



نویدپورزکی

۱- چند نقطه روی تابع $y = |x + 2|$ وجود دارد که از مبدأ مختصات به فاصله سه باشند؟

- ① ۰ ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۲- فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $2y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات کدام است؟

- ① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{15}$

۳- اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y + 2x = 16$ ، $2y - x = 2$ و $y = 0$ هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث در صفحه مختصات کدام است؟

- ① $2\sqrt{5}$ ② ۵ ③ $3\sqrt{3}$ ④ ۶

۴- نقاط $A|_2^6$ و $B|_5^5$ و $C|_8^6$ سه رأس یک لوزی هستند. مساحت لوزی کدام است؟

- ① ۶ ② ۱۲ ③ ۲۴ ④ ۳



۵- نقاط $A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} -5 \\ 2 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}$ سه رأس یک مربع هستند مجموع طول و عرض رأس چهارم آن کدام است؟

- ① -۳ ② -۵ ③ -۱ ④ ۱

۶- معادلات دو ضلع یک متوازی الاضلاع $2x + y = 1$ و $2y - 3x + 5 = 0$ می باشند اگر یک رأس آن، نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} -3 \\ -3 \end{vmatrix}$ باشد محل برخورد قطرهای آن از مبدأ مختصات به کدام فاصله است؟

- ① ۳ ② ۶ ③ $\sqrt{5}$ ④ ۵

۷- نقطه‌ی $A(7, 6)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

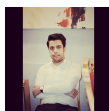
- ① (۴, ۳) ② (۳, ۴) ③ (۳, ۵) ④ (۱, ۵)

۸- دسته خطوطی که از نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ می گذرند کدامشان بر خط $y = x + 1$ عمود است؟

- ① $y = -x - 1$ ② $y = x + 1$ ③ $y = x - 1$ ④ $y = -x + 3$

۹- هرگاه نقاط $A \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \end{vmatrix}$ دو رأس مقابل لوزی $ABCD$ باشند معادله‌ی خط قطر BD این لوزی، محور طول را با کدام طول قطع می کند؟

- ① ۱ ② -۱ ③ ۲ ④ -۲



۱۰- اگر $A \left| \frac{-1}{2} \right.$ و $B \left| \frac{3}{0} \right.$ و $C \left| \frac{1}{-2} \right.$ سه رأس مثلث ABC باشند ارتفاع AH محور عرض را با چه عرضی قطع می‌کند؟

- ① ۱ ② -۱ ③ ۲ ④ -۲

۱۱- سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$, $AC: y - 2x = 5$, $BC: 2y + 3x = 6$ هستند. معادله ارتفاع AH از مثلث مفروض، کدام است؟

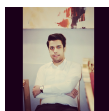
- ① $6y - 4x = 15$ ② $9y - 6x = 17$ ③ $3y - 2x = 7$ ④ $3y + 2x = 9$

۱۲- نقاط $A(2, 5)$ و $B(3, -1)$ و $C(0, 2)$ سه راس مثلثی هستند. مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

- ① $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ② $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ ③ $(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2})$ ④ $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$

۱۳- نقاط $A \left| \frac{m}{m-1} \right.$ و $B \left| \frac{5}{-4} \right.$ و $C \left| \frac{1}{-2} \right.$ رئوس مثلث ABC هستند که در رأس C قائمه است. اندازهی وتر این مثلث کدام است؟

- ① $2\sqrt{10}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{20}$ ④ $2\sqrt{20}$



۱۴- اگر $|y| = 4$ و $|x| = 2$ معادلات اضلاع یک مستطیل باشند، اندازه‌ی قطر این مستطیل کدام است؟

- ① $4\sqrt{5}$ ② $\sqrt{70}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{10}$

۱۵- نقاط $A(0, 6)$ و $B(2, 4)$ مبدأ مختصات سه راس یک مثلث باشد. عمودمنصف ضلع بزرگ‌تر محور y ها را در چه عرضی قطع می‌نماید.

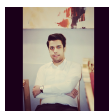
- ① $x = 3$ ② $y = 2$ ③ $y = 3$ ④ $x = 2$

۱۶- خطی که از نقاط $(-1, 1)$ و $(2, 2)$ می‌گذرد با محورهای مختصات چه مساحتی می‌سازد؟

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$

۱۷- نقطه‌ای روی خط $y = 2x - 1$ وجود دارد که از دو نقطه‌ی $A(0, 1)$ و $B(+2, -1)$ به یک فاصله است. مجموع طول و عرض آن کدام گزینه است؟

- ① 0 ② -1 ③ $+1$ ④ $\sqrt{5}$



۱۸- خط $5x - 12y + 3 = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $(2, 0)$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $3\frac{\pi}{2}$ ④ 2π

۱۹- نقطه‌ی $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع، کدام است؟

- ① ۴۰ ② ۴۵ ③ ۷۵ ④ ۸۰

۲۰- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

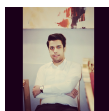
- ① $7,2$ ② $9,6$ ③ $11,4$ ④ $12,8$

۲۱- مثلثی با رأس‌های $A(1, 5)$, $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC ، کدام است؟

- ① ۴ ② $3\sqrt{2}$ ③ ۵ ④ $4\sqrt{2}$

۲۲- اگر $A(\alpha, 3\alpha)$ روی دایره‌ای به مرکز $O(1, 3)$ و شعاع $\sqrt{10}$ قرار داشته باشد، مجموع مقادیر مختلف α کدام است؟

- ① -2 ② ۲ ③ ۰ ④ $\sqrt{10}$



۲۳- دو نقطه بر خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند، که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه، کدام است؟

(۴) $-11, 15$

(۳) $11, -9$

(۲) $-15, 11$

(۱) $-15, 9$

۲۴- شیب نیم‌خطی با نقطه شروع $A(2, 4)$ برابر ۳ است. مستطیل $ABCD$ را چنان می‌سازیم که نقطه B روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن $C(-3, -1)$ باشد محیط مستطیل کدام است؟

(۴) $3\sqrt{10}$

(۳) $6\sqrt{10}$

(۲) ۱۸

(۱) ۲۴

۲۵- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

(۴) $\frac{25}{4}$

(۳) $\frac{25}{8}$

(۲) $\frac{9}{4}$

(۱) $\frac{9}{8}$

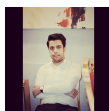
۲۶- فاصله‌ی بین دو خط به معادلات $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟

(۴) $2 + \sqrt{3}$

(۳) $\sqrt{3} + 1$

(۲) $\sqrt{3} - 1$

(۱) $2 - \sqrt{3}$



۲۷- فاصله‌ی دو خط به معادلات $2x - 3y + a = 0$ و $4x - 6y + 3 = 0$ برابر $\sqrt{13}$ می‌باشد. مجموع مقادیر a کدام است؟

۳٫۵ (۴)

۲۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۲۸- دو ضلع مربعی منطبق بر خط $3x = 3y + 9$ و $y = x + 2$ می‌باشد. طول قطر مربع چقدر می‌باشد؟

$\sqrt{5}$ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

۲۹- به ازای کدام مقدار a ، سه خط به معادلات $y + 2x = 0$ ، $2y + ax + 5 = 0$ ، $y + 3x = a$ همگی از یک نقطه می‌گذرند؟

نشدنی (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

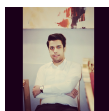
۳۰- یک خط از دسته خطوط به معادله‌ی $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ برخط گذرنده بر دو نقطه‌ی $(2, -1)$ و $(8, 3)$ عمود است، معادله‌ی آن خط کدام است؟

$3y - 2x = -5$ (۴)

$2y - 3x = -5$ (۳)

$2y + 3x = 1$ (۲)

$2y + 3x = 4$ (۱)



۳۱- به ازای کدام مقادیر a ، نقاط $(a, 3)$ و $(1, 4a + 6)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می گیرند؟

- ① $-2, \frac{9}{4}$ ② $-2, \frac{3}{4}$ ③ $-2, -\frac{3}{4}$ ④ $2, -\frac{9}{4}$

۳۲- سه نقطه ی $A \left| \begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right.$ و $B \left| \begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix} \right.$ و $C \left| \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right.$ سه رأس مثلث ABC می باشند. محل برخورد سه ارتفاع مثلث کدام است؟

- ① $\left| \begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix} \right.$ ② $\left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \right.$ ③ $\left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \right.$ ④ $\left| \begin{smallmatrix} 6 \\ 1 \end{smallmatrix} \right.$

۳۳- مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادلات $y + x = 2$ و $2y - x = 4$ و ضلع دیگر آن بر محور x قرار دارد کدام است؟

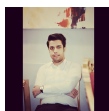
- ① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

۳۴- نقاط $A \left| \begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right.$ و $B \left| \begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right.$ و $O \left| \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right.$ سه رأس یک مستطیل هستند مساحت مستطیل چقدر است؟

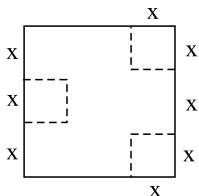
- ① ۳ ② ۶ ③ ۹ ④ ۱۲

۳۵- معادله سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$ ، $y = 2x$ و $x = 1$ است. معادله خطی که کوچک ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

- ① $y = \frac{2}{3}$ ② $x = \frac{2}{3}$ ③ $y + x = \frac{2}{3}$ ④ $y + x = \frac{1}{3}$



۳۶- در مربع شکل زیر، سه مربع کوچک تر مطابق شکل جدا می کنیم. اگر محیط و مساحت شکل باقی مانده با هم برابر باشند، طول ضلع مربع جدا شده (x) کدام است؟



(۲) $\frac{8}{3}$

(۴) $\frac{7}{2}$

(۱) $\frac{7}{3}$

(۳) $\frac{11}{2}$

۳۷- به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = 2x^2 + (m + 1)x + m + 6$ ، بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات، مماس است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۱۲، -۴

(۲) -۱۲، ۴

(۱) -۴

۳۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $(2m - 1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟ (با تغییر)

(۴) $(-1, 2/5) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(۳) $(-1, 3/5) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(۲) $(-2, 3/5) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(۱) $(-2, 2/5) - \{0\}$

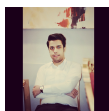
۳۹- به ازای کدام مقادیر a معادله درجه دوم $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

(۴) $3 < a < 4$

(۳) $2 < a < 6$

(۲) $a < 3$ یا $a > 4$

(۱) $a < 2$ یا $a > 6$



۴۰- معادله $(m-1)x^2 + (1-m)x + 2 = 0$ دو جواب متمایز دارد. مجموعه مقادیر ممکن m کدام است؟

- ① $(1, 9)$ ② $\mathbb{R} - [1, 9]$ ③ $(2, 8)$ ④ $\mathbb{R} - [2, 8]$

۴۱- اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 4x - 3 = 0$ باشند، مقدار $\alpha^2 + 4\beta$ کدام است؟

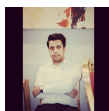
- ① ۱۷ ② ۱۸ ③ ۱۹ ④ ۲۰

۴۲- به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟

- ① $m < -6$ ② $m > 3$ ③ $0 < m < 3$ ④ $3 < m < 6$

۴۳- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می‌باشد؟

- ① $-\frac{9}{5}$ ② ۱ ③ $-\frac{9}{5}, 1$ ④ $-1, \frac{9}{5}$



۴۴- به ازای کدام مقدار m ، ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + 3x + m = 2$ ، معکوس یک‌دیگرند؟

- ① -۲ ② -۱ ③ ۱ ④ ۲

۴۵- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ ، یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

- ① ۷ ② -۸ ③ -۹ ④ ۱۰

۴۶- معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه‌ی مثبت است. بازه‌ی مقادیر m ، کدام است؟

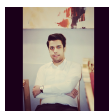
- ① $(-4, 0)$ ② $(-4, -2)$ ③ $(-6, 0)$ ④ $(-6, -4)$

۴۷- معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

- ① $\frac{7}{2}$ ② ۳ ③ -۱ ④ $-\frac{5}{2}$

۴۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت است؟

- ① $-1 < m < 0$ ② $m < 0$ ③ $2 < m < 8$ ④ $m > 8$



۴۹- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\alpha}{4 - \beta} + \frac{\beta}{4 - \alpha}$ کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۴ ④ ۸

۵۰- اگر حاصل ضرب ریشه‌های معادله $2mx^2 + 7x + m^2 + 3 = 0$ برابر ۲ باشد. در این صورت مقدار (یا مقادیر) m کدام است؟

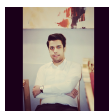
① ۱ ② ۳ ③ ۱ و ۳ ④ مقداری برای m وجود ندارد.

۵۱- اگر ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ دو برابر معکوس ریشه‌های معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، مقدار a کدام است؟

① -۱۴ ② -۱۲ ③ -۸ ④ -۶

۵۲- ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است. مقدار b کدام است؟

① -۲ ② -۱ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{4}{3}$



۵۳- ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ از ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 1 = 0$ یک واحد بیشتر است. b کدام است؟

- ① -۵ ② ۲ ③ ۴ ④ ۶

۵۴- یکی از جواب‌های معادله $x^2 - 3mx + m + 3 = 0$ دو برابر دیگری است. مجموع مقادیر برای m کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{2}{3}$

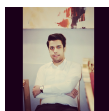
۵۵- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

- ① $x^2 - 3x + 1 = 0$ ② $x^2 + 3x + 1 = 0$ ③ $x^2 - 5x + 2 = 0$ ④ $x^2 + 5x + 2 = 0$

۵۶- جواب‌های معادله $2x^2 + mx - n = 0$ از مربع جواب‌های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ یک واحد بیشتر است. حاصل $m - n$

کدام است؟

- ① ۱۶ ② ۱۸ ③ ۲۰ ④ ۱۴



۵۷- کمترین مقدار تابع $f(x) = ax^2 - 4x - 3$ برابر ۱۰- است. معادله محور تقارن نمودار تابع f کدام است؟

④ $y = \frac{7}{4}$

③ $y = \frac{7}{2}$

⑤ $x = \frac{4}{7}$

① $x = \frac{7}{2}$

۵۸- محور تقارن سهمی به معادله $y = -x^2 + 6x - k$ سهمی را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی خط $y = -5$ جدا می‌کند، چقدر است؟

④ ۷

③ ۶

⑤ ۵

① ۴

۵۹- اگر یک سهمی محور طول‌ها را در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴- قطع کند و رأسش روی نیمساز ربع دوم باشد. این سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ (محور تقارن این سهمی یا موازی با محور y یا موازی با محور x است.)

④ $\frac{11}{9}$

③ $\frac{8}{9}$

⑤ $\frac{5}{9}$

① $\frac{4}{9}$

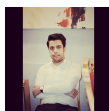
۶۰- فرض کنید نقاط $(-2, 5)$, $(0, 5)$ و $(1, 11)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

④ $(2, 15)$

③ $(2, 9)$

⑤ $(-1, 4)$

① $(-1, 3)$



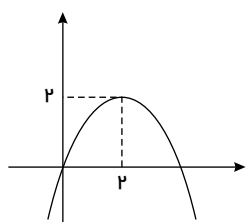
۶۱- فرض کنید رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه $(3, 1)$ باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟

(۴) $(1, 5)$

(۳) $(2, 5)$

(۲) $(5, -9)$

(۱) $(5, -7)$



۶۲- نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $f(ab)$ کدام است؟

(۵) $-\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{3}{2}$

(۴) -2

(۳) $-\frac{5}{2}$

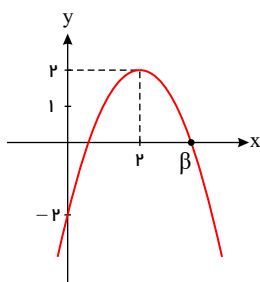
۶۳- اگر مجموع مربعات ریشه‌های معادله $-3x^2 + (a-1)x + a+2 = 0$ برابر ۱۰ باشد آن‌گاه محور تقارن سهمی $y = ax^2 - 28x + a + 1$ کدام است؟ ($a > 0$)

(۴) $x = -\frac{7}{11}$

(۳) $x = \frac{7}{11}$

(۲) $x = -2$

(۱) $x = 2$



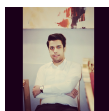
۶۴- در شکل مقابل که نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx - 2$ است، مقدار β کدام است؟

(۱) $2 - \sqrt{2}$

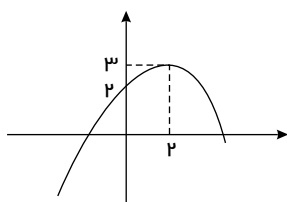
(۲) $4 - \sqrt{2}$

(۳) $2 + \sqrt{2}$

(۴) $4 + \sqrt{2}$



۶۵- نمودار تابع درجه دوم f در شکل مقابل رسم شده است. مجموع مربعات صفرهای تابع f کدام است؟



۸ (۱)

۱۶ (۲)

۳۲ (۳)

۳۶ (۴)

۶۶- پایین ترین نقطه سهمی به معادله $y = 2x^2 - 4x + b$ بر بالاترین نقطه سهمی به معادله $y = -x^2 + ax + 3$ منطبق است. فاصله نقطه برخورد دو سهمی با محور عرض ها از یکدیگر چقدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۶۷- اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k + 3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

۴ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۴ (۱)

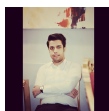
۶۸- اگر یکی از منحنی های تابع درجه دوم $y = (a - 1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می کند؟

۶ (۴)

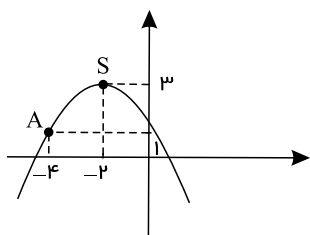
۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

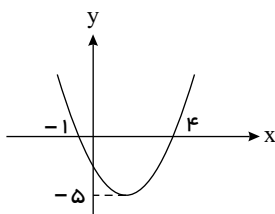


۶۹- در سهمی شکل مقابل به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ مقدار $f(-1)$ کدام است؟



- ۱) ۲
 ۲) ۲٫۵
 ۳) ۳
 ۴) ۳٫۵

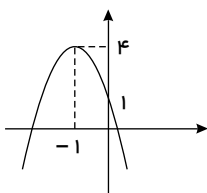
۷۰- نمودار تابع $f(x) = ax^2 - bx + c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $a + b - c$ کدام است؟



- ۱) $\frac{12}{5}$
 ۲) $\frac{32}{5}$

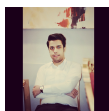
- ۱) $\frac{8}{5}$
 ۳) صفر

۷۱- مجموع معکوسات صفرهای تابع درجه دوم که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده، کدام است؟

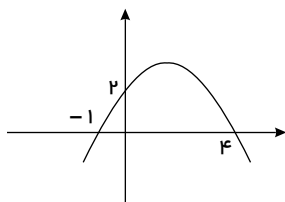


- ۱) ۳
 ۲) ۴

- ۱) ۲
 ۳) ۶



۷۲- نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $a + b + c$ کدام است؟



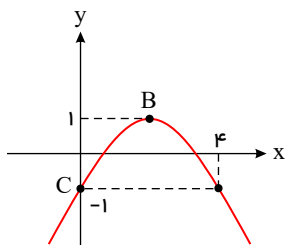
۱ (۱)

۲ (۲)

۵ (۳)
۲

۳ (۴)

۷۳- نمودار تابع درجه دوم $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. اگر α و β ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ باشد، حاصل $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ کدام است؟



۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

۷۴- اگر نقطه $(-1, 4)$ رأس سهمی به معادله $y = -2x^2 + ax - b$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

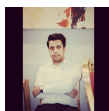
۷۵- نمودار تابع $y = ax^2 - 4x + 4a$ بالای محور طول‌ها قرار دارد. مجموعه مقادیر ممکن a کدام است؟

(۱, ۲) (۴)

(۲, +∞) (۳)

(-∞, -۱) ∪ (۱, +∞) (۲)

(۱, +∞) (۱)



۷۶- به ازای کدام مقادیر m ، منحنی $y = (m + 2)x^2 - 2x + 1$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟

- ① $m < -2$ ② $m < -1$ ③ $-2 < m < -1$ ④ $-4 < m < -2$

۷۷- نمودار تابع $f(x) = (2 - k)x^2 - \sqrt{8}x + 1 - k$ بالای محور طول‌ها قرار نمی‌گیرد. مجموعه مقادیر ممکن k کدام است؟

- ① $(-\infty, 0]$ ② $[3, +\infty)$ ③ $[1, +\infty)$ ④ $(0, 3)$

۷۸- به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m ، سهمی به معادلهٔ $y = (1 - m)x^2 + 2(m - 3)x - 1$ ، همواره پایین محور x ‌ها است؟

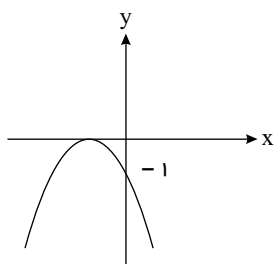
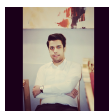
- ① $1 < m < 5$ ② $2 < m < 5$ ③ $2 < m < 4$ ④ $2 < m < 6$

۷۹- اگر سهمی به معادلهٔ $f(x) = (a - 2)x^2 - 2\sqrt{5}x + a + 2$ از ناحیهٔ سوم و چهارم نگذرد، حدود a کدام است؟

- ① $a \leq -3$ یا $a \geq 3$ ② $a \geq 3$ ③ $a > 2$ ④ $a > -2$

۸۰- مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط برخورد نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ با محورهای مختصات است، کدام است؟

- ① ۶ ② ۸ ③ ۱۰ ④ ۱۲



۸۱- به ازای چند مقدار a نمودار تابع $f(x) = (a - 8)x^2 + ax - b$ به صورت مقابل است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۸۲- مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^3 + x^2} = \frac{2}{x + 1}$ برابر است با:

۱ (۴)

$-\sqrt{2}$ (۳)

$+\sqrt{2}$ (۲)

صفر (۱)

۸۳- اگر ریشه‌های معادله $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{x^2+5x}{x^2-4}$ مقادیر α و β باشد، مقدار $\beta\sqrt{\alpha} + \alpha\sqrt{\beta}$ کدام است؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۸ (۱)

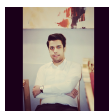
۸۴- بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

۳۶ (۴)

۳۵ (۳)

۳۳ (۲)

۳۲ (۱)



۸۵- در یک مزرعه‌ی شالیکاری دو کارگر با هم کار می‌کنند و کار را در ۱۸ روز تمام می‌نمایند. اگر هر کدام به تنهایی کار می‌کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم کار را تمام می‌کرد. کارگر اول چند روزه کار را تمام می‌کرد؟

- ① ۲۵ ② ۳۰ ③ ۳۵ ④ ۴۵

۸۶- اگر α ریشه معادله $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$ باشد حاصل $7\alpha^2 - 5\alpha + 1$ کدام گزینه است؟

- ① ۲ ② -۲ ③ ۱ ④ ۳

۸۷- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$ کدام است؟

- ① ۴ ② ۶ ③ -۴ ④ -۶

۸۸- سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله‌ی ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

- ① ۱۲ ② ۱۵ ③ ۲۰ ④ ۲۵



۸۹- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x\sqrt{4-x^2} + 3\sqrt{4-x^2} = 0$ کدام است؟

- ① ۳ ② -۳ ③ $\frac{1}{2}$ ④ صفر

۹۰- در معادله‌ی $\sqrt{3 + \sqrt{x - x^3}} = \sqrt{3}$ مجموع ریشه‌ها چقدر است؟

- ① ۱ ② -۱ ③ ۰ ④ ۲

۹۱- اگر $1 = 2a + \sqrt{3a + 16}$ باشد، عدد $4a + 9$ ، کدام است؟

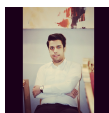
- ① ۴ ② ۶ ③ ۱۵ ④ ۲۱

۹۲- اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $x + a = \sqrt{5x - x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② ۲ ③ ۳ ④ جواب دیگر ندارد.

۹۳- در مورد جواب‌های معادله‌ی $3x - 2 + \sqrt{4x - 3} = 0$ کدام گزینه درست است؟

- ① یک جواب دارد. ② دو جواب هم‌علامت دارد. ③ دو جواب با علامت مخالف هم دارد. ④ جواب ندارد.



۹۴- معادله ی $\sqrt{x^4 - x^3 + 9x - 6} + \sqrt{x^3 - 4x} = 0$:

- ① یک جواب منفی دارد. ② یک جواب مثبت دارد. ③ دو جواب دارد. ④ سه جواب دارد.

۹۵- معادله ی $\sqrt{x^5 + x - 4} - \sqrt{x^5 + x - 3} = 3\sqrt{2}$ چند ریشه دارد؟

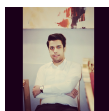
- ① صفر ② یک ③ دو ④ سه

۹۶- حاصل عبارت $\sqrt{-1 + 2\sqrt{-1 + 2\sqrt{-1 + \dots}}}$ کدام گزینه است؟

- ① ۲ ② $\frac{3}{2}$ ③ ۱ ④ $\frac{1}{2}$

۹۷- اگر α ریشه ی معادله ی $\sqrt[5]{x + \sqrt{x - 2}} = \sqrt[4]{2 - x} + \sqrt[5]{2x - 2}$ حاصل $\alpha^5 + \alpha^3$ کدام گزینه است؟

- ① ۱۰ ② ۲۰ ③ ۳۰ ④ ۴۰



۹۸- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$ کدام است؟

۲۲ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

۹۹- اگر $2 = 3a + \sqrt{2a^2 + 4a}$ باشد، حاصل $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

۴٫۵ (۴)

۳٫۵ (۳)

۲٫۵ (۲)

۱٫۵ (۱)

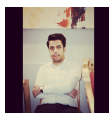
۱۰۰- حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 3 = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 7}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$ کدام است؟

-۶ (۴)

۶ (۳)

-۴ (۲)

۴ (۱)



پاسخنامه تشریحی

۱- گزینه ۳ یک نقطه‌ی دلخواه روی تابع $y = |x + 2|$ در نظر می‌گیریم $A \left| \begin{matrix} x \\ |x + 2| \end{matrix} \right|$ و فاصله‌ی آن از مبدأ یعنی $O \left| \begin{matrix} \circ \\ \circ \end{matrix} \right|$ را حساب می‌کنیم.

دو ریشه‌ی مختلف علامت دارد

$$OA = \sqrt{x^2 + (x + 2)^2} = 3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 + x^2 + 4 + 4x = 9 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 5 = 0 \xrightarrow{\frac{c}{a} < 0}$$

آزاد صبح - ۱۳۸۶

۲- گزینه ۴ کافی است دو معادله را در یک دستگاه حل کنیم تا محل تلاقی به دست آید. دقت کنید $y \geq 3$ است.

$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \end{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 = y + 3 + y - 3 - 2\sqrt{y^2 - 9} \xrightarrow{x^2 = 2y} \sqrt{y^2 - 9} = 0$$

$$\Rightarrow y = \pm 3 \xrightarrow{y \geq 3} y = 3 \Rightarrow x = \sqrt{6} \Rightarrow \text{محل تلاقی: } A(\sqrt{6}, 3)$$

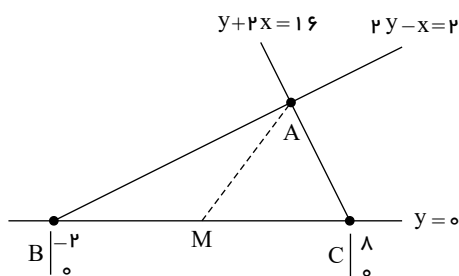
نکته: فاصله هر نقطه با فرم $A(x, y)$ تا مبدأ مختصات برابر است با: $\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\xrightarrow{\text{فاصله}} d = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

سراسری - ۱۴۰۰

۳- گزینه ۲

شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:



خطوط $y + 2x = 16$ و $2y - x = 2$ را تلاقی می‌دهیم تا مختصات نقطه A به دست آید.

$$\times 2 \begin{cases} 2y - x = 2 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \rightarrow 5y = 20 \rightarrow y = 4, x = 6 \rightarrow A \left| \begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix} \right|$$

$$BC \text{ وسط } M \left| \begin{matrix} x_B + x_C \\ 2 \\ y_B + y_C \\ 2 \end{matrix} \right| \rightarrow M \left| \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right|, A \left| \begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix} \right| \rightarrow AM = \sqrt{(6-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

خارج از کشور - ۱۳۹۹



۴- گزینه ۱ این سه رأس لوزی به هر ترتیبی که باشند با یکدیگر مثلثی تشکیل می‌دهند که مساحت آن نصف مساحت لوزی است پس مساحت مثلث تولید شده توسط این سه رأس را به دست آورده و حاصل را دو برابر می‌کنیم. رابطه زیر برای پیدا کردن مساحت مثلثی است که ۳ رأس آن وجود دارد:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$= \frac{1}{2} |6(5 - 8) + 5(8 - 2) + 6(2 - 5)| = \frac{1}{2} |-18 + 30 - 18| = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow S_{\text{لوزی}} = 2 \times 3 = 6$$

منتا- ۱۳۹۵

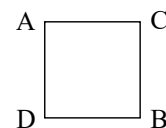
۵- گزینه ۱ طول پاره خط‌های AB و AC و BC را پیدا می‌کنیم تا مشخص شود ترتیب قرار گرفتن رئوس، در مربع چگونه است.

$$AB = \sqrt{(1+5)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{36+0} = 6$$

$$AC = \sqrt{(1+2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$BC = \sqrt{(-5+2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

واضح است که AC و BC اضلاع مربع و AB قطر مربع است. (قطر مربع، از حاصلضرب یک ضلع در $\sqrt{2}$ بدست



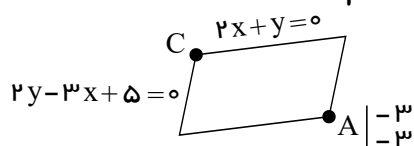
می‌آید) یعنی:

$$\left. \begin{aligned} x_A + x_B &= x_C + x_D \rightarrow 1 - 5 = -2 + x_D \rightarrow x_D = -2 \\ y_A + y_B &= y_C + y_D \rightarrow 2 + 2 = 5 + y_D \rightarrow y_D = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow x_D + y_D = -3$$

منتا- ۱۳۹۹

۶- گزینه ۳

$$2x + y = 1 \rightarrow m = -\frac{1}{2}, \quad 2y - 3x + 5 = 0 \rightarrow m' = \frac{3}{2}$$



دو ضلع داده شده چون دارای شیب‌های برابر نیستند باهم موازی نمی‌باشند و نقطه ی داده شده در معادلات دو ضلع داده شده صدق نمی‌کند پس این نقطه روی این دو ضلع قرار ندارد پس می‌توان چنین شکلی را تصور کرد.

برای پیدا کردن رأس C کافی است محل تلاقی دو ضلع داده شده را بدست آوریم.

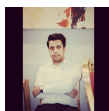
$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2y - 3x + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 1, y = -1 \rightarrow C \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$AC \text{ وسط } M \begin{vmatrix} \frac{3+1}{2} = -1 \\ \frac{-3+(-1)}{2} = -2 \end{vmatrix}$$

محل برخورد دو قطر وسط AC قرار دارد یعنی:

$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

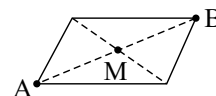
منتا- ۱۳۹۵



۷- گزینه ۳

مختصات نقطه‌ی A در هیچ یک از معادلات دو خط صدق نمی‌کند پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط، موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه‌ی B بدست آید.

$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \rightarrow -17x = 17 \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow B \left| \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} \right.$$



می‌دانیم نقطه‌ی M وسط پاره خط AB قرار دارد یعنی:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

سراسری - ۱۳۹۰

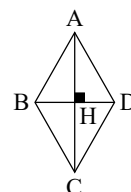
۸- گزینه ۴ گزینه‌ای درست است که نقطه‌ی $A \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right.$ در آن صدق کند و در ضمن شیب خط برابر -1 باشد زیرا:

$$y = x + 1 \rightarrow m = 1 \xrightarrow{\text{عمود}} m' = -1$$

آزاد صبح - ۱۳۸۲

۹- گزینه ۲ در لوزی قطرها بر هم عمودند و یکدیگر را نیز نصف می‌کنند.

$$AC \text{ وسط } H \left| \begin{matrix} \frac{1+(-3)}{2} = -1 \\ \frac{2+(-2)}{2} = 0 \end{matrix} \right.$$



قطر BD بر قطر AC عمود است پس کافی است شیب قطر AC را پیدا کرده و آن را عکس و قرینه کنیم تا شیب قطر BD بدست آید.

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-2 - 2}{1 + 3} = -1 \rightarrow m_{BD} = 1$$

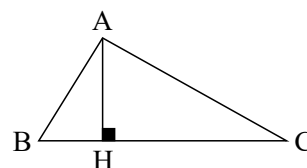
حال، با داشتن نقطه و شیب، معادله‌ی قطر BD را می‌نویسیم.

$$H \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right., m_{BD} = 1 \rightarrow y - 0 = 1(x + 1) \xrightarrow{y=0} x = -1$$

منتا - ۱۳۹۵

۱۰- گزینه ۱

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{0 + 2}{3 - 1} = 1 \xrightarrow{AH \perp BC} m_{AH} = -1, A \left| \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

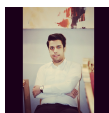


$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 2 = -1(x + 1) \rightarrow y = -x + 1 \xrightarrow{x=0} y = 1$$

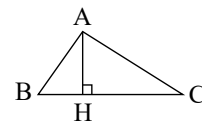
منتا - ۱۳۹۵

۱۱- گزینه ۲

با توجه به مثلث زیر خواهیم داشت:



$$BC : 2y + 3x = 6 \rightarrow m_{BC} = -\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ارتفاع } AH \text{ بر ضلع } BC \text{ عمود است}} m_{AH} = \frac{2}{3}$$



برای پیدا کردن مختصات نقطه A کافی است معادلات خطوط اضلاع AB و AC را تلاقی دهیم.

$$\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} x = -\frac{7}{3}, y = \frac{1}{3}$$

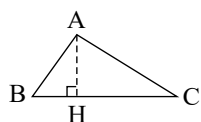
حال، معادله ارتفاع AH را با داشتن شیب و یک نقطه می‌نویسیم.

$$A \left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3} \right), m_{AH} = \frac{2}{3} \rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \left(x + \frac{7}{3} \right) \rightarrow 3y - 1 = 2x + \frac{14}{3}$$

$$\xrightarrow{\times 3} \rightarrow 9y - 3 = 6x + 14 \rightarrow 9y - 6x = 17$$

خارج از کشور - ۱۳۸۹

۱۲ - گزینه ۳



کافی است معادلات ارتفاع AH و ضلع BC را بنویسیم سپس با آنها تشکیل دستگاه دهیم:

$$BC : \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \rightarrow \frac{y + 1}{x - 3} = \frac{-1 - 2}{3 - 0} = -1 \rightarrow y + 1 = -x + 3 \rightarrow y = -x + 2$$

$$\begin{cases} A(2, 5) \\ m_{BC} = -1 \end{cases} \xrightarrow{AH \perp BC} m_{AH} = 1 \Rightarrow y - 5 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 3$$

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} y = \frac{5}{2}, x = -\frac{1}{2}$$

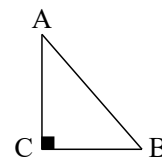
سنجش - ۱۳۹۴

۱۳ - گزینه ۱

ابتدا شیب خط واصل میان نقطه A و B، A و C، B و C را تعیین می‌کنیم:

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{m - 1 + 2}{m - 1} = \frac{m + 1}{m - 1}$$

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-4 + 2}{5 - 1} = \frac{-1}{2}$$

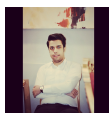


$$\xrightarrow{BC \perp AC} m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$$

عمود است

چون ضلع AC بر ضلع BC عمود است بنابراین حاصل ضرب شیب‌هایشان -۱ می‌باشد.

$$\Rightarrow \frac{-m - 1}{2m - 2} = -1 \rightarrow -m - 1 = -2m + 2 \rightarrow m = 3$$

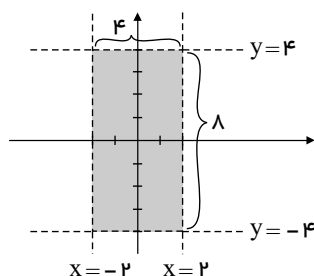


$$\begin{aligned} \text{وتر} AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(m - 5)^2 + (m - 1 + 4)^2} \\ &= \sqrt{(m - 5)^2 + (m + 3)^2} \stackrel{m=3}{=} \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

منتا- ۱۳۹۵

۱۴- گزینه ۱

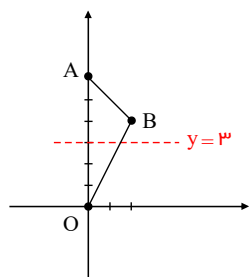
$$|x| = 2 \rightarrow x = \pm 2, \quad |y| = 4 \rightarrow y = \pm 4$$



$$\rightarrow \text{قطر: فیثاغورث} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

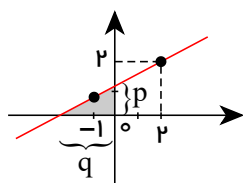
منتا- ۱۳۹۵

۱۵- گزینه ۳ ابتدا شکل را رسم می‌نمائیم. با توجه به تصویر ضلع OA بزرگترین ضلع مثلثی باشد و عمود منصف آن خطی است افقی به ارتفاع ۳. پس معادله‌ی آن به صورت $y = 3$ می‌باشد.



منتا- ۱۳۹۶

۱۶- گزینه ۴



ابتدا معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ می‌گذرد را می‌نویسیم.

$$AB: \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y - 1}{x + 1} = \frac{1 - 2}{-1 - 2} = \frac{1}{3} \rightarrow 3y - 3 = x + 1 \rightarrow 3y = x + 4$$

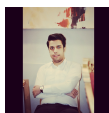
حال عرض از مبدا و طول از مبدا خط را حساب می‌کنیم.

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{4}{3} : q, \quad y = 0 \rightarrow x = -4 : p$$

$$S = \frac{1}{2} |pq| = \frac{1}{2} \left| -\frac{16}{3} \right| = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

آزاد صبح- ۱۳۸۱

۱۷- گزینه ۲ فرض کنیم طول نقطه‌ی مورد نظر $x = \alpha$ باشد. با توجه به اینکه روی خط $y = 2x - 1$ قرار دارد مختصات نقطه‌ی $C(\alpha, 2\alpha - 1)$ خواهد بود. حال فاصله‌ی نقاط A و B را تا نقطه‌ی مورد نظر محاسبه می‌کنیم و برابر



هم قرار می‌دهیم.

$$|AC| = |BC| \rightarrow \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 1 - 1)^2} = \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (2\alpha - 1 + 1)^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4} = \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 4\alpha^2} \Rightarrow 5\alpha^2 - 8\alpha + 4 = 5\alpha^2 - 4\alpha + 4$$

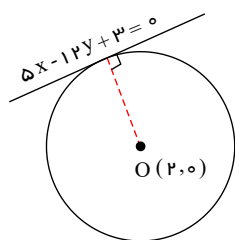
$$\rightarrow \alpha = 0 \rightarrow C(0, -1)$$

مجموع طول و عرض آن ۱- است.

منتا- ۱۳۹۶

۱۸- گزینه ۲

فاصله‌ی مرکز دایره تا این خط برابر شعاع دایره خواهد بود. لذا داریم



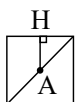
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + C|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5(2) - 12(0) + 3|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} = 1$$

$$S = \pi r^2 = \pi(1)^2 = \pi \text{ مساحت}$$

منتا- ۱۳۹۶

۱۹- گزینه ۴

فاصله‌ی وسط یک قطر مربع از یکی از اضلاع آن برابر نصف ضلع مربع است.



$$\text{ضلع مربع} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

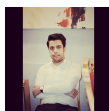
$$A \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}, x - 2y + 5 = 0 \rightarrow AH = \text{نصف ضلع مربع} = \frac{|3 + 2 + 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \rightarrow$$

$$\text{مساحت مربع} = (\text{ضلع مربع})^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

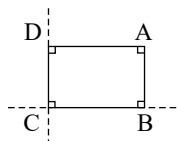
$$AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{از خط به معادله‌ی } ax + by + c = 0 \text{ از رابطه‌ی } A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$$

به دست می‌آید.

خارج از کشور- ۱۳۹۳



$$2y + x = 6 \rightarrow m = -\frac{1}{2}, \quad 2x - y = 7 \rightarrow m' = 2$$



چون شیب‌ها عکس و قرینه‌ی هم هستند این دو خط بر هم عمودند و نقطه‌ی A در معادله‌ی هیچ کدام از این دو خط صدق نمی‌کند پس می‌توان شکل را در این گونه در نظر گرفت.

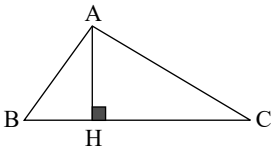
برای یافتن طول و عرض مستطیل کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی A را از این دو خط بدست آوریم.

$$\left. \begin{aligned} A \left| \begin{matrix} 8 \\ 5 \end{matrix} \right., \quad x + 2y - 6 = 0 &\rightarrow AD = \frac{|8 + 10 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \\ A \left| \begin{matrix} 8 \\ 5 \end{matrix} \right., \quad 2x - y - 7 = 0 &\rightarrow AB = \frac{|16 - 5 - 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = AD \times AB = \frac{48}{5} = 9,6$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

بدست می‌آید.

خارج از کشور - ۱۳۹۰

۲۱- گزینه ۴ شکل فرضی  را در نظر می‌گیریم. ابتدا معادله‌ی خطی را که از دو نقطه B و C

می‌گذرد می‌نویسیم و سپس فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط را به دست می‌آوریم.

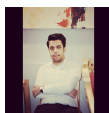
$$BC: \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 7} = \frac{3 + 2}{7 - 2} = 1 \Rightarrow y - 3 = x - 7 \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} A \left| \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \right. \\ x - y - 4 = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow AH = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

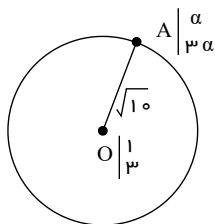
توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست

می‌آید.

سراسری - ۱۳۹۹



فاصله‌ی هر نقطه روی دایره از مرکز برابر شعاع است



$$OA = r = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (3\alpha - 3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 9(\alpha - 1)^2} = \sqrt{10} \rightarrow \sqrt{10(\alpha - 1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\rightarrow \sqrt{10} |\alpha - 1| = \sqrt{10} \rightarrow |\alpha - 1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 1 \rightarrow \alpha_1 = 2 \\ \alpha - 1 = -1 \rightarrow \alpha_p = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha_1 + \alpha_p = 2$$

منتها- ۱۳۹۶

۲۳- گزینه ۲ نقطه‌ی $A \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha - 1 \end{smallmatrix} \right.$ را روی خط $y = x - 1$ در نظر گرفته و فاصله‌ی آن را از خط $2x - 3y = 5$ بدست آورده و مساوی $\sqrt{13}$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} A \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha - 1 \end{smallmatrix} \right. \\ 2x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow AH = \frac{|2\alpha - 3(\alpha - 1) - 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|-\alpha - 2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \rightarrow |-\alpha - 2| = 13$$

$$-\alpha - 2 = 13 \rightarrow \alpha = -15, \quad -\alpha - 2 = -13 \rightarrow \alpha = 11$$

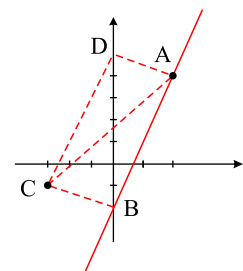
توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right.$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

به دست می‌آید.

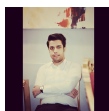
سراسری- ۱۳۸۹

۲۴- گزینه ۳ ابتدا معادله خط گذرنده از A را می‌یابیم: $A(2, 4)$ و $m = 3$.

$$y - 4 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 2$$



حال فاصله نقطه C از خط فوق که A و B روی آن قرار دارند محاسبه می‌کنیم.



این مقدار طول یا عرض مستطیل است.

$$|CH| \text{ یا } |CB| = \frac{|y - 3x + 2|}{\sqrt{1+9}} = \frac{(-3, -1) \mid -1 - 3(-3) + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

قطر مستطیل AC است آن را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$|AC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{50}$$

$$\triangle ABC : AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 50 = AB^2 + 10 \Rightarrow |AB| = \sqrt{40}$$

و در آخر محیط مستطیل برابر است با:

$$\text{محیط} : 2\sqrt{10} + 2\sqrt{40} = 2\sqrt{10} + 4\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

سراسری - ۱۴۰۰

۲۵- گزینه ۳

شیب هر دو خط یک می‌باشند یعنی این دو خط موازیند یعنی دو ضلع مقابل یک مربع هستند و فاصله‌ی بین این دو، ضلع مربع را می‌دهد.

$$\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ x - y - \frac{3}{2} = 0 \end{array}$$

(در محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند)

$$\text{ضلع مربع} = d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - (-\frac{3}{2})|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{مربع}} = (\text{ضلع})^2 = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{8}$$

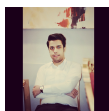
برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه‌ی

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ استفاده می‌کنیم.}$$

سراسری - ۱۳۹۲

۲۶- گزینه ۳ شیب هر دو خط $\sqrt{3}$ می‌باشد پس با هم موازیند و می‌دانیم برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی به

معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه‌ی $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می‌کنیم (ضرایب x , y در هر دو معادله‌ی خط باید یکسان باشند).



$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 2 \xrightarrow{\times \sqrt{3}} 3x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \rightarrow 3x - \sqrt{3}y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|2\sqrt{3} - (-6)|}{\sqrt{9+3}} = \frac{2\sqrt{3}+6}{\sqrt{12}} = \frac{2(\sqrt{3}+3)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

خارج از کشور - ۱۳۸۸

۲۷- گزینه ۱

$$\begin{aligned} 4x - 6y + 3 &= 0 \rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow \sqrt{13} = \frac{|3 - 2a|}{\sqrt{16 + 36}} \\ 4x - 6y + 2a &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sqrt{13} = \frac{|3-2a|}{2\sqrt{13}} \rightarrow |3-2a| = 26$$

$$3 - 2a = 26 \rightarrow 2a = -23 \rightarrow a = -11,5, \quad 3 - 2a = -26 \rightarrow 2a = 29 \rightarrow a = 14,5$$

بنابراین مجموع مقادیر a برابر ۳ است.

توجه کنید برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه‌ی

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ استفاده می‌کنیم.}$$

منتا - ۱۳۹۵

۲۸- گزینه ۱ ابتدا باید فاصله‌ی دو خط موازی که همان طول ضلع مربع می‌باشد را محاسبه نماییم.

$$\begin{aligned} x - y + 2 &= 0 \\ 3x - 3y - 9 &= 0 \xrightarrow{\div 3} x - y - 3 = 0 \end{aligned} \quad d = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - (-3)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\text{قطر} \quad d = \sqrt{2} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ضلع}}}{a} = \sqrt{2} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = 5$$

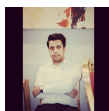
حال طول قطر مربع برابر است با:

منتا - ۱۳۹۶

۲۹- گزینه ۴ شرط آنکه سه خط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند آن است که محل تلاقی دو خط در معادله‌ی خط

سوم صدق کند.

$$\begin{cases} y + 2x = 0 \\ y + 3x = a \end{cases} \Rightarrow x = a, \quad y = -2a$$



$$A \left| \begin{array}{c} a \\ -2a \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق در خط سوم}} -4a + a^2 + 5 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 5 = 0$$

$$2y + ax + 5 = 0$$

این سه خط هیچ‌گاه متقارب نیستند. $\rightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد $\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$

سراسری-۱۳۸۸

۳۰- گزینه ۲ ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A \left| \begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right.$ و $B \left| \begin{array}{c} 8 \\ 3 \end{array} \right.$ را بدست می‌آوریم.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1 - 3}{2 - 8} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{دسته خط}} = -\frac{3}{2}$$

$$m_{\text{دسته خط}} = -\frac{2k}{k+1} = -\frac{3}{2} \rightarrow 4k = 3k + 3 \rightarrow k = 3$$

$$k = 3 \xrightarrow{\text{معادله‌ی دسته خطوط} \div 2} 4y + 6x - 2 = 0 \rightarrow 2y + 3x = 1$$

سراسری-۱۳۸۱

۳۱- گزینه ۴

برای آنکه ۳ خط در یک امتداد باشند، شیب دو به دوی آنها باید با هم برابر باشد.

سه نقطه‌ی $A \left| \begin{array}{c} a \\ 3 \end{array} \right.$ ، $B \left| \begin{array}{c} 6 \\ 4a+1 \end{array} \right.$ ، $C \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ را در نظر می‌گیریم.

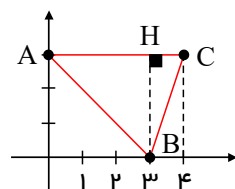
$$\text{شرط هم‌راستا بودن: } \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \rightarrow \frac{3 - 4a - 1}{a - 6} = \frac{4a + 1}{6 - 0} \rightarrow \frac{2 - 4a}{a - 6} = \frac{4a + 1}{6}$$

$$\rightarrow 4a^2 + a - 24a - 6 = 12 - 24a \rightarrow 4a^2 + a - 18 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 1 - 4(4)(-18) = 289 \rightarrow a = \frac{-1 \pm 17}{8} = 2, -\frac{9}{4}$$

خارج از کشور-۱۳۸۵

۳۲- گزینه ۲



از روی شکل واضح است حتماً محل تلاقی ارتفاع‌ها روی خط $x = 3$ می‌باشد و در گزینه‌ها تنها

نقطه‌ای که طولش برابر ۳ می‌باشد گزینه ۲ می‌باشد.

البته راه حل کلی این تست این می‌باشد که معادله‌ی دو ارتفاع دلخواه را نوشته و سپس آنها را با هم

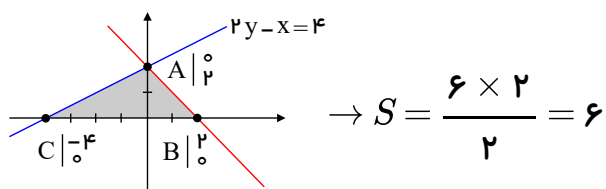
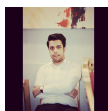
تلاقی دهیم.

منتا-۱۳۹۵

۳۳- گزینه ۲ ابتدا محل برخورد این خطوط را با محورهای مختصات پیدا می‌کنیم.

$$y + x = 2 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ y = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}, 2y - x = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ y = 0 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

سپس با رسم این خطوط، مساحت مثلث را بدست می‌آوریم.

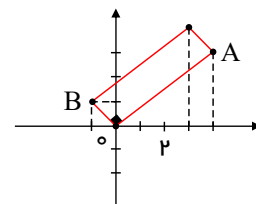


سراسری - ۱۳۷۳

۳۴- گزینه ۲ ابتدا مستطیل را رسم می‌کنیم. با توجه به عمود بودن ضلع‌های OA و OB بنابراین مساحت به صورت زیر محاسبه می‌شود.

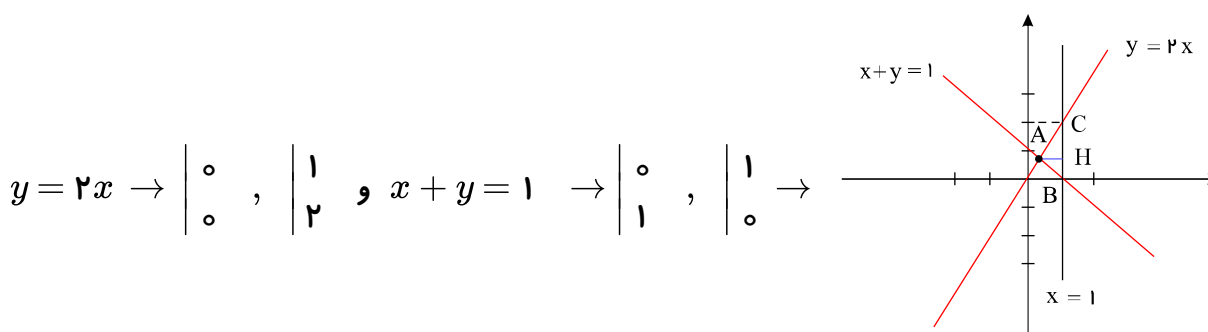
$$OA = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \quad \text{و} \quad OB = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = \text{طول} \times \text{عرض} = \sqrt{18} \times \sqrt{2} = 6$$



منتا - ۱۳۹۵

۳۵- گزینه ۱ سه خط داده شده را رسم می‌کنیم.



کوچک‌ترین ارتفاع مثلث ABC پاره خط AH می‌باشد که معادله‌اش $y = \frac{2}{3}$ است، زیرا اگر با دو خط $x + y = 1$ و

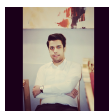
$y = 2x$ تشکیل دهیم، داریم:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$$

یعنی مختصات نقطه A به صورت $A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ است، پس معادله ارتفاع AH به صورت $y = \frac{2}{3}$ است.

سراسری - ۱۳۸۴

۳۶- گزینه ۱ با توجه به شکل باقی مانده داریم:

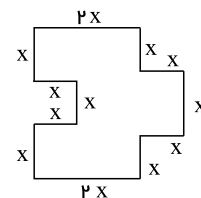


$$S = (3x)^2 - 3 \times x^2 = 9x^2 - 3x^2 = 6x^2$$

$$P = 2 \times 2x + 10x = 14x \Rightarrow 6x^2 = 14x$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 14x = 0 \Rightarrow 2x(3x - 7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق} \\ x = \frac{7}{3} & \text{جواب} \end{cases}$$



smart- ۱۴۰۰

۳۷- گزینه ۱ کافی است نمودار تابع درجه‌ی دوم داده شده را با نیمساز ناحیه اول ($y = x$) تلاقی دهیم و معادله تلاقی باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

معادله تلاقی

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow \boxed{2x^2 + mx + m + 6 = 0} :$$

$$\Delta = 0 \quad b^2 - 4ac = 0 \quad m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \quad m^2 - 8m - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 12)(m + 4) = 0 \Rightarrow m = 12, -4$$

حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m ، طول نقطه تماس مثبت است (در ناحیه اول x مثبت است).

$$m = 12 : 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad \text{غ ق}$$

$$m = -4 : 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{ق ق}$$

خارج از کشور- ۱۳۹۳

۳۸- گزینه ۳ برای اینکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد باید $\Delta > 0$ باشد بنابراین:

$$\Delta \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4(2m - 1)(m - 2) > 0 \Rightarrow 9 - (2m^2 - 4m - m + 2) > 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = (m + 1)(2m - 7) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < m < 3,5$$

درضمن ضریب x^2 نباید صفر باشد یعنی $m \neq \frac{1}{2}$ است.

$$m \in (-1, 3,5) - \frac{1}{2}$$

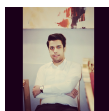
سراسری- ۱۳۹۸

۳۹- گزینه ۱

اگر بخواهیم دو ریشه ی متمایز داشته باشیم Δ باید بزرگتر از صفر باشد پس داریم:

$$2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 8a + 12 > 0 \Rightarrow (a - 2)(a - 6) > 0$$



$$\rightarrow \begin{array}{c|cccc} a & -\infty & 2 & 6 & +\infty \\ \hline \text{عبارت} & & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a > 6 \\ a < 2 \end{cases}$$

سراسری- ۱۳۸۱

۴۰- گزینه ۲

$$\Delta > 0 \rightarrow (1-m)^2 - 8(m-1) > 0 \rightarrow (1-m)(1-m+8) > 0$$

$$(1-m)(9-m) > 0 \rightarrow \begin{cases} m > 9 \\ m < 1 \end{cases}$$

بنابراین:

$$m \in \mathbb{R} - [1, 9]$$

smart- ۱۴۰۰

۴۱- گزینه ۳ چون α جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$\alpha^2 - 4\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 4\alpha + 3$$

بنابراین:

$$\alpha^2 + 4\beta = 4\alpha + 3 + 4\beta = 4(\alpha + \beta) + 3$$

از طرف دیگر مجموع جواب‌های معادله برابر ۴ است، پس:

$$\alpha^2 + 4\beta = 4(\alpha + \beta) + 3 = 4(4) + 3 = 19$$

smart- ۱۴۰۰

۴۲- گزینه ۴ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز باشد آن است که $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac > 0} 4m^2 - 4(m-6)(-3) > 0 \Rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0 \Rightarrow (m+6)(m-3) > 0$$

تعیین علامت

$$\rightarrow m < -6 \quad \text{یا} \quad m > 3 \quad (I)$$

$$S < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m}{m-6} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < m < 6 \quad (II)$$

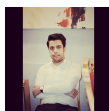
$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \Rightarrow m-6 < 0 \Rightarrow m < 6 \quad (III)$$

از اشتراک جواب‌های I و II و III به جواب $3 < m < 6$ می‌رسیم.

سراسری- ۱۳۹۷

۴۳- گزینه ۱ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند داریم:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{m+3}{m}, \quad x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{5}{m}$$



$$x'^2 + x''^2 = 6 \Rightarrow (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 6 \Rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - \frac{10}{m} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} - 6 = 0 \xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m - 6m^2 = 0$$

$$m^2 + 6m - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \text{معادله} \\ m = 1 \rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 : \Delta = 16 - 20 < 0 \\ m = -\frac{9}{5} \rightarrow \Delta > 0 \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست} \end{cases}$$

سراسری-۱۳۹۳

۴۴- گزینه ۲ معادله را به صورت $mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$ مرتب می کنیم.

$$x' = \frac{1}{x''} \Rightarrow x'x'' = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 2}{m} = 1 \Rightarrow m^2 - 2 = m \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \Rightarrow m = 2, m = -1$$

$$m = 2 \xrightarrow{\text{معادله}} 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0 \quad \text{غیر قابل قبول}$$

$$m = -1 \xrightarrow{\text{معادله}} -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0 \quad \text{قابل قبول}$$

خارج از کشور-۱۳۹۰

۴۵- گزینه ۳ ریشه های معادله ی داده شده را α و β در نظر می گیریم و طبق فرض $\alpha = 2\beta$ است.

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 2\beta^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \beta = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow 3$$

می دانیم جواب های معادله برابر $\alpha + \beta = 3 + \frac{3}{2}$ است:

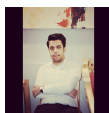
$$-\frac{a}{2} = \pm 2 \pm \frac{3}{2} = \pm \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha = \pm 9$$

خارج از کشور-۱۳۸۴

۴۶- گزینه ۴ برای این منظور باید $\Delta > 0, S > 0, P > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow m^2 - 8(m + 6) > 0 \rightarrow m^2 - 8m - 48 > 0$$

$$\rightarrow (m - 12)(m + 4) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -4 \text{ یا } m > 12 \quad (I)$$



$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -\frac{m}{2} > 0 \rightarrow -m > 0 \rightarrow m < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \rightarrow m+6 > 0 \rightarrow m > -6 \quad (III)$$

از اشتراک I, II, III به جواب $-6 < m < -4$ می‌رسیم.

خارج از کشور - ۱۳۹۹

۴۷- گزینه ۱ اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم داده شده باشند طبق فرض داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta} \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{1}{\frac{c}{a}} \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{a}{c} \rightarrow a^2 = -bc \rightarrow a^2 + bc = 0$$

$$\rightarrow 9 + (2m - 1)(2 - m) = 0 \rightarrow 9 + 4m - 2m^2 - 2 + m = 0 \rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} m = -1, m = -\frac{c}{a} = \frac{7}{2}$$

$$m = -1 \xrightarrow{\text{معادله}} 3x^2 - 3x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 36 < 0 \text{ ریشه حقیقی ندارد}$$

$$m = \frac{7}{2} \xrightarrow{\text{معادله}} 3x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \Delta = 36 + 18 > 0 \text{ قابل قبول}$$

سراسری - ۱۳۹۹

۴۸- گزینه ۱ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta > 0$ و $S > 0$ و $P > 0$ باشد.

$$S > 0 \rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow -(m-2) > 0 \rightarrow m-2 < 0 \rightarrow m < 2$$

بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند.

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow m+1 > 0 \rightarrow m > -1 \rightarrow \text{گزینه‌ی دوم حذف می‌شود}$$

بنابراین بدون اینکه شرط $\Delta > 0$ را اعمال کنیم گزینه‌ی اول انتخاب می‌شود.

خارج از کشور - ۱۳۹۷

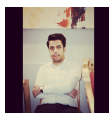
$$۴۹- \text{گزینه ۲ با توجه به اینکه } p = \frac{2}{1} = 2 \text{ و } s = \frac{-(-4)}{1} = 4, \text{ پس } \alpha \text{ و } \beta \text{ هردو مثبت هستند. } \alpha \text{ یا } \beta \text{ را در}$$

صورت معادله قرار می‌دهیم، داریم:

$$\alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha(\alpha - 4) = -2 \rightarrow \alpha - 4 = \frac{-2}{\alpha} \rightarrow 4 - \alpha = \frac{2}{\alpha}$$

به طریق مشابه $4 - \beta = \frac{2}{\beta}$ بدست می‌آید. پس خواهیم داشت:

$$\frac{\alpha}{4 - \beta} + \frac{\beta}{4 - \alpha} = \frac{\alpha}{\frac{2}{\beta}} + \frac{\beta}{\frac{2}{\alpha}} = \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\beta\alpha}{2} = \frac{2\alpha\beta}{2} = \alpha\beta = p = \boxed{2}$$



۵۰- گزینه ۱ می‌دانیم ضرب ریشه‌های معادله $2mx^2 + 7x + m^2 + 3 = 0$ برابر ۲ است. بنابراین:

$$\frac{m^2 + 3}{2m} = 2 \rightarrow m^2 + 3 = 4m \rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = 1 & \text{جایگذاری} \\ m = 3 & \text{در معادله} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 7x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = 49 - 32 > 0 \checkmark \\ 6x^2 + 7x + 12 = 0 \rightarrow \Delta = 49 - 288 < 0 \times \end{cases}$$

پس $m = 1$ قابل قبول است.

smart- ۱۴۰۰

۵۱- گزینه ۱

روش اول: اگر t ریشه‌ی معادله‌ی جدید و x ریشه‌ی معادله‌ی قدیم باشد داریم:

$$\frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{t} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله قدیم}} \frac{16}{t^2} - \frac{14}{t} + 3 = 0 \xrightarrow{\times t^2} 16 - 14t + 3t^2 = 0 \rightarrow 3t^2 - 14t + 16 = 0$$

مقایسه با $x^2 + ax + 10 = 0$

$$\rightarrow a = -14, b = 16$$

روش دوم: ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی مینویسیم که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم اولیه باشد، سپس معادله‌ی درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادله‌ی ثانویه باشد پس جای a ، c را عوض کرده و سپس b را در ۲ و c را در ۲ ضرب کنیم:

$$4x^2 - 7x + 3 = 0 \xrightarrow{\text{معکوس کردن ریشه}} 3x^2 - 7x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{دو برابر کردن}} 3x^2 - 14x + 16 = 0$$

این معادله را با $3x^2 + ax + b = 0$ مقایسه می‌کنیم و داریم:

$$a = -14, b = 16$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $cx^2 + bx + a = 0$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ است و

ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ برابر ریشه‌های معادله‌ی $kax^2 + bkbx + ck^2 = 0$ می‌باشند.

سراسری- ۱۳۸۶

۵۲- گزینه ۲

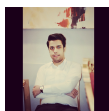
معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد بیشتر از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، به صورت زیر است:

$$a(x-k)^2 + b(x-k) + c = 0$$

پس کافی است x را به $x-1$ تبدیل کنیم.

$$3(x-1)^2 + 7(x-1) + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 + 7x - 7 + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 + x - 3 = 0$$

برای مقایسه با $x^2 + ax + b = 0$ معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.



$$x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -1$$

سراسری-۱۳۸۷

۵۳-گزینه ۴

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \xrightarrow{x \rightarrow x-1} 3(x-1)^2 - 4(x-1) - 1 = 0$$

$$\rightarrow 3(x^2 + 1 - 2x) - 4x + 4 - 1 = 0 \rightarrow 3x^2 + 3 - 6x - 4x + 4 - 1 = 0$$

$$\rightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{مقایسه با } 3x^2 + ax + b = 0} a = -10, b = 6$$

دقت کنید که ریشه‌های معادله $a(x-k)^2 + b(x-k) + c = 0$ ، k واحد بیشتر از ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است.

خارج از کشور-۱۳۸۶

۵۴-گزینه ۱ اگر α و β جواب‌های معادله باشند و $\alpha = 2\beta$ آنگاه

$$\alpha + \beta = 3m \rightarrow 2\beta + \beta = 3m \rightarrow \beta = m \rightarrow \alpha = 2m$$

$$\alpha \cdot \beta = m + 3 \rightarrow (2m)(m) = m + 3 \rightarrow 2m^2 - m - 3 = 0 \rightarrow (m+1)(2m-3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

به ازای هر دو مقدار به دست آمده معادله دو جواب دارد، پس هر دو قابل قبول هستند و در نتیجه مجموع مقادیرهای

ممکن برای m برابر $\frac{1}{2}$ است.

smart-۱۴۰۰

۵۵-گزینه ۴ روش اول:

می‌دانیم برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده‌ای باشد باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده‌ای باشد، باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

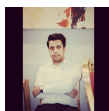
$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{معکوس}} -x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{یک واحد کمتر}} -(x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x - 1 - 3x - 3 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

سراسری-۱۳۹۴

۵۶-گزینه ۱ ریشه‌های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ را α و β فرض می‌کنیم.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{-1}{1} = 1, P = \alpha \cdot \beta = \frac{-3}{1} = -3$$



بنابراین ریشه‌های معادله $2x^2 + mx - n = 0$ عبارت‌اند از: $\alpha^2 + 1$ و $\beta^2 + 1$ که داریم:

$$\text{جمع ریشه‌ها} = \alpha^2 + 1 + \beta^2 + 1 = -\frac{m}{2} \Rightarrow -\frac{m}{2} = \alpha^2 + \beta^2 + 2$$

$$\Rightarrow -\frac{m}{2} = S^2 - 2P + 2 = 1 - 2(-3) + 2 = 1 + 6 + 2 = 9 \Rightarrow m = -18$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها} = (\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = -\frac{n}{2} \Rightarrow -\frac{n}{2} = \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1$$

$$\Rightarrow -\frac{n}{2} = P^2 + S^2 - 2P + 1 = 9 + 1 - 2(-3) + 1 = 17 \Rightarrow n = -34$$

$$\Rightarrow m - n = -18 - (-34) = 34 - 18 = 16$$

smart- ۱۴۰۰

۵۷- گزینه ۱ کمترین مقدار تابع برابر است با:

$$y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4a(-3) - (-4)^2}{4a} = \frac{-12a - 16}{4a} = -1$$

$$\Rightarrow -12a - 16 = -40a \Rightarrow 28a = 16 \Rightarrow a = \frac{4}{7}$$

بنابراین معادله محور تقارن به صورت زیر است:

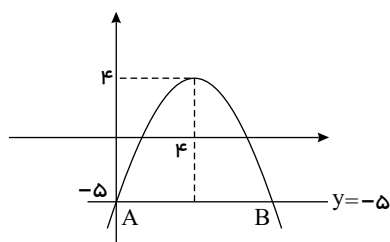
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times \frac{4}{7}} = \frac{7}{2}$$

smart- ۱۴۰۰

۵۸- گزینه ۳ محور تقارن سهمی، آن را در رأس سهمی قطع می‌کند. پس $y = 4$ عرض رأس سهمی است.

$$-\frac{\Delta}{4a} = 4 \Rightarrow -\frac{36 - 4k}{4(-1)} = 4 \Rightarrow 36 - 4k = 16 \Rightarrow 4k = 20 \Rightarrow k = 5$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = -x^2 + 6x - 5$ است که مطابق شکل مقابل در نقاط A و B خط $y = -5$ را قطع می‌کند.



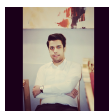
$$-x^2 + 6x - 5 = -5$$

$$x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

بنابراین $x_A = 0$ و $x_B = 6$ ؛ در نتیجه: $AB = 6$

smart- ۱۴۰۰

۵۹- گزینه ۳ معادله سهمی را به صورت $y = a(x - 2)(x + 4)$ در نظر می‌گیریم.



طول رأس این سهمی $x = -1$ است. پس عرض آن هم باید $y = 1$ باشد تا رأس سهمی روی نیمساز ربع دوم باشد. بنابراین سهمی از نقطه $(-1, 1)$ عبور می‌کند:

$$1 = a(-1 - 2)(-1 + 4) \Rightarrow a = -\frac{1}{9}$$

پس معادله سهمی به صورت $y = -\frac{1}{9}(x - 2)(x + 4)$ است. در نتیجه:

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{9}(-2)(4) = \frac{8}{9}$$

یعنی سهمی در نقطه $(0, \frac{8}{9})$ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.

smart- ۱۴۰۰

۶- گزینه ۱ کافی است که مختصات سه نقطه داده شده را در تابع صدق دهیم.

$$A \left| \begin{array}{c} 0 \\ 5 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} 5 = 0 + 0 + c \rightarrow c = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} B \left| \begin{array}{c} -2 \\ 5 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} 5 = 4a - 2b + 5 \rightarrow 4a - 2b = 0 \\ C \left| \begin{array}{c} 1 \\ 11 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} 11 = a + b + 5 \rightarrow a + b = 6 \end{array} \right\} \rightarrow a = 2, b = 4$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ است که نقطه $\left| \begin{array}{c} -1 \\ 3 \end{array} \right|$ روی این تابع قرار دارد.

سراسری- ۱۳۹۹

۶۱- گزینه ۲

در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ رأس سهمی از رابطه $x_S = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید و این طول را در تابع قرار می‌دهیم عرض آن به دست می‌آید.

$$-\frac{b}{2a} = -1 \rightarrow 2a = b$$

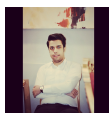
$$f(-1) = 9 \rightarrow a - b + c = 9 \xrightarrow{b=2a} -a + c = 9$$

$$\left| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = 9a + 3b + c \xrightarrow{b=2a} 15a + c = 1 \rightarrow \begin{cases} -a + c = 9 \\ 15a + c = 1 \end{cases} \rightarrow 16a = -8 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$b = -1, c = \frac{17}{2}$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{17}{2}$ است که نقطه $\left| \begin{array}{c} 5 \\ -9 \end{array} \right|$ روی این تابع قرار دارد.

خارج از کشور- ۱۳۹۹



۶۲- گزینه ۳ با توجه به این که $x = 2$ محور تقارن نمودار است و $x = 0$ یکی از ریشه‌های $f(x)$ است، پس $x = 4$ ریشه دیگر است.

$$f(x) = x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} = 4 \Rightarrow b = -4a \end{cases} \Rightarrow f(x) = ax^2 - 4ax$$

از طرف دیگر نمودار از نقطه $(2, 2)$ عبور کرده است. پس:

$$f(2) = 2 \Rightarrow 4a - 8a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

$$f(ab) = f(-1) = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$$

smart- ۱۴۰۰

۶۳- گزینه ۱ اگر ریشه‌های معادله $-3a^2 + (a-1)x + a + 2 = 0$ برابر α و β باشد، داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = \left(\frac{a-1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{a+2}{3}\right) = 10$$

$$\rightarrow \frac{a^2 - 2a + 1}{9} + \frac{2a + 4}{3} = 10 \rightarrow a^2 - 2a + 1 + 6a + 12 = 90$$

$$\rightarrow a^2 + 4a - 77 = 0 \rightarrow (a + 11)(a - 7) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 7 & \text{ق ق} \\ a = -11 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\rightarrow y = ax^2 - 28x + a + 1 = 7x^2 - 28x + 8 \rightarrow \text{معادله محور تقارن} = \frac{28}{14} = 2$$

smart- ۱۴۰۰

۶۴- گزینه ۳ طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ است. پس:

$$-\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$$

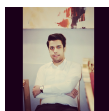
پس معادله سهمی به صورت $y = ax^2 - 4ax - 2$ است. با قرار دادن $x = 2$ در معادله سهمی عرض آن را حساب می‌کنیم:

$$y = 4a - 8a - 2 = -4a - 2$$

بنابراین با توجه به نمودار داریم:

$$-4a - 2 = 2 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{b = -4a} b = 4$$

یعنی معادله سهمی به صورت $y = -x^2 + 4x - 2$ است. طول نقطه برخورد سهمی با محور طول‌ها مورد سؤال است.



پس در معادله سهمی قرار می‌دهیم $y = 0$.

$$-x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 8 = 8 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

طبق شکل، β ریشه بزرگتر معادله فوق است و بزرگتر از ۲ است. پس:

$$\beta = 2 + \sqrt{2}$$

smart- ۱۴۰۰

۶۵- گزینه ۳ ضابطه تابع f را به صورت $f(x) = a(x - k)^2 + h$ در نظر می‌گیریم. چون رأس سهمی تابع f نقطه $(2, 3)$ است، پس $k = 2$ و $h = 3$ ، یعنی $f(x) = a(x - 2)^2 + 3$. نمودار از نقطه $(0, 2)$ عبور می‌کند، پس:

$$f(0) = 2 \Rightarrow a(0 - 2)^2 + 3 = 2 \Rightarrow 4a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 3 = -\frac{1}{4}x^2 + x + 2$$

اگر α و β صفرهای تابع f باشند، آن‌گاه:

$$\alpha + \beta = -\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}} = 4, \quad \alpha\beta = \frac{2}{-\frac{1}{4}} = -8$$

بنابراین مجموع مربعات صفرهای تابع f برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2(-8) = 32$$

smart- ۱۴۰۰

۶۶- گزینه ۳ طول پایین‌ترین نقطه سهمی به معادله $y = 2x^2 - 4x + b$ برابر است با $x = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1$ و عرض این نقطه برابر است:

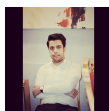
$$y = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 + b = b - 2$$

طول بالاترین نقطه سهمی به معادله $y = -x^2 + ax + 3$ برابر است با:

$$x = -\frac{a}{2(-1)} = \frac{a}{2}$$

پس $\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$. عرض این نقطه برابر است با:

$$y = -1 + 2 + 3 = 4$$



بنابراین $b - 2 = 4 \rightarrow b = 6$

نقطه برخورد سهمی $y = 2x^2 - 4x + 6$ با محور عرض‌ها نقطه $(0, 6)$ و نقطه برخورد سهمی $y = -x^2 + 2x + 3$ با محور عرض‌ها نقطه $(0, 3)$ است. فاصله این دو نقطه برابر ۳ است.

smart- ۱۴۰۰

۶۷- گزینه ۱ بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم همان عرض رأس سهمی است.

$$y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \rightarrow 4ac - b^2 = 0 \rightarrow 4(k+3)(k) - 16 = 0$$

$$\rightarrow 4k^2 + 12k - 16 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} k = 1 \\ k = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}$$

تابع درجه‌ی دوم وقتی دارای Max است که ضریب x^2 منفی باشد پس فقط $k = -4$ قابل قبول است.

سراسری- ۱۳۸۳

۶۸- گزینه ۴

خط $x = 2$ محور تقارن تابع درجه‌ی دوم داده شده است.

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = 2 = -\frac{1}{2a-2} \Rightarrow 4a-4 = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \xrightarrow[\substack{\times(-4) \\ y=0}]{y=0} y = x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 6 \end{cases}$$

چون طول مثبت را خواسته پس $x = 6$ جواب مسأله است.

سراسری- ۱۳۸۳

۶۹- گزینه ۲ با توجه به شکل مختصات رأس سهمی به صورت $S \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}$ و $A \begin{vmatrix} -4 \\ +1 \end{vmatrix}$ نقطه دیگری از سهمی است. پس

می‌توانیم ضابطه سهمی را به صورت زیر بنویسیم:

$$y = a(x+2)^2 + 3 \xrightarrow[\substack{\text{در ضابطه سهمی صدق می‌کند}}]{A \begin{vmatrix} -4 \\ +1 \end{vmatrix}} 1 = a(-4+2)^2 + 3 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

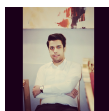
$$\rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3 \rightarrow f(-1) = -\frac{1}{2}(-1+2)^2 + 3 = 2.5$$

smart- ۱۴۰۰

۷۰- گزینه ۴ چون $f(-1) = f(4) = 0$ پس ضابطه f را می‌توانیم به صورت $f(x) = k(x+1)(x-4)$ در

نظر بگیریم. از طرف دیگر طول رأس سهمی برابر $\frac{3}{2}$ است و عرض آن برابر -5 است. پس:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -5 \Rightarrow k\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}-4\right) = -5$$



$$-\frac{25}{4}k = -5 \Rightarrow k = \frac{4}{5}$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{4}{5}(x+1)(x-4) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{12}{5}x - \frac{16}{5}$$

پس $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{12}{5}$, $c = -\frac{16}{5}$ و در نتیجه:

$$a + b - c = \frac{4}{5} + \frac{12}{5} + \frac{16}{5} = \frac{32}{5}$$

smart- ۱۴۰۰

۷۱- گزینه ۳ رأس سهمی نمودار تابع f نقطه $(-1, 4)$ است، پس ضابطه f به صورت $f(x) = k(x+1)^2 + 4$ است. نمودار f از نقطه $(0, 1)$ عبور می کند، پس:

$$f(0) = 1 \Rightarrow k(0+1)^2 + 4 = 1 \Rightarrow k = -3$$

$$\Rightarrow f(x) = -3(x+1)^2 + 4 = -3x^2 - 6x + 1$$

بنابراین اگر α و β صفرهای تابع f باشند، داریم:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{-6}{(-3)}}{-\frac{1}{3}} = 6$$

smart- ۱۴۰۰

۷۲- گزینه ۴ با توجه به این که $f(4) = f(-1) = 0$ ضابطه تابع را به صورت $f(x) = k(x+1)(x-4)$ می نویسیم. چون $f(0) = 2$ پس:

$$k(0+1)(0-4) = 2 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4) = -\frac{1}{2}(x^2 - 3x - 4) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$$

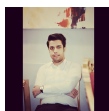
بنابراین $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 2$ و در نتیجه: $a + b + c = 3$

smart- ۱۴۰۰

۷۳- گزینه ۱ طول نقطه B با همان رأس سهمی، میانگین طولهای دو نقطه هم عرض A و C است.

$$x_B = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

باتوجه به مختصات B (رأس سهمی)، می توان ضابطه سهمی را به صورت $f(x) = a(x-2)^2 + 1$ نوشت. با



جایگذاری مختصات نقطه $C \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}$ در ضابطه سهمی داریم:

$$f(x) = a(x - 2)^2 + 1 \xrightarrow{C \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}} -1 = a(0 - 2)^2 + 1 \rightarrow a = \frac{-1}{2} \rightarrow f(x) = \frac{-1}{2}(x - 2)^2 + 1$$

برای بدست آوردن ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 2 \rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4 \\ p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \rightarrow \beta, \alpha \text{ ریشه‌های معادله موردنظر هستند.}$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{S^2 - 2p}{p^2} = \frac{16 - 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

smart- ۱۴۰۰

۷۴- گزینه ۳ طول رأس سهمی برابر $x = -\frac{a}{2(-2)}$ است. پس:

$$\frac{a}{4} = -1 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow y = -2x^2 - 4x - b$$

عرض رأس سهمی به ازای $x = -1$ به دست می‌آید. پس:

$$y = -2(-1)^2 + a(-1) - b = -2 + 4 - b = 4 \Rightarrow b = -2$$

در نتیجه: $ab = 8$

smart- ۱۴۰۰

۷۵- گزینه ۱ کافی است ضریب x^2 مثبت و Δ منفی باشد.

$$a > 0, \Delta = 16 - 16a^2 < 0 \Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow a > 1 \text{ یا } a < -1$$

بنابراین $a \in (1, +\infty)$

smart- ۱۴۰۰

۷۶- گزینه ۱ اگر در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $\frac{c}{a} < 0$ باشد. (یعنی a و c مختلف علامه باشند)، تابع درجه دوم از ۴ ناحیه می‌گذرد. بنابراین باید $m + 2 < 0$ و در نتیجه $m < -2$ باشد.

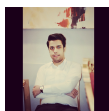
خارج از کشور- ۱۳۸۷

۷۷- گزینه ۲ برای این که نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ بالای محور طول‌ها قرار بگیرد، باید شرایط

$a < 0$ و $\Delta \leq 0$ برقرار باشد. پس:

$$a = 2 - k < 0 \Rightarrow k > 2 \quad (1)$$

$$\Delta = 8 - 4(2 - k)(1 - k) \leq 0 \Rightarrow -4k^2 + 12k \leq 0$$



$$4k(k-3) \geq 0 \Rightarrow k \geq 3 \text{ یا } k \leq 0 \quad (2)$$

اشتراک شرایط (1) و (2) بازه $[3, +\infty)$ است.

smart- ۱۴۰۰

۷۸- گزینه ۲

شرط آنکه سهمی همواره پایین محور x باشد، آن است که: $a < 0$ و $\Delta < 0$

$$a < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1 \quad (I)$$

$$\Delta < 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac < 0} 4(m-3)^2 - 4(1-m)(-1) < 0 \xrightarrow{\div 4} (m-3)^2 + (1-m) < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \Rightarrow (m-2)(m-5) < 0$$

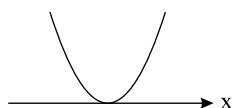
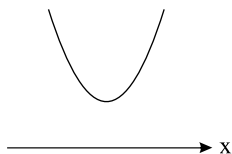
$$\Rightarrow 2 < m < 5 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $2 < m < 5$ می‌رسیم.

خارج از کشور- ۱۳۹۸

۷۹- گزینه ۲

طبق شکل مقابل سهمی از ناحیه سوم و چهارم نمی‌گذرد. هرگاه رو به بالا بوده و با محور x برخوردی نداشته باشد یا مماس بر محور x باشد، یعنی $\Delta \leq 0$ ، پس داریم:



$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 20 - 4(a-2)(a+2) \leq 0 \xrightarrow{\div 4} 5 - (a^2 - 4) \leq 0 \Rightarrow 5 - a^2 + 4 \leq 0 \Rightarrow a^2 \geq 9$$

$$\Rightarrow |a| \geq 3 \Rightarrow a \leq -3 \text{ یا } a \geq 3 \quad (1)$$

$$\Rightarrow x^2 \text{ ضریب } > 0 \Rightarrow a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2 \quad (2)$$

اشتراک (1) و (2) برابر است با:

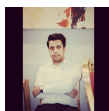
$$(1) \cap (2) : a \geq 3$$

smart- ۱۴۰۰

۸۰- گزینه ۳ نقاط تلاقی با محورهای مختصات را پیدا می‌کنیم.

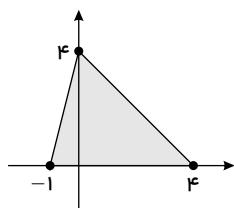
$$x = 0 \rightarrow y = 4$$

$$y = 0 \rightarrow -x^2 + 3x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow (x-4)(x+1) = 0$$



$$\rightarrow x = 4, x = -1$$

بنابراین نقاط تلاقی مانند شکل مقابل هستند و مساحت مثلث مورد نظر برابر است با:



$$\frac{4 \times 5}{2} = 10$$

smart- ۱۴۰۰

۸۱- گزینه ۱ نمودار از نقطه $(0, -1)$ عبور می‌کند. پس:

$$f(0) = -1 \Rightarrow -b = -1 \Rightarrow b = 1$$

نمودار بر محور طول‌ها مماس است، پس Δ در معادله $(a - 8)x^2 + ax - b = 0$ برابر صفر است.

$$\Delta = a^2 + 4b(a - 8) = 0 \Rightarrow a^2 + 4(a - 8) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 4a - 32 = 0 \Rightarrow (a + 8)(a - 4) = 0 \Rightarrow a = 4, a = -8$$

چون نمودار در نقطه‌ای با طول منفی بر محور طول‌ها مماس است، پس جواب معادله بالا باید منفی باشد. یعنی:

$$-\frac{-a}{2(a - 8)} < 0 \Rightarrow \frac{a}{a - 8} < 0$$

به‌ازای $a = 4$ عبارت بالا منفی است، ولی به‌ازای $a = -8$ مثبت است. پس a فقط می‌تواند برابر با ۴ باشد.

smart- ۱۴۰۰

۸۲- گزینه ۱ برای حل می‌توان معادله را به فرم ساده‌تری تبدیل کرد:

$$\frac{1}{x^2(x + 1)} = \frac{2}{x + 1}$$

می‌توان عامل $x + 1$ را از دو طرف ساده کرد، چون به دلیل حضور در مخرج کسر الزاماً $x + 1 \neq 0$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x^2} = 2 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

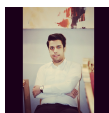
جواب‌های فوق قابل قبول هستند، زیرا ریشه‌های مخرج نیستند.

بنابراین مجموع دو ریشه قرینه صفر است.

منتا- ۱۳۹۶

۸۳- گزینه ۴ اگر بین عبارت طرف اول مخرج مشترک بگیریم داریم:

$$\frac{(x + 1)(x + 2) + (x - 1)(x - 2)}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 4} \rightarrow \frac{2x^2 + 4}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 5x}{x^2 - 4}$$



باتوجه به برابر بودن مخرج‌ها، صورتها نیز باید با هم برابر باشند، پس:

$$2x^2 + 4 = x^2 + 5x \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = 4 \end{cases}$$

هر دو ریشه هم قابل قبول می‌باشند، لذا داریم:

$$\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} \quad \underline{\underline{\alpha = 4, \beta = 1}} \quad 4\sqrt{1} + 1\sqrt{4} = 6$$

منتا- ۱۳۹۶

۸۴- گزینه ۴ اگر بهروز بتواند به‌تنهایی این کار را در k ساعت انجام دهد، فرهاد همان کار را به‌تنهایی در $k + 9$ ساعت انجام می‌دهد؛ آنگاه داریم:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2k+9}{k \cdot (k+9)} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow k^2 + 9k = 40k + 180 \Rightarrow k^2 - 31k - 180 = (k-36)(k+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 36 \\ k = -5 \end{cases} \text{ غ ق}$$

سراسری- ۱۳۹۸

۸۵- گزینه ۲ برای حل مسئله باید میزان کار انجام شده در یک روز را در حالت‌های مختلف محاسبه کرد:

$$\frac{1}{18} = \text{مقدار کار انجام شده در یک روز} \rightarrow \text{هر دو با هم } 18 \text{ روز}$$

فرض می‌کنیم کارگر اول در x روز کار را انجام دهد پس:

$$\frac{1}{x} = \text{کار انجام شده بوسیله کارگر اول در یک روز}$$

کارگر دوم در $x + 15$ روز کار را انجام می‌دهد، پس:

$$\frac{1}{x+15} = \text{مقدار کار انجام شده بوسیله کارگر دوم در یک روز}$$

حال می‌توان معادله‌ی زیر را تشکیل داد:

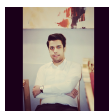
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18} \xrightarrow{18x(x+15)} 18(x+15) + 18x = x(x+15)$$

$$\rightarrow 18x + 270 + 18x = x^2 + 15x \rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0 \rightarrow (x-30)(x+9) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 30 \checkmark \\ x = -9 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

منتا- ۱۳۹۶

۸۶- گزینه ۴ برای حل می‌توان عبارت $x^2 - 2x + 3$ را t در نظر گرفت و پس معادله را در ک.م.م مخارج ضرب کرد:



$$\frac{1}{t-1} + \frac{2}{t} = \frac{6}{t+1}$$

$$\xrightarrow{\times(t-1)t(t+1)} t(t+1) + 2(t-1)(t+1) = 6t(t-1)$$

$$\rightarrow t^2 + t + 2t^2 - 2 = 6t^2 - 6t \rightarrow 3t^2 - 7t + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 25$$

$$t_1 = \frac{7+5}{6} = 2 \rightarrow x^2 - 2x + 3 = 2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$t_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{3} \rightarrow x^2 - 2x + \frac{8}{3} = 0 \rightarrow \Delta < 0$$

پس عبارت مورد نظر مسئله برابر است با:

$$7\alpha^2 - 5\alpha + 1 \stackrel{\alpha=1}{=} +3$$

منتا- ۱۳۹۶

۸۷- گزینه ۴

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$$

بهتر است برای حل معادله عبارت $\frac{x^2 + x - 5}{x}$ را t فرض نماییم.

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} = t \rightarrow t + \frac{3}{t} + 4 = 0 \xrightarrow{\times t} t^2 + 4t + 3 = 0$$

باتوجه به معادله $a + c = b$ پس:

$$t_1 = -1 \rightarrow \frac{x^2 + x - 5}{x} = -1 \rightarrow x^2 + x - 5 = -x \rightarrow x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$t_2 = -\frac{c}{a} = -3 \rightarrow \frac{x^2 + x - 5}{x} = -3 \rightarrow x^2 + x - 5 = -3x \rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

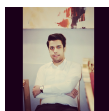
به دو معادله‌ی درجه ۲ رسیده‌ایم. می‌توان مجموع ریشه‌های هر دو معادله را از رابطه‌ی $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ محاسبه نمود.

$$S = S_1 + S_2 = -2 - 4 = -6$$

منتا- ۱۳۹۶

۸۸- گزینه ۳ می‌دانیم که $x = vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{v}$ است. اگر سرعت جریان آب را v در نظر بگیریم سرعت قایق در

جهت حرکت آب $v + 100$ و در خلاف جهت حرکت آب $v - 100$ است.



$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_1 = \frac{1200}{100+v} \\ \text{مسیر برگشت } t_2 = \frac{1200}{100-v} \end{cases} \Rightarrow t_2 - t_1 = 5 \Rightarrow \frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1200(100+v) - 1200(100-v)}{(100-v)(100+v)} = 5 \Rightarrow \frac{120000 + 1200v - 120000 + 1200v}{10000 - v^2} = 5$$

$$\Rightarrow 2400v = 5(10000 - v^2) \Rightarrow 480v = 10000 - v^2$$

$$\Rightarrow v^2 + 480v - 10000 = 0 \Rightarrow (v - 20)(v + 500) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 20 \text{ قق} \\ v = -500 \text{ غقق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب $v = 20$ برسید.

سراسری-۱۳۹۸

۸۹- گزینه ۴ با فاکتورگیری معادله به شکل ساده‌تری تبدیل می‌شود

$$\sqrt{4-x^2}(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x+3=0 \rightarrow x=-3 \\ \sqrt{4-x^2}=0 \rightarrow 4-x^2=0 \rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

با جایگذاری این ریشه‌ها در معادله مشخص می‌شود که $x = -3$ در معادله صدق نمی‌نماید و فقط $x = \pm 2$ قابل قبول هستند و مجموع آنها برابر صفر است.

منتا-۱۳۹۶

۹۰- گزینه ۳

$$\sqrt{3} + \sqrt{x-x^3} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{توان } 2 \Rightarrow 3 + \sqrt{x-x^3} = 3$$

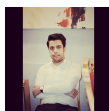
$$\Rightarrow \sqrt{x-x^3} = 0 \Rightarrow x-x^3 = 0 \Rightarrow x(1-x)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

هر سه x بدست آمده در معادله صدق می‌کنند و مجموع ریشه‌ها صفر است.

منتا-۱۳۹۲

۹۱- گزینه ۱

$$2a + \sqrt{3a+16} = 1 \rightarrow \sqrt{3a+16} = 1-2a \xrightarrow{\text{توان } 2} 3a+16 = 1+4a^2-4a$$



$$\rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 240 = 289} \begin{cases} a = \frac{7 + 17}{8} = 3 \text{ (در معادله صدق نمی کند)} \\ a = \frac{7 - 17}{8} = \frac{-5}{4} \text{ قق} \end{cases}$$

$$\text{پس : } 4a + 9 = 4\left(\frac{-5}{4}\right) + 9 = 4$$

خارج از کشور - ۱۳۹۸

۹۲ - گزینه ۴

$$x = 4 \Rightarrow 4 + a = \sqrt{20 - 16} \Rightarrow a = -2 \quad \text{پس در معادله صدق می کند:}$$

$$x - 2 = \sqrt{5x - x^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 4x + 4 = 5x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{9}{2} \xrightarrow{x_1 = 4} 4 + x_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \text{ در معادله صدق نمی کند } (x - 2 = \sqrt{5x - x^2}) \text{ پس به عنوان ریشه محسوب نمی شود.}$$

سراسری - ۱۳۸۷

۹۳ - گزینه ۴

$$3x - 2 + \sqrt{4x - 3} = 0 \Rightarrow \sqrt{4x - 3} = 2 - 3x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x - 3 = 4 + 9x^2 - 12x$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 16x + 7 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = \frac{7}{9} \end{cases}$$

باید امتحان کنیم که جواب های به دست آمده در معادله داده شده صدق می کنند یا خیر.

$$x = 1 \xrightarrow{\text{معادله}} 3 - 2 + \sqrt{4 - 3} = 0 \Rightarrow 1 + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ قق}$$

$$x = \frac{7}{9} \xrightarrow{\text{معادله}} \frac{7}{3} - 2 + \sqrt{\frac{28}{9} - 3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{9} \text{ قق}$$

بنابراین معادله فاقد جواب است.

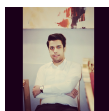
خارج از کشور - ۱۳۸۷

۹۴ - گزینه ۱ باتوجه به اینکه مجموع دو رادیکال فرجه ی زوج که، همواره نامنفی هستند صفر شده است، هم اولی باید صفر باشد هم دومی.

لذا می توان ریشه های یک بخش را محاسبه کرد و در کل معادله جایگذاری نمود.

$$\sqrt{x^3 - 4x} = 0 \rightarrow x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 2)(x + 2) = 0$$

پس سه ریشه ی اولیه وجود دارد $x = 2$, $x = 0$, $x = -2$



حال با جایگذاری متوجه می‌شویم که فقط $x = -2$ در معادله صدق می‌نماید.

منتا- ۱۳۹۶

۹۵- گزینه ۱ عبارت $(x^5 + x - 4)$ از عبارت $(x^5 + x - 3)$ یک واحد کوچکتر است لذا اختلاف عامل ضعیف‌تر $(\sqrt{x^5 + x - 4})$ از عامل قوی‌تر $\sqrt{x^2 + x - 3}$ الزاماً منفی می‌باشد، در حالی که طرف دوم معادله مثبت است. در نتیجه معادله ریشه نخواهد داشت.

منتا- ۱۳۹۶

۹۶- گزینه ۳ برای محاسبه‌ی عبارت متناوب مطرح شده، آن را برابر پارامتر A قرار می‌دهیم.

$$A = \sqrt{-1 + 2\sqrt{-1 + 2\sqrt{-1 + \dots}}}$$

$$\xrightarrow{()^2} A^2 = -1 + 2\sqrt{-1 + 2\sqrt{-1 + 2\sqrt{-1 + \dots}}} \rightarrow A^2 = -1 + 2A$$

$$\rightarrow A^2 - 2A + 1 = 0 \rightarrow (A - 1)^2 = 0 \rightarrow A = 1$$

منتا- ۱۳۹۶

۹۷- گزینه ۴ می‌توان از تعیین دامنه برای حل معادله استفاده کرد، زیرا دو عبارت قرینه داخل رادیکال با فرجه‌ی زوج وجود دارد.

$$\sqrt[5]{x + \sqrt{x - 2}} = \sqrt[4]{2 - x} + \sqrt[5]{2x - 2}$$

$$(I) \quad x - 2 \geq 0 \quad (II) \quad 2 - x \geq 0$$

$$x \geq 2 \quad \cap \quad x \leq 2 \rightarrow x = 2$$

حال می‌توان با جایگذاری $x = 2$ از وجود ریشه مطلع شد. با جایگذاری در معادله داریم:

$$x = 2 \rightarrow \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2}$$

باتوجه به تساوی برقرار شد پس $\alpha = 2$ ریشه است و عبارت مورد نظر سوال برابر است با: $\alpha^5 + \alpha^3 = 40$

منتا- ۱۳۹۶

۹۸- گزینه ۱

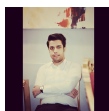
$$\sqrt{2x + 1} = 2 + \sqrt{x - 3} \xrightarrow{\text{توان } 2} 2x + 1 = 4 + x - 3 + 4\sqrt{x - 3}$$

$$\rightarrow x = 4\sqrt{x - 3} \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 = 16(x - 3) \rightarrow x^2 = 16x - 48$$

$$\rightarrow x^2 - 16x + 48 = 0 \rightarrow (x - 12)(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 12 & \text{ق ق} \\ x = 4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر ۱۶ می‌باشد.

منتا- ۱۳۹۶



۹۹- گزینه ۴ برای حل معادلات گنگ طرفین را به توان مناسب می‌رسانیم تا رادیکال‌ها از بین بروند.

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a^2 + 4a = 4 + 9a^2 - 12a$$

$$\rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 256 - 112 = 144 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{16 + 12}{14} = 2 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ a = \frac{16 - 12}{14} = \frac{2}{7} \text{ قق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7} + 1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4,5$$

سراسری- ۱۳۹۸

۱۰۰- گزینه ۲

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} = A \rightarrow A + 3 = \frac{A+7}{2A} \rightarrow 2A^2 + 6A = A + 7 \rightarrow 2A^2 + 5A - 7 = 0$$

$$a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ A = \frac{c}{a} = -\frac{7}{2} \text{ قق} \end{cases}$$

$$A=1 \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 2x - 3 = 1 \rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -4$$

منتا- ۱۳۹۶

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۱۸ - ۲	۳۵ - ۱	۵۲ - ۲	۶۹ - ۲	۸۶ - ۴
۲ - ۴	۱۹ - ۴	۳۶ - ۱	۵۳ - ۴	۷۰ - ۴	۸۷ - ۴
۳ - ۲	۲۰ - ۲	۳۷ - ۱	۵۴ - ۱	۷۱ - ۳	۸۸ - ۳
۴ - ۱	۲۱ - ۴	۳۸ - ۳	۵۵ - ۴	۷۲ - ۴	۸۹ - ۴
۵ - ۱	۲۲ - ۲	۳۹ - ۱	۵۶ - ۱	۷۳ - ۱	۹۰ - ۳
۶ - ۳	۲۳ - ۲	۴۰ - ۲	۵۷ - ۱	۷۴ - ۳	۹۱ - ۱
۷ - ۳	۲۴ - ۳	۴۱ - ۳	۵۸ - ۳	۷۵ - ۱	۹۲ - ۴
۸ - ۴	۲۵ - ۳	۴۲ - ۴	۵۹ - ۳	۷۶ - ۱	۹۳ - ۴
۹ - ۲	۲۶ - ۳	۴۳ - ۱	۶۰ - ۱	۷۷ - ۲	۹۴ - ۱
۱۰ - ۱	۲۷ - ۱	۴۴ - ۲	۶۱ - ۲	۷۸ - ۲	۹۵ - ۱
۱۱ - ۲	۲۸ - ۱	۴۵ - ۳	۶۲ - ۳	۷۹ - ۲	۹۶ - ۳
۱۲ - ۳	۲۹ - ۴	۴۶ - ۴	۶۳ - ۱	۸۰ - ۳	۹۷ - ۴
۱۳ - ۱	۳۰ - ۲	۴۷ - ۱	۶۴ - ۳	۸۱ - ۱	۹۸ - ۱
۱۴ - ۱	۳۱ - ۴	۴۸ - ۱	۶۵ - ۳	۸۲ - ۱	۹۹ - ۴
۱۵ - ۳	۳۲ - ۲	۴۹ - ۲	۶۶ - ۳	۸۳ - ۴	۱۰۰ - ۲
۱۶ - ۴	۳۳ - ۲	۵۰ - ۱	۶۷ - ۱	۸۴ - ۴	
۱۷ - ۲	۳۴ - ۲	۵۱ - ۱	۶۸ - ۴	۸۵ - ۲	