4\sqrt{5}$$

در حالتی که f' وجود داشته باشد، داریم:

$$f(x) = (x[x])^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x[x])^2[x]$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ داریم:

$$x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^- \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^-}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^-} = 4^+$$

$$y = (f \circ g)(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ داریم:

$$y'\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^-\right) = g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^-\right) = (-4\sqrt{5})f'(4^+) = (-4\sqrt{5}) \times 3(4)^2 \times 4 = (-48\sqrt{5})(4)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

گام اول

الف) مشتق اول تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ موجود است در صورتی که اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم:

$$f'_+(0) = f'_-(0)$$

ب) مشتق دوم تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ موجود است در صورتی که اولاً مشتق اول تابع در این نقطه موجود و پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم:

$$f''_+(0) = f''_-(0)$$

گام دوم

ابتدا ضابطه معکوس تابع $f(x)$ را برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تعیین کرده و در ادامه وجود و عدم وجود $(f^{-1})'(x)$ و $(f^{-1})''(x)$ در نقطه $x = 0$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow y = \sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2 \text{ (دو طرف مثبت)}} y^2 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}} ; x \geq 0$$

$$x < 0, y < 0 \Rightarrow f(x) = -\sqrt{-x} \Rightarrow y = -\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2 \text{ (دو طرف منفی)}} y^2 = -x \Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^{\frac{1}{2}} ; x < 0$$

پس ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ به صورت زیر می‌شود:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} & ; x \geq 0 \\ -x^{\frac{1}{2}} & ; x < 0 \end{cases}$$

تابع $f^{-1}(x)$ در $x = 0$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

همچنین داریم:

$$(f^{-1})'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{x} & ; x > 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow (f^{-1})'_+(0) = (f^{-1})'_-(0) = 0$$

پس تابع $f^{-1}(x)$ در $x = 0$ مشتق اول دارد و مشتق اول در این نقطه پیوسته است.

$$(f^{-1})''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\sqrt{x}} & ; x > 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{-x}} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} (f^{-1})''_+(0) &= -\frac{1}{4} \\ (f^{-1})''_-(0) &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f^{-1})''_+(0) \neq (f^{-1})''_-(0)$$

گام اول

- الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، باید همواره نامنفی باشد.
- ب) پیوستگی تابع در یک نقطه، شرط لازم برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است.
- ج) مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

گام دوم

ابتدا دامنه تعریف تابع را مشخص می‌کنیم:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

تابع $f(x)$ در $x = 0$ پیوسته است (باتوجه به اینکه گزینه "وجود ندارد" نداریم، پس تابع حتماً در نقطه $x = 0$ پیوسته است و برای یافتن مشتق چپ در این نقطه، نیازی به بررسی پیوستگی نیست). اکنون مشتق چپ تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت زیر رادیکال صورت ضرب می‌کنیم تا عامل صفرکننده صورت و مخرج حذف شود:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - (\sqrt{1 - x^2})^2}}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - 1 + x^2}}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} \end{aligned}$$

چون داریم:

$$x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

بنابراین:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 0}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

باتوجه به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x_1 = 1 \text{ تا } x_2 = 1/21 &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1/21) - f(1)}{1/21 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{1/21} - \sqrt{1}}{0/21} = \frac{1/1 - 1}{0/21} = \frac{0/1}{0/21} = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{1}{100}} = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = 1$ ، ابتدا باید ضابطه مشتق تابع را به دست آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

بنابراین:

$$x = 1 \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع} = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

درنهایت، اختلاف آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر است با:

$$f'(1) - \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{21 - 20}{42} = \frac{1}{42}$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 به x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

برای محاسبه مقدار a کافی است معادله $f'(a) = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4}$ را حل کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از } 4 \text{ به } 25 = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{4}}{21} = \frac{5 - 2}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$a \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر} = f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$f'(a) = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{7} \Rightarrow 2\sqrt{a} = 7 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 4a = 49 \Rightarrow a = \frac{49}{4} = 12.25$$

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

باتوجه به تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\begin{aligned} \text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x = 5 \text{ تا } x = 9 &= \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{\sqrt{9^2 + 144} - \sqrt{5^2 + 144}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{81 + 144} - \sqrt{25 + 144}}{4} = \frac{\sqrt{225} - \sqrt{169}}{4} = \frac{15 - 13}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x به $x + \Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

طبق تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از } ۲ \text{ به } ۲ + h = \frac{f(۲ + h) - f(۲)}{۲ + h - ۲} = \frac{f(۲ + h) - f(۲)}{h}$$

بنابراین:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از } ۲ \text{ به } ۲ + h = \frac{\left(۲ + h + \frac{۱}{۲ + h}\right) - \left(۲ + \frac{۱}{۲}\right)}{h} = \frac{h + \frac{۱}{۲ + h} - \frac{۱}{۲}}{h} = \frac{\lambda}{9}$$

$$\Rightarrow h + \frac{۱}{۲ + h} - \frac{۱}{۲} = \frac{\lambda}{9} h \xrightarrow{\times 9} 9h + \frac{9}{۲ + h} - \frac{9}{۲} = \lambda h$$

$$\Rightarrow h + \frac{9}{۲ + h} = \frac{9}{۲} \Rightarrow \frac{h(h + ۲) + 9}{۲ + h} = \frac{9}{۲} \Rightarrow \frac{h^2 + ۲h + 9}{۲ + h} = \frac{9}{۲}$$

$$\Rightarrow 2h^2 + 4h + 18 = 9h + 18 \Rightarrow 2h^2 - 5h = 0 \Rightarrow h(2h - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} h = 0 & \text{غ ق ق} \\ h = \frac{5}{2} = ۲/۵ \end{cases}$$

اگر $h = 0$ باشد، متغیر اصلاً تغییری نکرده و آهنگ متوسط تغییر آن برابر صفر می‌شود.

$$x = ۳ \quad \text{آهنگ لحظه‌ای در } x = ۳ = f'(۳)$$

$$f(x) = x^۳ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ \Rightarrow f'(۳) = ۲۷ \quad (۱)$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۳ + \Delta x) - f(۳)}{\Delta x} = \frac{f(۳/۱) - f(۳)}{۰/۱} = \frac{(۳/۱)^۳ - ۳^۳}{۰/۱} = ۲۷/۹۱ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲), (۱)} ۲۷/۹۱ - ۲۷ = ۰/۹۱$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ آنی یا لحظه‌ای در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ آنی خواسته شده را به دست می‌آوریم سپس اختلاف آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2/56) - f(2/25)}{2/56 - 2/25} = \frac{\sqrt{2/56} - \sqrt{2/25}}{0/31} = \frac{1/6 - 1/5}{0/31} = \frac{0/1}{0/31} = \frac{10}{31}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$x = 2/25 \text{ در نقطه آنی آهنگ} = f'(2/25) = \frac{1}{2\sqrt{2/25}} = \frac{1}{2 \times 1/5} = \frac{1}{3}$$

اختلاف آهنگ آنی و آهنگ لحظه‌ای برابر است با:

$$f'(2/25) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{3} - \frac{10}{31} = \frac{31 - 30}{93} = \frac{1}{93}$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

$f'(\alpha)$ و $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ را محاسبه و باهم برابر قرار می‌دهیم، سپس مقدار α را تعیین می‌کنیم.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x_1 = 2 \text{ تا } x_2 = 5 = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{5}{5-1} - \frac{2}{2-1}}{3} = \frac{\frac{5}{4} - 2}{3} = \frac{\frac{5-8}{4}}{3} = \frac{-\frac{3}{4}}{3} = \frac{-1}{4}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$x = \alpha \text{ آهنگ لحظه‌ای} = f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(\alpha) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Rightarrow -\frac{1}{(\alpha-1)^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (\alpha-1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \alpha-1=2 \Rightarrow \alpha=3 \\ \alpha-1=-2 \Rightarrow \alpha=-1 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه به قسمت الف از گام اول، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 3$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{36}{9} - \frac{36}{4}}{1} = \frac{36}{9} - \frac{36}{4} = 4 - 9 = -5$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای در نقطه $x = \sqrt[3]{12}$ ، ابتدا ضابطه مشتق تابع را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{36}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \times x^2 - 2x(36)}{x^4} = -\frac{72x}{x^4} = -\frac{72}{x^3}$$

$$x = \sqrt[3]{12} \text{ آهنگ آنی} = f'(\sqrt[3]{12}) = -\frac{72}{(\sqrt[3]{12})^3} = -\frac{72}{12} = -6$$

اختلاف آهنگ متوسط و لحظه‌ای برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(\sqrt[3]{12}) = -5 - (-6) = 1$$

$$\text{آهنگ متوسط تابع} = \frac{f(6/25) - f(4)}{6/25 - 4} = \frac{\sqrt{6/25} - \sqrt{4}}{2/25} = \frac{2/5 - 2}{2/25} = \frac{0/5}{2/25} = \frac{1}{4/5}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} - \text{آهنگ متوسط} = \frac{10}{45} - \frac{1}{4} = \frac{40 - 45}{180} = \frac{-5}{180} = \frac{-1}{36}$$

بنابراین آهنگ متوسط به مقدار $\frac{1}{36}$ از آهنگ لحظه‌ای کمتر است.

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از x_1 تا x_2 از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع آن نقطه است.

گام دوم

$$f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع از $x = 4$ تا $x = 12$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{24 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{8 + 1}}}{8} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = -\frac{1}{60}$$

طبق قسمت ب از گام اول، $f'(x)$ و سپس مقدار $f'(4)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{0 - \frac{1}{2\sqrt{2x + 1}}}{2x + 1} = -\frac{1}{(2x + 1)\sqrt{2x + 1}}$$

$$x = 4 \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر} = f'(4) = -\frac{1}{(8 + 1)\sqrt{8 + 1}} = -\frac{1}{9 \times 3} = -\frac{1}{27}$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x) = -\frac{1}{60} - \left(-\frac{1}{27}\right) = -\frac{1}{60} + \frac{1}{27} = \frac{-9 + 20}{540} = \frac{11}{540}$$

گام اول

الف) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.
 ب) آهنگ متوسط تغییر تابع از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

گام دوم

آهنگ لحظه‌ای در نقطه $a + \frac{h}{2}$ یعنی محاسبه $f'\left(a + \frac{h}{2}\right)$ ، پس ابتدا ضابطه $f'(x)$ را تعیین و سپس $f'\left(a + \frac{h}{2}\right)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2 \Rightarrow f'(x) = 6x + 4$$

$$a + \frac{h}{2} \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } a + \frac{h}{2} = f'\left(a + \frac{h}{2}\right) = 6\left(a + \frac{h}{2}\right) + 4 = 6a + 3h + 4$$

آهنگ متوسط تغییر تابع از a تا $a + h$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{[3(a+h)^2 + 4(a+h) - 2] - (3a^2 + 4a - 2)}{h} \\ &= \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 + 4a + 4h - 2 - 3a^2 - 4a + 2}{h} = \frac{6ah + 3h^2 + 4h}{h} = 6a + 3h + 4 \end{aligned}$$

مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای در موارد خواسته شده برابر شد، پس تفاضل آن‌ها برابر صفر است.

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x = 1$ تا $x = 1/44$ را با استفاده از رابطه $\frac{f(1/44) - f(1)}{0/44}$ به دست می‌آوریم.

ب) برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = 1$ باید ضابطه مشتق تابع یا همان $f'(x)$ و سپس $f'(1)$ را محاسبه کنیم. اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای به عنوان جواب تست در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(1/44) - f(1)}{0/44} = \frac{\frac{0/44}{\sqrt{1/44}} - 0}{0/44} = \frac{1}{\sqrt{1/44}} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{آهنگ متوسط تابع اول} : \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{2\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{2\pi}{4}}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{-1 - 0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{-4}{\pi}$$

$$\text{آهنگ متوسط تابع دوم} : \frac{(\sin^2 \frac{\pi}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{2}) - (\sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{(1 - 0) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{4})}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

از تقسیم دو مقدار حاصل، به ۱- می‌رسیم.

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه به گام اول، دو مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای را به دست آورده، سپس اختلاف آن‌ها از یکدیگر را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر در بازه } [0, 3] = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{\sqrt{9+16} - \sqrt{16}}{3} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{16}}{3} = \frac{5 - 4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 16} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر} = f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 16}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+16}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

مقدار آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر شد، پس اختلاف آن‌ها برابر صفر است.

$$y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$$

آهنگ متوسط در بازه $[5, 6]$ برابر است با:

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{\sqrt{21 - 36} + 24 - \sqrt{21 - 25} + 20}{1} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{16}}{1} = -1$$

آهنگ لحظه‌ای نیز برابر است با:

$$y' = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} = \frac{y(-x + 2)}{y\sqrt{21 - x^2} + 4x} = \frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2} + 4x}$$

با برابر قرار دادن این دو داریم:

$$\begin{aligned} \frac{-x + 2}{\sqrt{21 - x^2} + 4x} &= -1 \Rightarrow x - 2 = \sqrt{21 - x^2} + 4x \quad (*) \\ \xrightarrow{\text{به توان } 2} x^2 - 4x + 4 &= 21 - x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{8 \pm \sqrt{200}}{4} = 2 \pm \frac{5}{2}\sqrt{2} \xrightarrow{x \geq 2} x = 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \quad (*) \end{aligned}$$

آهنگ تغییر متوسط تابع در $[0, 2]$:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 2}{2} = 5$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع، همان مشتق است:

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{4x+1} + \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}(x+2) \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{19}{4}$$

تفاضل مقادیر به دست آمده برابر است با:

$$5 - \frac{19}{4} = \frac{1}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

$$f(x) = \frac{1}{x}x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{1} - \frac{1}{1})}{3} = \frac{\frac{31}{4} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{11}{4}$$

$$\text{اختلاف: } \frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازه } [0, 4] = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{(\sqrt{9} + \frac{1}{5}) - (\sqrt{1} + \frac{1}{1})}{4 - 0} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$x = \frac{3}{4} \text{ در آهنگ تغییر لحظه‌ای} = f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(\frac{5}{4})^2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = 0.5 - 0.16 = 0.34$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} - \text{آهنگ تغییر متوسط} = 0.34 - 0.3 = 0.04$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

گام اول

الف) فاصله نقطه $M(x, y)$ از مبدأ مختصات از رابطه $T = \sqrt{x^2 + y^2}$ به دست می‌آید.
 ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

در رابطه T از قسمت الف از گام اول، عبارت $y = \sqrt{x+8}$ را جایگزین می‌کنیم تا T بر حسب متغیر x به دست آید.

$$T = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{y=\sqrt{x+8}} T = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x+8})^2} = \sqrt{x^2 + x + 8}$$

از T نسبت به x مشتق گرفته و مقدار آن را در $x = 7$ حساب می‌کنیم:

$$T' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+8}}$$

$$\Rightarrow T'(7) = \frac{2(7)+1}{2\sqrt{7^2+7+8}} = \frac{14+1}{2\sqrt{49+7+8}} = \frac{15}{2\sqrt{64}} = \frac{15}{2 \times 8} = \frac{15}{16}$$

در همسایگی راست $x = 2$ داریم:

$$f(x) = (x-2)(-3) \Rightarrow f'_+(2) = -3$$

در همسایگی چپ $x = 2$ داریم:

$$f(x) = (2-x)(-2) \Rightarrow f'_-(2) = 2$$

$$f'_+(2)f'_-(2) = (-3) \times 2 = -6$$

در ریشه‌های ساده معادله $x^2 - 4 = 0$ مشتق ناپذیر است، پس این تابع در $x = 2$ و $x = -2$ مشتق ندارد.

تابع f در $2+$ و $2-$ مشتق ندارد، اما خط مماس قائم دارد.

این تابع در صفرهای زیر رادیکال مشتق ندارد.

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

در نقاط به طول‌های a ، c و e حد وجود دارد، اما تابع f در آن‌ها مشتق ندارد، اما در نقطه‌هایی به طول b و d حد و مشتق هر دو وجود ندارند.

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۶

f در $x = 1$ پیوسته است.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow 1 + a = 1 + b \Rightarrow a = b$$

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + bx - (1 + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1) + b(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1) + b(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1 + b) = 3 + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - (1 + a)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1) + a(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1) + a(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1 + a) = 2 + a \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = b \\ 3 + b = 2 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ 1 + b = a \end{cases} \Rightarrow \text{نشدنی}$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۶

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V' = 4\pi r^2 \Rightarrow V'(a) = 4\pi a^2 = 16\pi \Rightarrow a = 2$$

$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow S' = 8\pi r \Rightarrow S'(2) = 16\pi$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳۹۹۱۲

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{fh + 2}{h} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳۹۹۷

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2}$$

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \Rightarrow \frac{-4}{c^2} = \frac{1 - 4}{3} \Rightarrow c^2 = 4 \xrightarrow{1 < c < 4} c = 2$$

$$f'(2c) = f'(4) = -\frac{4}{16} = -0.25$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 2f'(x) \Rightarrow \frac{10 - 2}{2 - 1} = 2(3x^2 + 1) \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{x \in [1, 2]} x = 1$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۰

تابع f در بازه $[1, 2]$ مشتق‌پذیر است، زیرا در این بازه پیوسته است، ضمناً مقدار مشتق آن صفر خواهد بود.

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x-1)}{\sqrt[3]{x^3}} \Rightarrow f'(\frac{1}{8}) = \frac{2 - \frac{1}{12}(7)}{4} \Rightarrow f'(\frac{1}{8}) = \frac{24 - 7}{4 \times 12} = \frac{17}{48}$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۴۰۱

تابع f در 2 پیوسته است، زیرا:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[-x]|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3(x-2)}{x-2} = -3$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[-x]|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(2-x)}{x-2} = 2$$

$$f'_-(2) \times f'_+(2) = -3 \times 2 = -6$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

در همسایگی راست $x = ۲$ داریم:

$$f(x) = x - (x^۲ - ۴) = x - x^۲ + ۴ \Rightarrow f'(x) = ۱ - ۲x$$

$$\Rightarrow f'_+(۲) = ۱ - ۴ = -۳$$

در همسایگی چپ $x = ۲$ داریم:

$$f(x) = x + (x^۲ - ۴) = x + x^۲ - ۴ \Rightarrow f'(x) = ۱ + ۲x \Rightarrow f'_-(۲) = ۵$$

مجموع شیب‌های نیم‌مماس چپ و راست برابر $(۲ = -۳ + ۵)$ است.

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۰

تابع $f(x)$ در نقاط غیرصحيح پيوسته و مشتق‌پذير است و مشتق آن برابر $۲x[x]$ است، زیرا در همسایگی اعداد صحيح $[x]$ حکم یک عدد را دارد.

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

$$f'(c) = \frac{f(۲) - f(۱)}{۲ - ۱} \Rightarrow ۳c^۲ + ۴c = \frac{(۱ + ۱) - (۱ + ۲)}{۱} \Rightarrow ۳c^۲ + ۴c = ۱۳ \Rightarrow ۳c^۲ + ۴c - ۱۳ = ۰$$

$$\Rightarrow c = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۳۹}}{۳} = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴۳}}{۳} \xrightarrow{c \in (۱, ۲)} c = \frac{\sqrt{۴۳} - ۲}{۳}$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

اگر ضلع مثلث a باشد، آنگاه ارتفاع آن $h = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است.

$$S = \frac{۱}{۲}ha = \frac{۱}{۲}h \times \frac{۲}{\sqrt{۳}}h = \frac{۱}{\sqrt{۳}}h^۲$$

$$S' = \frac{۲}{\sqrt{۳}}h \Rightarrow S'(\sqrt{۳}) = ۲$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۰

طبق تعریف مشتق، $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ برابر با مشتق چپ f در $x = 2$ است. تابع در همسایگی چپ $x = 2$ به صورت زیر خلاصه می شود:

$$x \leq 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'_-(2) = 2$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۰

$$\frac{d(b) - d(1)}{b - 1} = 4 \Rightarrow \frac{16b - 4b^2 - 12}{b - 1} = 4 \Rightarrow 16b - 4b^2 - 12 = 4b - 4$$

$$\Rightarrow 4b^2 - 12b + 8 = 0 \xrightarrow{b > 1} b = 2$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۰

$$f'(t) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} \Rightarrow 3t^2 - 2t = \frac{(125 - 25 + 10) - 10}{5}$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 2t = 20 \Rightarrow 3t^2 - 2t - 20 = 0 \Rightarrow t = \frac{1 + \sqrt{1 + 60}}{3} = \frac{1 + \sqrt{61}}{3}$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۰

تابع $f(x)$ در $x = 2$ پیوسته است زیرا:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

حال مشتق تابع را در $x = 2$ حساب می کنیم:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2) \left[-\frac{x}{2}\right]}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[-\frac{x}{2}\right] = -2$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2) \left[-\frac{x}{2}\right]}{x - 2} = -\lim_{x \rightarrow 2^-} \left[-\frac{x}{2}\right] = 1$$

$$f'_+(2) - f'_-(2) = -2 - 1 = -3$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۰

$$f'(x) = \frac{2x(1 + \sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 1)}{(1 + \sqrt{x})^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{8(2) - \frac{1}{2}(17)}{(1 + 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{16 - \frac{17}{2}}{9} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۴۰۰

ضابطه $f'(x)$ را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = x \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{1-x} - \frac{x}{3 \sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 0 - \frac{1}{3 \times 0^+} = -\infty$$

پس $f'(x)$ در همسایگی $x = 1$ به صورت زیر خواهد بود.



علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۹

$$f(x) = -(x-1)x^2 = -x^3 + x^2; x < 1$$

$$\Rightarrow f'_-(1) = -3x^2 + 2x = -3 + 2 = -1$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

اگر نقطه مورد نظر را c فرض کنیم:

$$f'(c) = 2 \left(\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} \right) \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c+1}} = 2 \left(\frac{2-0}{4} \right) \Rightarrow \sqrt{c+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow c+1 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{3}{4}$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۹

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 2f'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{10 - 2}{2 - 1} = 2(3x^2 + 1) \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{x \in [1, 2]} x = 1$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۹

شیب نیم‌مماس چپ:

$$f'_{-}(1) = \lim_{x \rightarrow 1^{-}} \frac{|-x^2 + x| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^{-}} \frac{-x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^{-}} \frac{-x(x - 1)}{x - 1} = -1$$

$$\Rightarrow y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1 \quad \text{معادله نیم‌مماس چپ}$$

توجه: برای تعیین قدر مطلق می‌توانیم از جدول تعیین علامت استفاده کنیم:

x	0	1
$-x^2 + x$	-	+

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

در همسایگی چپ $x = 2$ تابع $f(x)$ به $f(x) = 4 - x^2$ تبدیل می‌شود.

$$f(x) = 4 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \Rightarrow f'(2) = -4$$

حال با نقطه $A(2, 0)$ و شیب -4 ، معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$y - 0 = -4(x - 2) \Rightarrow y = 8 - 4x$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

$$\lim_{x \rightarrow 1^{+}} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^{-}} f(x) = 1$$

چون حد چپ و راست تابع در $x = 1$ برابر نیست، پس تابع در این نقطه پیوسته نمی‌باشد.

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$

f در $x = 0$ پیوسته است.

$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$
 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$x = 0$ مماس قائم تابع f است.