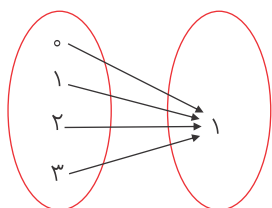


۱ کدام یک از روابط زیر تابع است؟ (مشخص کنید)

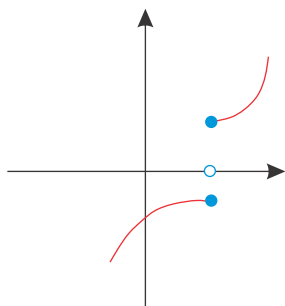
الف

$$\{(-۱, ۰), (۱, ۲), (۰, ۲), (-۲, ۰)\}$$

ب

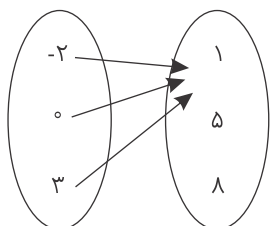


پ



۲ کدام یک تابع است؟ در صورت تابع بودن دامنه و برد را مشخص کنید.

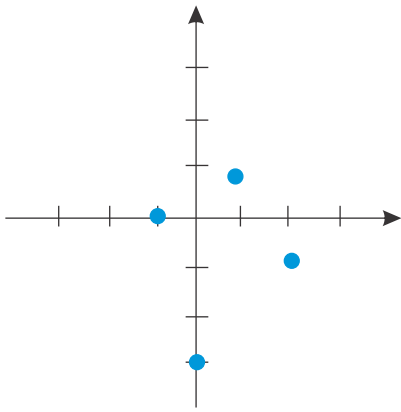
الف



$$f : \{(۰, ۴), (-۱, ۳), (۲, ۶), (-۱, ۴)\}$$

ب

پ

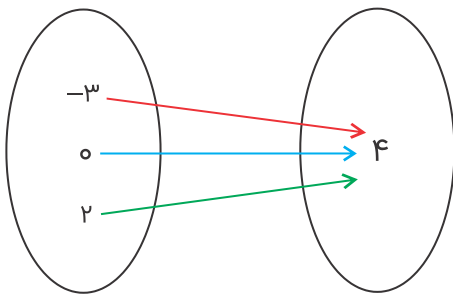


۳ کدام یک از روابط و نمودارهای زیر تابع است؟ در صورت تابع بودن دامنه و برد آن را بنویسید.

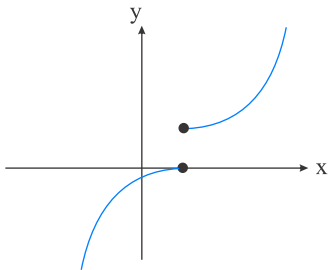
الف

$$f : \{ (3, 1), (-1, 0), (2, 4), (\sqrt{9}, 1) \}$$

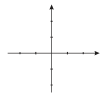
ب



پ



۴ اگر $f : \{ (1, a+b), (0, 3), (1, 2), (0, a-1) \}$ تابع باشد، a و b را بیابید.

جدول	زوج مرتب	نمودار پیکانی	توصیفی	نمودار مختصاتی
$\begin{array}{c c} x & y \\ \hline 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{array}$				

۶ اگر $f : \{(0, 4), (1, m+n), (0, 2n), (1, 2m)\}$ تابع باشد، m و n را بیابید.

۷ مقدار a و b را طوری بیابید که رابطه زیر یک تابع باشد.

$$f = \{(a, 3b), (4, 9), (-2, 1), (4, 1+a^3), (2, b+1)\}$$

۸ به ازای کدام مقدار p ، رابطه $\{(p-1, p+1), (p^2, p+1), (p, 2p)\}$ تابع نیست؟

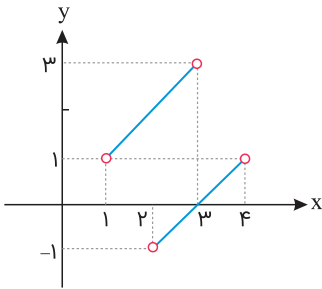
۹ اگر $\{(1, 3), (2, -3), (1, a-2), (3, a)\}$ یک تابع باشد، مقدار a را به دست آورید.

۱۰ a و b را طوری بیابید که رابطه داده شده تابع باشد.

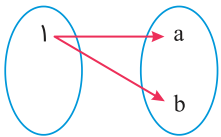
$$R = \{(1, a^2), (2, 3), (a, -1), (1, a+2), (2, b-1)\}$$

کدامیک از موارد زیر نمایانگر یک تابع است؟ دامنه و برد آن را مشخص کنید.

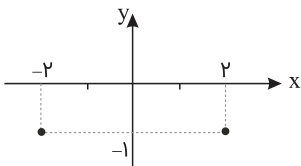
۱۱



۱۲



۱۳



۱۴ اگر $f = \{(4, 5), (5, 8), (8, 10)\}$ و $g = \{(2, 3), (3, 6), (7, 9)\}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ $\frac{f(4) + g(3)}{f(5) - g(7)}$

۱۵ اگر $f : \{(0, 2), (0, 2x - y), (1, 3), (1, x + y)\}$ یک تابع باشد، x و y را بیابید.

۱۶ اگر $f : \{(2, 2m - n), (1, 4), (2, 2), (1, 2n + 2)\}$ یک تابع باشد، $m^2 + n^2$ را بیابید.

۱۷ کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟ (با ذکر دلیل یا مثال مناسب)

الف رابطه‌ای که به هر عدد مثبت، ریشه چهارم آن عدد را نسبت می‌دهد.

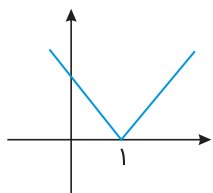
ب رابطه‌ای که به هر عدد مثبت، جذر آن عدد را نسبت می‌دهد.

۱۸ مقدار m را طوری بیابید که f تابع باشد.

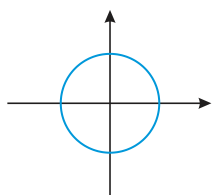
$$f = \{(-1, 3), (-2, 4), (-1, 2m + 1), (1, 3)\}$$

۱۹ کدام یک از شکل‌های زیر، یک تابع است؟

الف



ب



۲۰ دو مجموعه A و B که در آن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{2, 4, 8\}$ را در نظر بگیرید. نمودار پیکانی از مجموعه A به B رسم کنید، به طوری که نمایش یک تابع باشد.

۲۱ اگر $\{(3, a - 1), (5, 3), (3, 5)\}$ یک تابع باشد، در این صورت a را مشخص کنید.

۲۲ اگر داشته باشیم $g = \{(3, 1), (2, -1), (-1, 2), (1, 2)\}$ ، آنگاه مقدار $\frac{g(2)}{g(g(3))}$ را بیابید.

الف در رابطه زیر در جاهای خالی طوری عدد بگذارید که f تابع شود.

$$f = \{(4, 8), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 3), (\sqrt{16}, \square), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \square)\}$$

ب در رابطه زیر در جای خالی طوری عدد بگذارید که g تابع نشود.

$$g = \{(2, \frac{3}{y}), (5, 8), (\square, 10), (\sqrt{25}, 2^3)\}$$

۲۴ اگر دو زوج مرتب $(4x - 2, 5y + 7)$ و $(3x + 1, 8y - 3)$ باهم مساوی باشند، مقادیر x و y را به دست آورید.

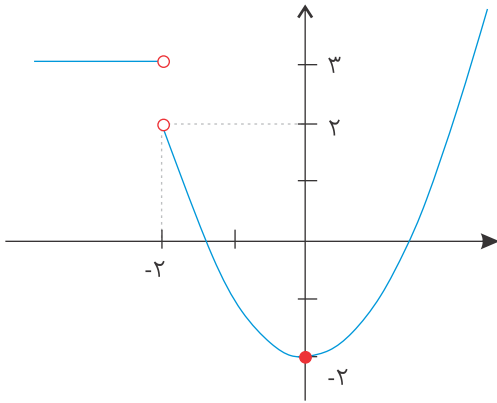
۲۵ برای تابع $y = x^2 + \sqrt{x}$ با دامنه $A : \{0, 1, 4\}$ اعضای برد را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

۲۶ دامنه تابع زیر را باتوجه به اعضای برد به دست آورید.

$$\begin{cases} f : A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{1}{x-2} \end{cases} \quad R_f : \{1, -2\}$$

۲۷ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

۲۸ دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.



۲۹ اگر در تابع $f: A \rightarrow B$ دامنه تابع $A = \{0, 1, 3\}$ باشد، برد تابع را بیابید.

۳۰ اگر $f: A \rightarrow B$ و دامنه تابع $A = \{0, 1, 2\}$ باشد:

الف برد تابع را بیابید.

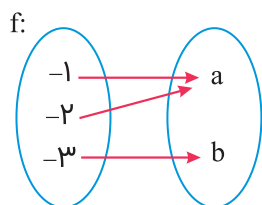
ب نمودار و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

۳۱ اگر $f: A \rightarrow B$ و برد تابع $B = \{-2, -5, -8\}$ باشد، دامنه تابع را به دست آورید.

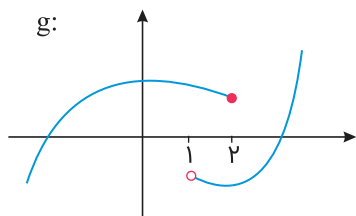
۳۲ اگر $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ و $g = \{(0, 2), (-1, 4), (1, 3)\}$ ، حاصل $f(2) \times g(-1)$ چقدر است؟

در هر مورد مشخص کنید آیا رابطه داده شده تابع است یا خیر؟ سپس دامنه و برد توابع را مشخص کنید.

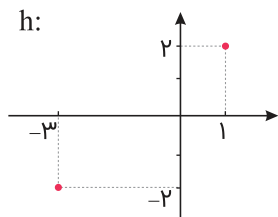
الف



ب



پ



ت

$$k : \{(1, -4), (2, -6), (-3, 3), (1, (-2)^2)\}$$

باتوجه به ضابطه تابع، برد تابع را مشخص کنید.

$$f : A \rightarrow B$$

$$f(x) = x^2 + 3, \quad A = \{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\}$$

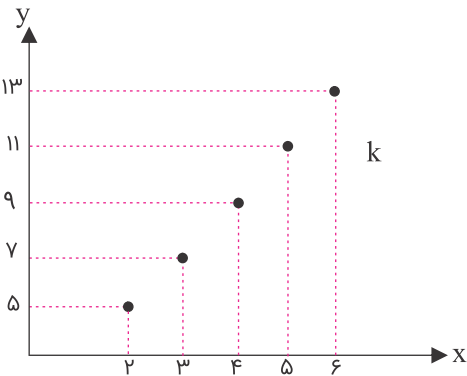
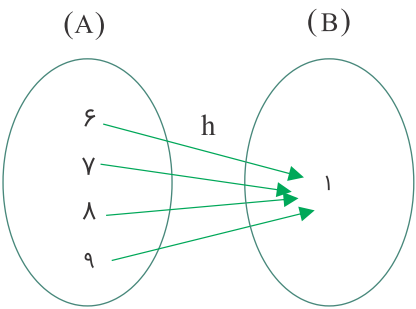
برای هریک از توابع زیر یک ضابطه (فرمول) مناسب بنویسید.

الف

$$f = \{(6, 3), (7, 4), (8, 5), (9, 6)\}$$

g:

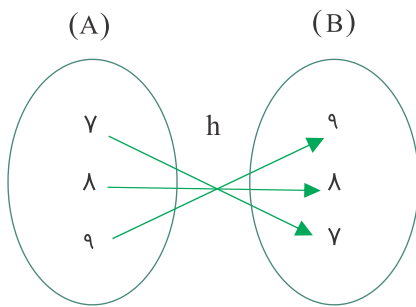
x	۰	۱	۲	۳
y	۵	۶	۹	۱۴



f:

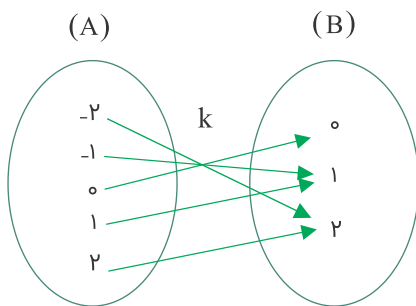
x	۱	۲	۳	۴
y	۱۰۰	۵۰	$\frac{۱۰۰}{۳}$	۲۵

$g = \{(۰, ۰), (۱, ۱), (۲, ۸), (۳, ۲۷)\}$

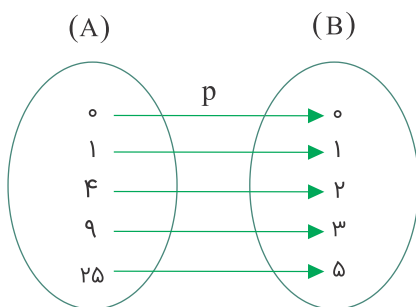


$$f = \{(1, -1), (2, -4), (3, -9), (4, -16)\}$$

ح



خ



د

۳۶ اگر $f : A \rightarrow B$ یک تابع باشد و دامنه این تابع $A : \{0, 1, -1\}$ باشد، برد تابع را بیابید.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

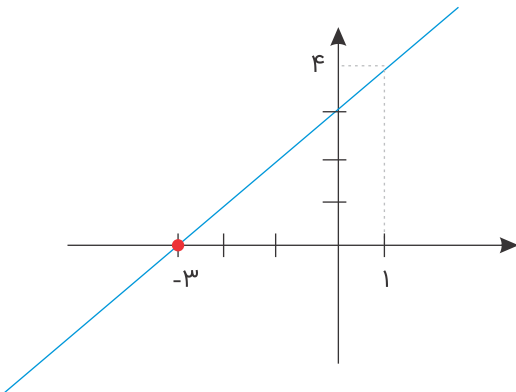
۳۷ اگر تابع خطی f از نقاط $(2, 0)$ و $(4, 4)$ عبور کند، معادله خط f را بنویسید و $f(3)$ را بیابید.

۳۸ در یک تابع خطی $f(0) = 7$ و $f(2) = 11$ ، مقدار $f(5)$ چندبرابر $f(-1)$ است؟

۳۹ اگر تابع خطی f از نقطه $(1, 4)$ عبور کند و $f(0) = 6$ باشد، معادله خط را بیابید.

۴۰ ضابطه تابع خطی که از دو نقطه $A(0, 4)$ و $B(2, 8)$ می‌گذرد را به دست آورید.

۴۱ اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، مقدار $f(6) - f(-6)$ را به دست آورید.



۴۲ اگر در یک تابع خطی داشته باشیم $f(-3) = 1$ و شیب این تابع -2 باشد، ضابطه تابع را به دست آورید.

۴۳ در تابع خطی f داریم: $f(2) = 3$ و $f(0) = 1$. ابتدا معادله خط را بنویسید، سپس $f(3)$ را پیدا کنید.

۴۴ اگر برد تابع خطی $f(x) = -5x + 3$ به صورت $(-32, 13]$ باشد، دامنه آن را به دست آورید.

۴۵ در تابع خطی داریم: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$ ؛ مقدار $f(5)$ را به دست آورید.

۴۶ برای یک تابع خطی می‌دانیم که $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

۴۷ در یک شرکت تولیدی ماهانه x واحد کالا هریک به قیمت ۶۰ دلار بفروش می‌رسد. اگر تابع هزینه شرکت $c(x) = 40x + 100$ باشد، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف تابع سود را تشکیل دهید.

ب نقطهٔ سربه‌سر را بیابید.

۴۸ یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = 2000 + 50x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را ۹۰ تومان می‌فروشد.

الف تابع سود را تعیین کنید.

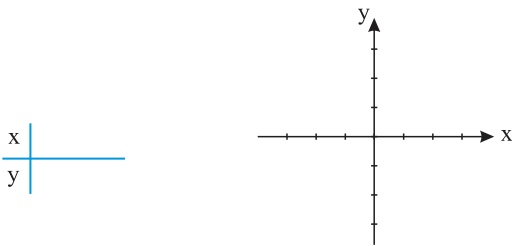
ب این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟

۴۹ سهمی $y = -x^2 + 4x - 4$ را رسم کنید و سپس رأس سهمی و معادله خط تقارن آن را مشخص کنید.

۵۰ رأس سهمی $y = x^2 - 2x + 2$ را به دست آورده و نمودار آن را رسم کنید.

۵۱ تابع $f(x) = (x - 1)^2 + 3$ را به کمک انتقال رسم کنید. (تمام مراحل رسم شود.)

۵۲ ابتدا رأس سهمی $y = -x^2 - 2x + 1$ را مشخص کرده سپس با کمک آن جدول را کامل و نمودار را رسم کنید:



۵۳ رأس سهمی به معادله $y = 2(x + 2)^2 + 1$ را مشخص کرده و سپس به کمک آن، نمودار سهمی را رسم کنید.

۵۴ نمودار سهمی $y = x^2 - 7x - 8$ محور x ها را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

۵۵ اگر تابع درآمد به صورت $y = \frac{-1}{4}x^2 + 30x$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 80$ باشد، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف تابع سود را بیابید.

ب بیشترین میزان سود به ازای چه تعداد تولید حاصل می‌شود؟

۵۶ اگر تابع درآمد شرکتی به صورت $y = \frac{-1}{4}x^2 + 28x$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 20$ باشد، ماکزیمم مقدار سود شرکت را به دست آورید.

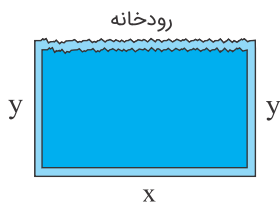
۵۷ اگر بین x و y رابطه $2x + y = 60$ برقرار باشد، ماکزیمم حاصل ضرب x و y را به دست آورید.

۵۸ نمودار سهمی $y = 5x^2 - 12x + 6$ محور عرض‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۵۹ اگر $4x + a = 100$ باشد، x و a را طوری بیابید که عبارت $y = xa$ ماکزیمم شود. سپس بیشترین مقدار xa را به دست آورید.

۶۰

یک طناب به طول ۸۰ متر در اختیار داریم. می‌خواهیم به کمک آن اطراف یک رودخانه را از ۳ طرف محصور کنیم (به شکل مستطیل). بیشترین مساحت این مستطیل چند متر مربع است؟



۶۱

در مستطیل‌هایی با محیط ۸۰ متر، بیشترین مقدار مساحت چقدر است؟

۶۲

در یک کارخانه تولید لامپ، قیمت فروش هر لامپ ۴۰۰ تومان است. اگر هر روز x لامپ تولید شود و تابع هزینه به صورت $C(x) = x^2 + 200x + 300$ باشد:

الف

تابع سود این کارخانه را بنویسید.

ب

چند لامپ در روز باید تولید شود تا کارخانه بیشترین سود را داشته باشد؟

پ

بیشترین سود روزانه این کارخانه چقدر است؟



۱ الف تابع است.

ب تابع است.

پ تابع نیست.

۲ الف تابع است.

$$D : \{-2, 0, 3\} \quad , \quad R : \{1, 5\}$$

ب تابع نیست.

پ تابع است $D : \{-1, 0, 1, 2\} \quad , \quad R : \{-3, -1, 0, 1\}$

۳ الف تابع است.

$$R_f : \{1, 0, 4\} \quad D_f : \{3, -1, 2\}$$

ب تابع است.

$$R_f : \{4\} \quad D_f : \{-3, 0, 2\}$$

پ تابع نیست.

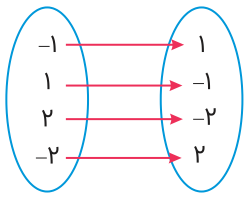
$$a - 1 = 3 \Rightarrow a = 4$$

$$a + b = 2 \Rightarrow 4 + b = 2 \Rightarrow b = -2$$

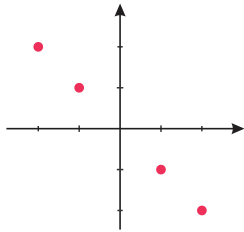
۴

$$\{(-1, 1), (1, -1), (-2, 2), (2, -2)\}$$

نمودار پیکانی:



توصیفی: f تابعی است که به هر عضو از مجموعه $A = \{1, -1, 2, -2\}$ ، قرینه آن را نسبت می‌دهد.
نمودار مختصاتی:



$$2n = 4 \Rightarrow n = 2$$

$$m + n = 2m \Rightarrow m + 2 = 2m \Rightarrow m = 2$$

$$1 + a^3 = 9 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$3b = b + 1 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$p = \circ \text{ اگر } \Rightarrow \{(-1, 1), (\circ, 1), (\circ, \circ)\} \Rightarrow \text{تابع نیست}$$

$$a - 2 = 3 \Rightarrow a = 3 + 2 = 5$$

$$\{(1, 3), (2, -3), (3, 5)\}$$

$$a^2 = a + 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = \circ \Rightarrow (a + 1)(a - 2) = \circ$$

$$\begin{aligned} a + 1 = \circ &\Rightarrow a = -1 \quad \text{ق ق} \\ \Rightarrow a - 2 = \circ &\Rightarrow a = 2 \quad \text{غ ق ق} \end{aligned}$$

$$b - 1 = 3 \Rightarrow b = 4$$

اگر $a = 2$ باشد، $(2, -1)$ و $(2, 3)$ را داریم که در این صورت R تابع نمی‌باشد.

پاسخ سؤالات ۱۱ تا ۱۳

تابع نیست.

تابع نیست.

$$\Rightarrow D = \{-2, 2\} \quad R = \{-1\}$$

$$f(4) = 5, \quad g(3) = 6, \quad f(5) = 8, \quad g(7) = 9$$

$$\text{جواب} = \frac{5+6}{8-9} = \frac{11}{-1} = -11$$

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} + y = 3 \Rightarrow y = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$2n + 2 = 4 \Rightarrow 2n = 2 \Rightarrow n = 1$$

$$2m - n = 2 \Rightarrow 2m - 1 = 2 \Rightarrow 2m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$m^2 + n^2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

۱۷ الف تابع نیست؛ زیرا مثلاً عدد ۱۶ دو ریشهٔ چهارم دارد: $+2$ و -2

$$16 \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

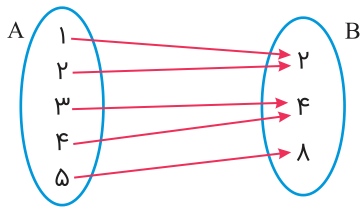
ب تابع است؛ زیرا هر عدد مثبت یک و فقط یک جذر دارد.

$$f = \{(-1, 3), (-2, 4), (-1, 2m+1), (1, 3)\}$$

$$2m + 1 = 3 \Rightarrow 2m = 3 - 1 = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{2} = 1$$

۱۹ الف تابع است.

ب تابع نیست.



$$a - ۱ = ۵ \Rightarrow a = ۶$$

$$g(۳) = ۱ \Rightarrow g(g(۳)) = g(۱) = ۲ \Rightarrow \frac{g(۲)}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

$$f = \{(\underline{(۴, ۸)}, \underline{(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, ۳)}), (\sqrt{۱۶}, \overbrace{\square}^{\text{فقط ۸}}), (\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \overbrace{\square}^{\text{فقط ۳}})\}$$

در هر زوج مرتبی که عضوهای اولشان مساوی است، عضوهای دوم باید مساوی باشند.

$$g = \{(\underline{(۲, \frac{۳}{۷})}, \underline{(\underline{۵}, ۸)}), (\overbrace{\square}^{\text{فقط باید ۲ یا ۵ باشد}}, ۱۰), \underline{(\underline{۵}, ۸)}\}$$

این دو زوج $(۵, ۸)$ تکراری اند و می‌توانیم یکی را حذف کنیم.

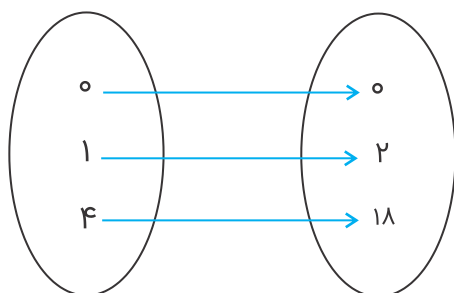
$$(۴x - ۲, ۵y + ۷) = (۳x + ۱, ۸y - ۳)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴x - ۲ = ۳x + ۱ \Rightarrow ۴x - ۳x = ۱ + ۲ \Rightarrow x = ۳ \\ ۵y + ۷ = ۸y - ۳ \Rightarrow ۵y - ۸y = -۳ - ۷ \Rightarrow -۳y = -۱۰ \Rightarrow y = \frac{۱۰}{۳} \end{cases}$$

$$y = x^2 + \sqrt{x} \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f(1) = 2$$

$$f(4) = 16 + 2 = 18$$



$$\frac{1}{x-2} = 1 \Rightarrow x-2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$\frac{1}{x-2} = -2 \Rightarrow -2x + 4 = 1 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$D_f : \left\{ \frac{3}{2}, 3 \right\}$$

$$f = \{(2, 4), (3, 5), (-1, 9)\}, g = \{(3, 4), (2, 9), (-1, 5)\}$$

$$D_f = D_g = \{2, 3, -1\}, R_f = R_g = \{4, 9, 5\}$$

دامنه و برد f و g برابرند، ولی توابع f و g هیچ زوج مرتب مشترکی ندارند. بی‌شمار توابع f و g با شرایط گفته‌شده می‌توان نوشت.

$$\text{برد} : R = [-2, +\infty), \text{ دامنه} : D : \mathbb{R} - \{-2\}$$

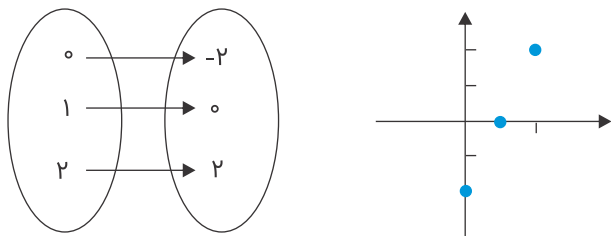
$$f(0) = \frac{0}{1} = 0, \quad f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad f(3) = \frac{9}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow R : \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{9}{4} \right\}$$

$$f(0) = -2, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 2$$

بنابراین برد برابر است با: $\{-2, 0, 2\}$

ب



۳۱

$$3x + 1 = -2 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$$

$$3x + 1 = -5 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$$

$$3x + 1 = -8 \Rightarrow 3x = -9 \Rightarrow x = -3$$

دامنه : $\{-1, -1, -3\}$

۳۲

$$\begin{cases} f(2) = \frac{4+2}{2-1} = 6 \\ g(-1) = 4 \end{cases} \Rightarrow f(2) \times g(-1) = 6 \times 4 = 24$$

۳۳

تابع است.

الف

$$D_f = \{1, -2, -3\} \quad , \quad R_f = \{a, b\}$$

ب

تابع نیست.

پ

h تابع است.

$$D_h = \{-3, 1\} \quad , \quad R_h = \{-2, 2\}$$

ت

k تابع نیست.

۳۴

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4 \quad , \quad x = 0 \Rightarrow f(0) = 3$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4} \quad , \quad x = 1 \Rightarrow f(1) = 4$$

$$R = \{4, 3, \frac{13}{4}\}$$

۳۵

از تمام عضوهای اول زوج مرتب‌ها عدد ۳ کم شده تا عضوهای دومشان به دست آید، لذا:

$$f(x) = x - 3$$

البته همیشه وقتی ضابطه تابعی را می‌نویسیم، باید دامنه‌اش را هم در کنار آن مشخص کنیم، پس بهتر است که چنین بنویسیم:

$$f(x) = x - 3, \quad \widehat{D_f}^{\text{دامنه } f} = \{6, 7, 8, 9\}$$

در تمام ستون‌ها عدد بالایی به توان ۲ رسیده، سپس با عدد ۵ جمع شده و عدد پایینی به دست آمده؛ مثلاً در ستون آخر داریم:

$$\underbrace{3^2}_{\text{عدد بالایی}} + 5 = 14 \Rightarrow \text{عدد پایینی}$$

لذا خواهیم داشت:

$$g(x) = x^2 + 5, \quad D_g = \{0, 1, 2, 3\}$$

عضوهای اول، بدون توجه به مقدارشان همگی به عدد ۱ نسبت داده شده‌اند لذا ضابطه تابع $h(x) = 1$ با دامنه $D_h = \{6, 7, 8, 9\}$ خواهد بود. به اینگونه توابع که y فقط یک عدد مشخص می‌باشد، توابع ثابت می‌گوییم.

با نگاهی به طول و عرض نقاط داده‌شده می‌فهمیم که طول هر نقطه ابتدا در عدد ۲ و ضرب سپس با عدد ۱ جمع شده؛ لذا خواهیم نوشت:

$$k(x) = 2x + 1, \quad D_k = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

در نگاه اول حدس زدن ضابطه مناسب برای این جدول کمی دور از ذهن است ولی اگر کمی بیشتر پس دقت کنید در ردیف پایین عدد ۱۰۰ دو بار مشاهده می‌شود پس حدس می‌زنیم که ۱۰۰ نقش کلیدی در فرمول این تابع دارد. باز هم اگر کمی فکر کنیم می‌فهمیم در هر ستون عدد ۱۰۰ بر عدد بالایی تقسیم شده و عدد پایینی به دست آمده؛ مثلاً در ستون آخر:

$$\frac{100}{\underbrace{4}_{\text{عدد بالایی (x)}}} = \underbrace{25}_{\text{عدد پایینی (y)}}$$

لذا ضابطه f برابر است با:

$$f(x) = \frac{100}{x}, \quad D_f = \{1, 2, 3, 4\}$$

از زوج‌های $(0, 0)$ و $(1, 1)$ نتیجه مطلوبی نمی‌توان گرفت، ولی با دقت در زوج‌های $(2, 8)$ و $(3, 27)$ می‌توان اینطور برداشت کرد که عضوهای اول به توان ۳ رسیده‌اند و عضوهای دوم به دست آمده‌اند. بنابراین:

$$g(x) = x^3, \quad D_g = \{0, 1, 2, 3\}$$

هر عدد از مجموعه A به خود همان عدد در مجموعه B نسبت داده شده، لذا ضابطه $h(x) = x$ خواهد بود (به این گونه توابع، همانی می‌گوییم). دامنه h هم برابر است با:

$$D_h = \{7, 8, 9\}$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که عضوهای اول ابتدا به توان ۲ رسیده‌اند سپس یک علامت منفی به آن‌ها داده شده تا عضوهای دوم به دست آیند. مثلاً در زوج مرتب $(4, -16)$ ، عدد ۴ ابتدا به توان ۲ رسیده که جواب آن می‌شود ۱۶، سپس پشت آن، یک منفی گذاشته شده تا ۱۶- حاصل شود. لذا:

$$f(x) = -x^2, D_f = \{1, 2, 3, 4\}$$

اعداد مثبت و صفر در مجموعه A به خودشان در مجموعه B وصل شده‌اند (نسبت داده شده‌اند)، ولی عدد ۲- به ۲+ و عدد ۱- به ۱+ وصل شده یعنی علامت (-) آن‌ها به علامت (+) تبدیل شده؛ به عبارت دیگر می‌توان گفت از تمام اعداد مجموعه A قدر مطلق گرفته شده، لذا:

$$k(x) = |x|, D_k = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

باز هم $(0, 0)$ و $(1, 1)$ مناسب نیستند. به زوج‌های $(4, 2)$ و $(9, 3)$ و $(25, 5)$ دقت کنید. عدد ۴ به ۲ تبدیل شده، شاید بگویید $\frac{4}{2} = 2$ یا $\frac{9}{3} = 3$ یا $\frac{25}{5} = 5$ ولی کدام عملیات درست است؟ آیا $\frac{9}{3}$ هم برابر ۳ می‌شود؟ آیا $9 - 2$ هم برابر ۳ می‌شود؟ پس می‌فهمیم از رادیکال باید استفاده کنیم زیرا $\sqrt{9} = 3$ و همچنین $\sqrt{25} = 5$. دقت کنید که یک قانون یا الگو باید برای تمام زوج مرتب‌ها درست باشد. لذا ضابطه p برابر است با:

$$p(x) = \sqrt{x}, D_p = \{0, 1, 4, 9, 25\}$$

$$f(0) : \frac{2(0)}{0+1} = 0$$

$$f(1) : \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow R : \{-1, 0, 1\}$$

$$f(-1) : \frac{-2}{1} = -2$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{4 - 0}{4 - 2} = 2$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4$$

$$f(3) = 2(3) - 4 = 2$$

$$f(o) = ۷$$

$$f(x) = ax + b \xrightarrow{x=o} f(o) = a(o) + b \Rightarrow b = ۷$$

$$f(۲) = ۱۱ \Rightarrow ۲a + b = ۱۱ \Rightarrow ۲a + ۷ = ۱۱ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

$$\frac{f(\delta)}{f(-۱)} = ?$$

$$f(x) = ۲x + ۷ \Rightarrow \begin{cases} f(\delta) = ۱۷ \\ f(-۱) = \delta \end{cases}$$

$$\frac{f(\delta)}{f(-۱)} = \frac{۱۷}{\delta}$$

$$m = \frac{\epsilon - ۴}{o - ۱} = -۲$$

$$y - y_o = m(x - x_o) \Rightarrow y - \epsilon = -۲(x - o) \Rightarrow y = -۲x + \epsilon$$

$$m = \frac{\lambda - ۴}{۲ - o} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

$$y - y_o = m(x - x_o) \Rightarrow y - ۴ = ۲(x - o) \Rightarrow y = ۲x + ۴$$

$$A \begin{vmatrix} ۱ \\ ۴ \end{vmatrix} B \begin{vmatrix} -۳ \\ o \end{vmatrix} \quad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{o - ۴}{-۳ - ۱} = ۱$$

$$y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - o = ۱(x + ۳) \Rightarrow y = x + ۳ \Rightarrow f(x) = x + ۳$$

$$\left. \begin{aligned} f(\epsilon) &= \epsilon + ۳ = ۹ \\ f(-\epsilon) &= -\epsilon + ۳ = -۳ \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(\epsilon) - f(-\epsilon) = ۹ + ۳ = ۱۲$$

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \text{شیب} = a = -۲ \\ \Rightarrow f(x) = -۲x + b$$

ازطرفی:

$$f(-۳) = ۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} f(-۳) = -۲(-۳) + b \Rightarrow ۱ = \epsilon + b$$

$$\Rightarrow b = -\epsilon + ۱ = -\delta$$

$$f(x) = -۲x - \delta$$

۴۳

$$(۲, ۳), (۰, ۱) \Rightarrow m = \frac{۳-۱}{۲-۰} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

$$y - ۱ = ۱(x - ۰) \Rightarrow y - x - ۱ = ۰ \\ \Rightarrow f(x) = x + ۱ \Rightarrow f(۳) = ۳ + ۱ = ۴$$

۴۴

$$\left. \begin{array}{l} -۳۲ = -۵x + ۳ \Rightarrow x = ۷ \\ ۱۳ = -۵x + ۳ \Rightarrow x = -۲ \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = (-۲, ۷]$$

۴۵

$$f(x) = ax + b$$

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱۱ \end{bmatrix}} ۲a + b = ۱۱ \xrightarrow{b=۷} ۲a + ۷ = ۱۱ \Rightarrow a = ۲$$

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} ۰ \\ ۷ \end{bmatrix}} ۰ + b = ۷ \Rightarrow b = ۷$$

ضابطه تابع: $f(x) = ۲x + ۷$

$$f(۵) = ۲(۵) + ۷ = ۱۷$$

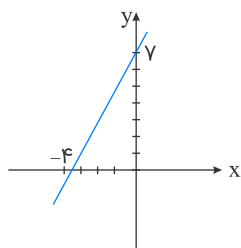
۴۶

$$f(x) = ax + b$$

$$f(۰) = ۷ \Rightarrow b = ۷$$

$$f(۲) = ۱۱ \Rightarrow ۲a + b = ۱۱ \Rightarrow ۲a + ۷ = ۱۱ \Rightarrow a = ۲$$

$$f(x) = ۲x + ۷ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ y = ۷ \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{-۷}{۲} \\ y = ۰ \end{cases}$$



۴۷ الف

$$\text{درآمد} = ۶۰x \Rightarrow \text{هزینه} = ۴۰x + ۱۰۰$$

$$۶۰x - (۴۰x + ۱۰۰) \Rightarrow \text{تابع سود} = ۶۰x - ۴۰x - ۱۰۰$$

$$\text{تابع سود} = ۲۰x - ۱۰۰$$

ب

$$۲۰x - ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow ۲۰x = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۵$$

هزینه - درآمد = سود

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$\Rightarrow R(x) = \text{قیمت} \times \text{تعداد جنس} = x \times 90 = 90x$$

$$P(x) = 90x - (2000 + 50x) = 90x - 2000 - 50x = 40x - 2000$$

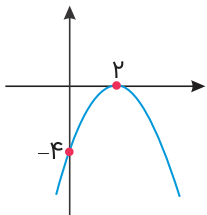
$$\xrightarrow{\text{سود صفر}} P(x) = 0 \Rightarrow 40x - 2000 = 0$$

$$\Rightarrow 40x = 2000 \Rightarrow x = \frac{2000}{40} = 50$$

ب

پس حداقل باید یکی بیشتر یعنی ۵۱ عدد بفروشد تا سوددهی آغاز شود.

۴۹



$$y = -x^2 + 4x - 4 = -(x - 2)^2$$

مختصات رأس: (2, 0)

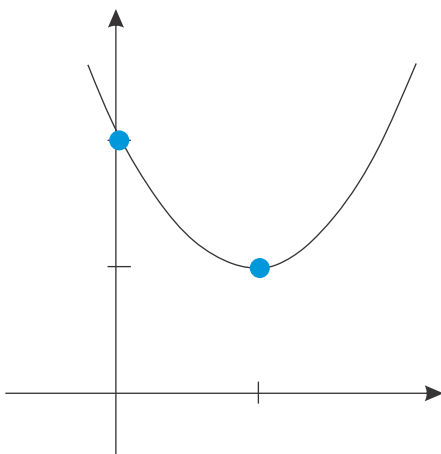
معادله محور تقارن: $x = 2$

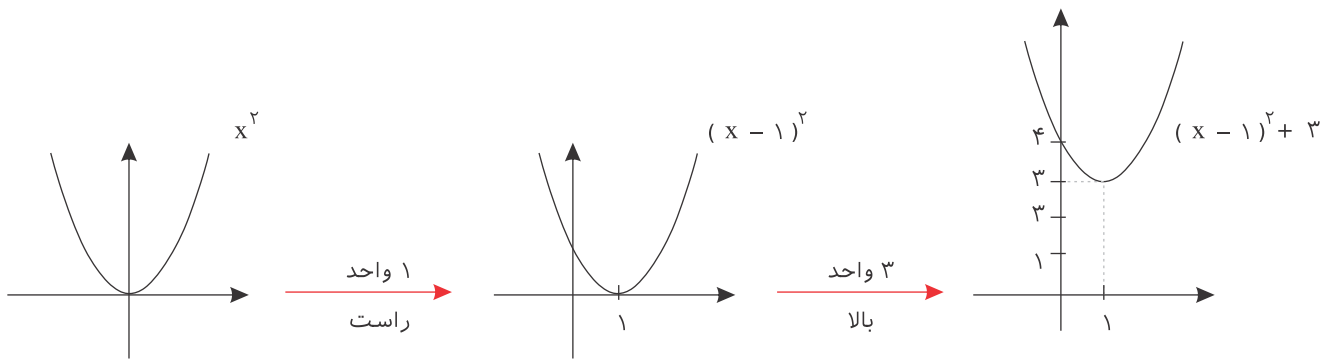
۵۰

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y = 1 - 2 + 2 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow \text{رأس} = (1, 1)$$

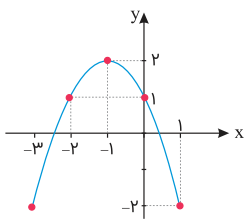
$$x = 0 \Rightarrow y = 2$$





$$y = -x^2 - 2x + 1$$

$$S_{\text{رأس}} : \begin{cases} x_{\text{max}} = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(-1)} = -1 \\ y_{\text{max}} = f(x_{\text{max}}) = -(-1)^2 - 2(-1) + 1 = -1 + 2 + 1 = 2 \end{cases}$$

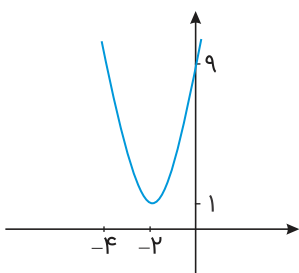


x	-3	-2	-1	0	1
y	-3	1	2	1	-2

$$y = 2(x + 2)^2 + 1 = 2(x^2 + 4x + 4) + 1 = 2x^2 + 8x + 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2 \times 2} = -2 \\ y_{\text{رأس}} = f(-2) = 1 \end{cases}$$

x	-4	-3	-2	-1	0
y	9	3	1	3	9



برای یافتن محل برخورد هر نموداری با محور x ها در فرمول تابع موردنظر به جای y عدد صفر را قرار می‌دهیم و معادله حاصل را حل می‌کنیم:

$$y = x^2 - 7x - 8 \xrightarrow{y=0} x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x - 8)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow A(8, 0) \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow B(-1, 0) \end{cases}$$

$$\text{سود} = \frac{-1}{4}x^2 + 30x - (18x + 80) = \frac{-1}{4}x^2 + 12x - 80$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-12}{\frac{-1}{2}} = 24$$

به ازای ۲۴ تولید سود ماکزیمم می‌شود.

$$\text{سود : } P = R - C = \frac{-1}{4}x^2 + 28x - 18x - 20$$

$$\Rightarrow P = \frac{-1}{4}x^2 + 10x - 20 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-10}{2(-\frac{1}{4})} = 10 \text{ تعداد کالاها}$$

$$P = -\frac{1}{4}x^2 + 10x - 20 \xrightarrow{x=10} P_{\max} = \frac{-1}{4} \times 10^2 + 10(10) - 20$$

$$= (-\frac{1}{4} \times 10 \times 10) + 100 - 20 = -50 + 100 - 20 = 30 \text{ بیشترین سود}$$

$$2x + y = 60 \Rightarrow y = -2x + 60 \text{ رابطه فرعی}$$

$$\text{عبارت اصلی} = xy = x(-2x + 60) = -2x^2 + 60x \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$= \frac{-60}{2(-2)} = \frac{60}{4} = 15 \xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه فرعی}} y = -2(15) + 60 = 30$$

$$xy \text{ ماکزیمم} = 15 \times 30 = 450$$

برای یافتن محل برخورد هر نموداری با محور y ها در فرمول تابع موردنظر به جای تمام x ها عدد صفر را قرار می‌دهیم. لذا:

$$y = 5x^2 - 12x + 6 \xrightarrow{x=0} y = 6 \Rightarrow A(0, 6) \text{ نقطه برخورد}$$

رابطه فرعی $4x + a = 100$ را به سمت راست $\rightarrow a = -4x + 100$ می‌بریم چون a ضریب یک دارد

$$(عبارت اصلی) y = xa = x(-4x + 100) = -4x^2 + 100x$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{-100}{2(-4)} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$$

در رابطه فرعی ضرب می‌کنیم $\rightarrow a = -4\left(\frac{25}{2}\right) + 100 = -50 + 100 = 50$

$$xa \text{ بیشترین مقدار} = \frac{25}{2} \times 50 = 625$$

باید دقت کنید که مستطیل موردنظر فقط دارای یک طول و دو عرض می‌باشد چون یک طرف مستطیل، رودخانه است، پس از فرمول $[محیط مستطیل = 2(x + y)]$ نمی‌توانیم استفاده کنیم.

$$\text{طول طناب} = محیط شکل = 80 \Rightarrow y + x + y = 80$$

$$\Rightarrow x + 2y = 80 \Rightarrow x = -2y + 80 \text{ رابطه فرعی}$$

$$(عبارت اصلی) مساحت = xy = (-2y + 80)y = -2y^2 + 80y$$

$$\Rightarrow y = -\frac{b}{2a} = \frac{-80}{2(-2)} = 20 \xrightarrow{\text{در رابطه فرعی قرار می‌دهیم}} x = -2(20) + 80 = 40$$

$$\text{بیشترین مساحت} = xy = 40 \times 20 = 800$$

اگر طول و عرض این مستطیل‌ها را x و y بنامیم، خواهیم نوشت:

$$\text{محیط مستطیل} = 80 \Rightarrow 2(x + y) = 80$$

$$\Rightarrow x + y = 40 \Rightarrow y = -x + 40 \text{ رابطه فرعی}$$

$$(عبارت اصلی) مساحت = xy = x(-x + 40) = -x^2 + 40x$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{-40}{2(-1)} = 20$$

$$\xrightarrow{\text{در رابطه فرعی قرار می‌دهیم}} y = -20 + 40 = 20$$

$$\text{بیشترین مساحت} = xy = 20 \times 20 = 400$$

تذکر: اگر این سؤال تستی بود، به کمک روش نصف کردن آن را در ۳۰ ثانیه حل می‌کردیم ولی در مدارس، معمولاً مجاز به استفاده از اینگونه روش‌ها نیستیم.

همه جا دقت کنید که p کوچک قیمت هر کالا است ولی P بزرگ بیانگر سود می باشد. البته P با $P(x)$ هیچ فرقی ندارد یا مثلاً $R(x)$ و $C(x)$ با R و C هیچ تفاوتی ندارد.

$$\text{تابع درآمد : } R = xp = x \times 400 = 400x$$

$$\text{تابع هزینه : } C = x^2 + 200x + 300$$

$$\text{تابع سود : } P = R - C = 400x - x^2 - 200x - 300 = -x^2 + 200x - 300$$

$$P = -x^2 + 200x - 300 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{2(-1)} = 100 \text{ تعداد لامپها در روز}$$

$$P = -x^2 + 200x - 300 \xrightarrow{x=100} P_{\max} = -100^2 + 200(100) - 300$$

$$= -\underbrace{100 \times 100}_{-10000} + 20000 - 300 = 9700$$

پس بیشترین سود کارخانه ۹۷۰۰ تومان است.