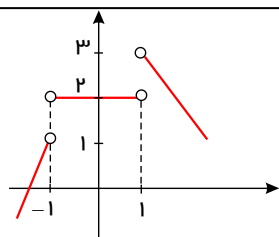


نوید پورزکی



۱- با توجه به شکل مقابل حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ کدام است؟

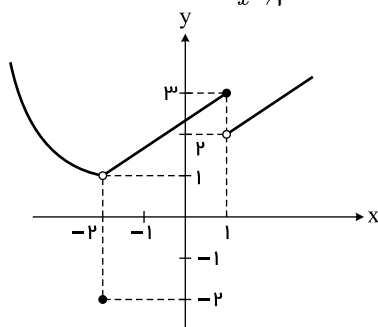
۲ (۷)

۱ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

۲- نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل عبارت $A = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow -2} f(x) - f(-2)$ کدام است؟



۷ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۴ (۴)

۳- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$ می باشد حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 1^-$ کدام است؟

$f(3)$ (۴)

$f(1)$ (۳)

$f(2)$ (۲)

$f(0)$ (۱)

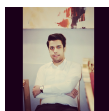
۴- اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ مقدار a کدام است؟

-۱ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)



۵- کدام گزینه در مورد تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ غلط است؟

④ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود ندارد

③ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

② $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$

① $f(2) = 0$

۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟

④ $-\infty$

③ $+\infty$

② -1

① 0^+

۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} [\cot^2 x]$ کدام است؟

④ وجود ندارد

③ 2

② 1

① صفر

۸- در تابع با ضابطه $f(x) = (x+a)[x]$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟ $([])$ ، نماد جزء

صحیح است.

④ 0

③ -1

② 2

① 1

۹- مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi-}{6}} [2 \sin x - 1]$ کدام است؟ $([])$ نماد جزء صحیح است.

④ وجود ندارد.

③ 1

② صفر

① -1

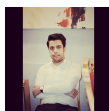
۱۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{[x] + \sin \frac{x}{2}}{1 - \cos x}$ کدام است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

④ 4

③ 2

② $\frac{3}{2}$

① صفر



۱۱- در تابع $y = \left[\frac{1}{x}\right]$ حد چپ در $x = \frac{-1}{10}$ کدام است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است)

- ① ۱۱ ② -۹ ③ -۱۰ ④ -۱۱

۱۲- در تابع جزء صحیح $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right]$ مجموع حد چپ و راست وقتی $x \rightarrow 6$ کدام است؟

- ① ۷ ② ۶ ③ ۵ ④ ۸

۱۳- اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{x-1}{2x}$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(f(x))$ کدام است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است)

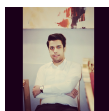
- ① ۱ ② $\frac{1}{2}$ ③ ۲ ④ صفر

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) \cos 3x}{\tan^2 x}$ کدام است؟

- ① ۶ ② $-\frac{2}{3}$ ③ ۰ ④ ۱

۱۵- حد چپ تابع $f(x) = \frac{(3 - [x])\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$ در نقطه ی $x = 3$ کدام است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است)

- ① ۱ ② -۱ ③ ۰ ④ ∞



۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ کدام است؟

- ① -۲ ② $-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ ۲

۱۷- در تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & ; x < -2 \\ 3x + 4 & ; x > -2 \end{cases}$ مقدار حد چپ در نقطه‌ی $x = -2$ ، عکس مقدار حد راست در این نقطه است. a کدام است؟

- ① ۳ ② $3,5$ ③ -۴ ④ $-4,5$

۱۸- حد عبارت $\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- ① $-\infty$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ ۱ ④ $+\infty$

۱۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}}$ کدام است؟

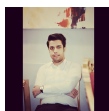
- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$

۲۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}}$ کدام است؟

- ① -۴ ② -۲ ③ ۲ ④ ۴

۲۱- قدرمطلق تفاضل حد چپ و حد راست تابع f به معادله‌ی $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|}$ در نقطه‌ی $x = 1$ کدام است؟

- ① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۶



۲۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x + 8}}{x + 2}$ برابر کدام است؟

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{-3}{2}$ ④ $\frac{-5}{2}$

۲۳- اگر $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$ آنگاه a کدام است؟

- ① $a = 1$ ② $a = -1$ ③ $a = 5$ ④ $a = -5$

۲۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$ کدام است؟

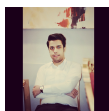
- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ $+\infty$

۲۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x + 6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ کدام است؟

- ① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{6}$

۲۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + x - 12}{|x - 3|}$ چقدر است؟

- ① -7 ② 7 ③ -8 ④ 8



۲۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x+5}}$ کدام است؟

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{3}{2}$

③ $-\frac{2}{3}$

④ $-\frac{3}{2}$

۲۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{9 - x^2}{[-x] - |x|}$ کدام است؟

① ۶

② ۳

③ -۶

④ -۳

۲۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+2}{\sqrt{x+2}}$ کدام است؟

① ∞

② -۲

③ ۲

④ ۰

۳۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x+7} - 4}$ کدام است؟

① $-\frac{3}{4}$

② $\frac{3}{4}$

③ $\frac{4}{3}$

④ $-\frac{4}{3}$

۳۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 4x - 12}{9x^2 - 6x - 24}$ کدام است؟

① $\frac{8}{15}$

② صفر

③ $-\frac{8}{15}$

④ $\frac{8}{20}$

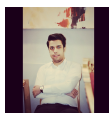
۳۲- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{2x+3}}{2 - \sqrt{3-x}}$ کدام است؟

① -۲

② ۴

③ -۳

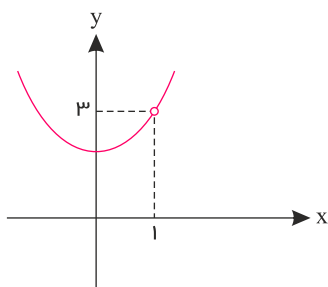
④ ۸



۳۳- حد کسر $\frac{x^3 + x - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$ وقتی $x \rightarrow 1$ کدام است؟

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{21}{2}$ ③ ۴ ④ ۱۲

۳۴- نمودار مقابل مربوط به کدام تابع می تواند باشد؟



- ① $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
 ② $y = x^2 + x + 1$
 ③ $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
 ④ $y = x^2 - x + 1$

۳۵- قدر مطلق تفاضل حد راست از حد چپ تابع $\frac{|x^2 - 4|}{x^2 - 4} + \frac{x - 2}{|x - 2|}$ وقتی $x \rightarrow 2$ کدام است؟

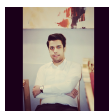
- ① ۶ ② ۴ ③ ۰ ④ ۱

۳۶- در تابع $f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - 4}$ قدر مطلق تفاضل حد چپ و حد راست آن در $x = 2$ کدام است؟

- ① ۰٫۷۵ ② ۱ ③ ۱٫۵ ④ ۲

۳۷- مقدار $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$ برابر کدام گزینه است؟

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{-2}{9}$



۳۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{4 - \sqrt{2x - 2}}{3 - \sqrt{x}}$ کدام است؟

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{-3}{2}$ ④ $\frac{-2}{3}$

۳۹- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{2}$

۴۰- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} + \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x^2 - 9}$ کدام است؟

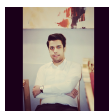
- ① $\frac{-97}{24}$ ② $\frac{97}{24}$ ③ ۴ ④ -۴

۴۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 - 5x^4 + 4x}{3x^2 - 3x}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{3}$ ② ۳ ③ $\frac{-4}{3}$ ④ $\frac{-3}{4}$

۴۲- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته است؟

- ① -۲ ② -۱ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ ۱



۴۳- با کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & ; x \geq -1 \\ x^2 + ax & ; x < -1 \end{cases}$ ، در $x = -1$ پیوسته است؟

① $\{1, \sqrt{2}\}$ ② $\{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ ③ $\emptyset$ ④ $\mathbb{R}$

۴۴- اگر $f(x) = \begin{cases} x+a & ; x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x+1 & ; x < 1 \\ \frac{a}{x+1} & ; x \geq 1 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a ، تابع $f+g$ در $x=1$ پیوسته است؟

① -4 ② 4 ③ -2 ④ 2

۴۵- تابع با ضابطه‌ی $\begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases}$ ، از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و -1 چگونه است؟

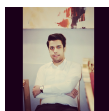
① در -1 ناپیوسته - در ۱ ناپیوسته ② در -1 ناپیوسته - در ۱ پیوسته ③ در -1 پیوسته - در ۱ پیوسته ④ در -1 پیوسته - در ۱ ناپیوسته

۴۶- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^3}{|x+2|} & ; x \neq -2 \\ a & ; x = -2 \end{cases}$ ، در نقطه‌ی $x = -2$ ، فقط از چپ پیوسته است؟

① -12 ② -6 ③ 6 ④ 12

۴۷- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ، در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است؟

① $1/5$ ② 1 ③ -1 ④ $-1/5$

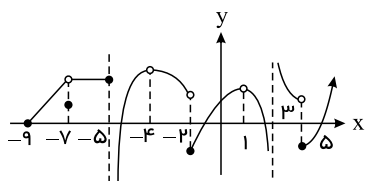


۴۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & x \geq -2 \\ 3x-1 & x < -2 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = -2$ پیوسته است؟

- ① به ازاء هر مقدار a ② $a = -5$ ③ $a = 0$ ④ هیچ مقدار a

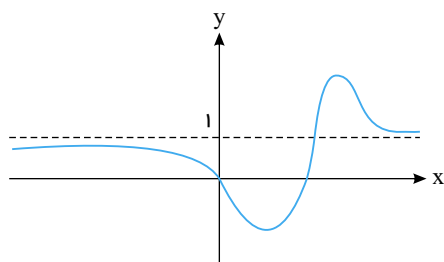
۴۹- پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{|2x|}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a برقرار است؟

- ① $a = 2$ ② $a = -2$ ③ $a = 4$ ④ هیچ مقدار a



۵۰- نمودار تابع f به صورت مقابل است. این تابع در چند نقطه از دامنه تعریفش ناپیوسته است؟

- ① ۷ ② ۸ ③ ۶ ④ ۵



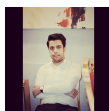
۵۱- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد تابع $g(x) = \frac{f(x)-1}{f(x)-1}$ در چند نقطه

ناپیوسته است؟

- ① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۵۲- تابع $f(x) = x^3[x] - 2x$ در $x = 0$ و در $x = 1$ است.

- ① پیوسته - پیوسته ② پیوسته - ناپیوسته ③ ناپیوسته - پیوسته ④ ناپیوسته - ناپیوسته



۵۳- کدام گزینه در مورد تابع $g(x) = \begin{cases} 3x & x > 2 \\ x+1 & x \leq 2 \end{cases}$ صحیح است؟

- (۱) در $x = 2$ حد دارد. (۲) حد چپ و راست در $x = 2$ موجود نیست. (۳) در $x = 2$ تعریف نشده است. (۴) در $x = 2$ چپ پیوسته است.

۵۴- تابع جزء صحیح $y = [-x^2]$ در $x = 3$ چه وضعی دارد؟

- (۱) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته (۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته (۳) از چپ و راست پیوسته (۴) از چپ و راست ناپیوسته

۵۵- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & x > 6 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

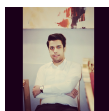
- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۵۶- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & x > 2 \\ ax - 1 & x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

- (۱) هر مقدار حقیقی a (۲) هیچ مقدار a (۳) فقط $a = -2$ (۴) فقط $a = 2$

۵۷- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & x \geq 1 \\ ax + 5x - a & x < 1 \end{cases}$ به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a ، در بازه‌ی $[-2, 2]$ پیوسته است؟

- (۱) $\emptyset$ (۲) R (۳) $\{0, 1\}$ (۴) $\{-2, 2\}$



۵۸- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} a + \sin 3x & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos 2x & \frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$ با شرط $f(\frac{\pi}{2}) = 2$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ پیوسته است $a - b$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

-۴ (۲)

-۵ (۱)

۵۹- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

هیچ مقدار a (۴)

۳ (۳)

-۳ (۲)

هر مقدار a (۱)

۶۰- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} a \sin 2x & ; \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) & ; \frac{3\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ بر بازه‌ی $[\frac{\pi}{4}, 2\pi]$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۰ (۲)

-۱ (۱)

۶۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x - 2} & ; x > 2 \\ 2x + b & ; x \leq 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار b همواره پیوسته است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱)

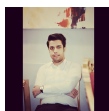
۶۲- به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} a + \sin^2 x & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cos 3x & \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ روی بازه‌ی $[0, 2\pi]$ پیوسته است؟

هیچ مقدار a (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)



۶۳- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x - 2} & ; x > 2 \\ 2x + b & ; x \leq 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار b همواره پیوسته است؟

① -۴ ② ۲ ③ -۲ ④ ۴

۶۴- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases}$ یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a ، کدام است؟

① $-\frac{3}{2}$ ② -۱ ③ ۱ ④ $\frac{5}{2}$

۶۵- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [x] \sin \pi x ; |x| \leq 2$ کدام است؟

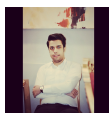
① ۳ ② ۲ ③ ۱ ④ صفر

۶۶- اگر تابع $f(x) = \frac{16}{a \cos 2x + 4}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، حدود a کدام است؟

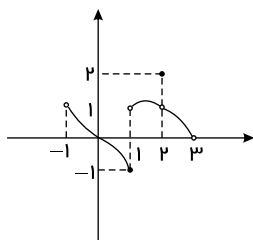
① $-4 < a < 4$ و $a \neq 0$ ② $a > 4$ ③ $-4 < a < 4$ ④ $a > 4$ یا $a < -4$

۶۷- تابع $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{|x-3| + 3 - x}$ در کدام فاصله پیوسته است؟

① $(3, +\infty)$ ② $(-\infty, 3)$ ③ $(-3, 3)$ ④ $\mathbb{R}$



۶۸- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست است؟



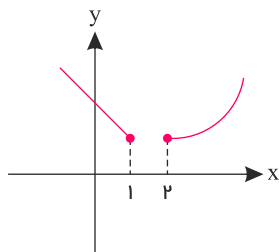
① تابع f در ۴ نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است.

② تابع f در هر نقطه که حد دارد، پیوسته است.

③ تابع f روی بازه $(1, 2]$ پیوسته است.

④ تابع f روی بازه $[-1, 1]$ پیوسته است.

۶۹- نمودار تابع f به شکل مقابل است. این تابع در چه بازه‌هایی پیوسته است؟



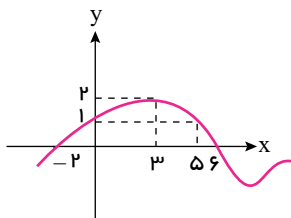
① $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

② $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

③ $\mathbb{R}$

④ $[1, +\infty)$

۷۰- اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، تابع $y = \sqrt{\frac{1}{f} - 1}$ در کدام بازه پیوسته است؟

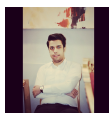


② $(-2, 6)$

① $[-2, 0] \cup [5, 6]$

④ $\mathbb{R} - (0, 5)$

③ $(-2, 0] \cup [5, 6)$



پاسخنامه تشریحی

۱- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$

سراسری- ۱۳۷۶

۲- گزینه ۳ ابتدا موارد خواسته شده را به طور جداگانه از روی نمودار تعیین می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1, \quad f(-2) = -2$$

حاصل عبارت A به صورت زیر است:

$$A = 3 + 2 - 1 - (-2) = 6$$

منتأزمون- ۱۴۰۱

۳- گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

تنها گزینه ای که جواب آن عدد یک می شود گزینه ی اول است زیرا برای محاسبه ی $f(0)$ باید سراغ ضابطه ی پایین برویم که جواب یک می شود.

سراسری- ۱۳۶۳

۴- گزینه ۲

باتوجه به تابع داده شده و انتخاب ضابطه مناسب، حدهای راست و چپ تابع را در $x = 1$ بررسی می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 1) = a - 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2a) = 1 + 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \Rightarrow (1 + 2a) - (a - 1) = -1 \Rightarrow a = -1 - 2 = -3$$

سراسری- ۱۳۸۶

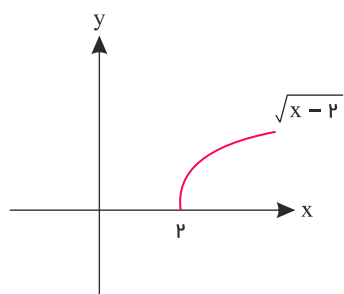
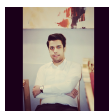
۵- گزینه ۳ بررسی گزینه ها:

گزینه ۱:

$$f(2) = \sqrt{2 - 2} = 0$$

گزینه ۲:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \sqrt{3 - 2} = 1$$



گزینه ۳: دقت کنید که نمودار تابع $y = \sqrt{x-2}$ به شکل زیر است. یعنی تابع در سمت چپ $x = 2$ تعریف شده نیست. پس تابع در این نقطه حد ندارد.

گزینه ۴: با توجه به توضیحات و نمودار گزینه ۳ داریم:

(وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$)

خوشخوان - ۱۳۹۸

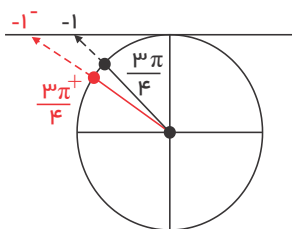
۶- گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan^2 x = (-\infty)^2 = +\infty$$

در ناحیه دوم است و در این ناحیه تانژانت، منفی است.

سراسری - ۱۳۸۰

۷- گزینه ۲ برای حل می توان از دایره مثلثاتی مقدار نسبت مثلثاتی را تعیین نمود.



$$\cot x \rightarrow -1^- \xrightarrow{\text{قدرمطلق}} |\cot x| \rightarrow +1^+ \xrightarrow{(\)^2} \cot^2 x \rightarrow +1^+ \xrightarrow{[\]} [\cot^2 x] = 1$$

ممتاز - ۱۳۹۷

۸- گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \Rightarrow (2+a)[2^+] - (2+a)[2^-] = 3$$

$$\Rightarrow (2+a)(2) - (2+a)(1) = 3 \Rightarrow 4 + 2a - 2 - a = 3 \Rightarrow a = 1$$

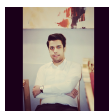
سراسری - ۱۳۸۷

۹- گزینه ۱ تابع سینوس در ربع اول افزایش می یابد پس $\sin \frac{\pi^-}{6} = (\frac{1}{2})^-$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{6}} [2 \sin x - 1] = [2(\frac{1}{2})^- - 1] = [1^- - 1] = [0^-] = -1$$

سراسری - ۱۴۰۰

۱۰- گزینه ۳ می دانیم تابع $y = [x]$ در نقاط غیر صحیح حد دارد.



$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{[x] + \sin \frac{x}{2}}{1 - \cos x} = \frac{[\pi] + \sin \frac{\pi}{2}}{1 - \cos \pi} = \frac{3 + 1}{1 - (-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

توجه کنید که $\pi \simeq 3.14$ است.

منتآزمون- ۱۴۰۱

۱۱- گزینه ۳

$$x \rightarrow \left(\frac{-1}{1.0}\right)^- \xrightarrow{\text{یعنی}} x < -\frac{1}{1.0} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{x} > -1.0$$

یعنی داخل جزء صحیح کمی از -1.0 بزرگتر است یعنی $[(-1.0)^+]$ که حاصل برابر -1.0 است.

آزاد صبح- ۱۳۸۴

۱۲- گزینه ۴

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \left[\frac{6^+}{2}\right] + \left[\frac{6^+}{3}\right] + \left[\frac{6^-}{2}\right] + \left[\frac{6^-}{3}\right] \\ &= [3^+] + [2^+] + [3^-] + [2^-] = 3 + 2 + 2 + 1 = 8 \end{aligned}$$

آزاد صبح- ۱۳۸۲

۱۳- گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - x - 1}{2([x] - x)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1 - x - 1}{2(1 - x)} = \frac{1 - 2 - 1}{2(1 - 2)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

سنجش- ۱۳۹۴

۱۴- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) \cos 3x}{\tan^2 x} = \frac{2 \sin(\overbrace{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}) \cos(\pi)}{\tan^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{2(1)(-1)}{3} = -\frac{2}{3}$$

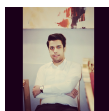
منتآ- ۱۳۹۲

۱۵- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [x])\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [3^-])\sqrt{(x - 3)^2}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\overbrace{|x - 3|}^{-}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x - 3)}{x - 3} = -1$$

سراسری- ۱۳۷۰



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} \times \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} \times \frac{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(2+3x-2+x)(\sqrt{2})}{(\sqrt{1-\cos^2 x})(2\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{2|\sin x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{-\sin x} = -2$$

روش دوم: می دانیم که $\lim_{u \rightarrow 0} (1 - \cos u) \sim \frac{u^2}{2}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\frac{1}{\sqrt{2}}|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1(3)}{2\sqrt{2+3x}} - \frac{1(-1)}{2\sqrt{2-x}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\frac{4}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -2$$

خارج از کشور - ۱۳۹۹

باتوجه به تابع داده شده و انتخاب ضابطه مناسب، حدهای راست و چپ تابع را در $x = 1$ بررسی می کنیم:

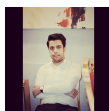
$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1}{f(x)} \rightarrow 4 + a = \frac{1}{-6 + 4} \rightarrow 4 + a = \frac{-1}{2}$$

$$\rightarrow 8 + 2a = -1 \rightarrow 2a = -9 \rightarrow a = -\frac{9}{2} = -4.5$$

خارج از کشور - ۱۳۸۴

۱۸- گزینه ۲ $[2^-]$ برابر یک می باشد بنابراین حد داده شده به این صورت درمی آید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{2}{(x-2)} \right)$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x + 2 - 2x}{x(x - 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{-x + 2}{x(x - 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{-(x - 2)}{x(x - 2)} \right) = \frac{-1}{2}$$

خارج از کشور - ۱۳۹۲

گزینه ۳ - ۱۹

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}} &\times \frac{3 + \sqrt{2x+1}}{3 + \sqrt{2x+1}} \times \frac{2\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(9 - (2x+1))(2 + \sqrt{x})}{(4-x)(3 + \sqrt{2x+1})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(-2x+8)(4)}{(4-x)(6)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(4-x)(4)}{(4-x)(6)} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

سراسری - ۱۳۸۱

۲۰ - گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام باید هم صورت هم مخرج را گویا نماییم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}} &\times \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \times \frac{2 + \sqrt{5-x}}{2 + \sqrt{5-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) + (2 + \sqrt{5-x})}{(4-5+x)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(2 + \sqrt{5-x})}{(x-1)(1 + \sqrt{x})} = \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

خارج از کشور - ۱۳۸۸

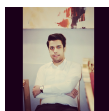
۴۱ - گزینه ۴

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{|x-1|} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-1}{1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{|x-1|} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{-(x-1)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x-1}{-1} = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |-3 - (3)| = |-6| = 6$$

سراسری - ۱۳۷۷

۲۲ - گزینه ۱ باید کسر را در مزدوج صورت $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2}$ ضرب نمائیم. باید توجه داشت که می توان

در مخرج کسر عامل صفرشونده وجود دارد:



$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - (2x + 8)}{(x + 2)(x - \sqrt{2x + 8})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{(x + 2)(-4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x + 2)} (x - 4)}{\cancel{(x + 2)} (-4)} = \frac{3}{2}$$

سراسری - ۱۳۷۹

۲۳- گزینه ۴ ابتدا با جایگذاری می‌توان مبهم بودن کسر را شناسائی نمود. حال برای شناسائی عامل صفرشونده باید مخرج را گویا نمود:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} \times \frac{1 + \sqrt{5x + 16}}{1 + \sqrt{5x + 16}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{a\cancel{(x + 3)} (1 + \sqrt{5x + 16})}{\underbrace{1 - 5x - 16}_{-5\cancel{(x + 3)}}}$$

$$= \frac{2a}{-5} = 2 \rightarrow 2a = -10 \rightarrow a = -5$$

سراسری - ۱۳۷۸

۲۴- گزینه ۱ می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی عامل صفرشونده را استخراج و حذف کرد

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{(\sin x + \cos x) \cos x}{(\sin x + \cos x) \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \cot x = -1$$

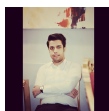
سراسری - ۱۳۸۲

۲۵- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x + 6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x + 6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \times \frac{(4 + 2\sqrt[3]{x + 6} + \sqrt[3]{(x + 6)^2})}{(4 + 2\sqrt[3]{x + 6} + \sqrt[3]{(x + 6)^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8 - x - 6}{\underbrace{\sqrt{(x - 2)^2}}_{|x - 2|} (4 + 2\sqrt[3]{x + 6} + \sqrt[3]{(x + 6)^2})}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\cancel{(2-x)}}{\underbrace{(x-2)(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2})}_{-\cancel{(2-x)}}} = -\frac{1}{12}$$

خارج از کشور- ۱۳۹۳

۲۶- گزینه ۱ در همسایگی چپ $x = 3$ عبارت $x - 3$ منفی است. از طرفی با تجزیه صورت، عامل $x - 3$ را در صورت ایجاد می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + x - 12}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+4)}{-(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+4}{-1} = -7$$

منتآزمون- ۱۴۰۱

۲۷- گزینه ۲ صورت و مخرج را هم در مزدوج صورت و هم در مزدوج مخرج ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x+5}} &\times \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \times \frac{3 + \sqrt{x+5}}{3 + \sqrt{x+5}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(3 + \sqrt{x+5})}{(9-x-5)(2 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(3 + \sqrt{x+5})}{(4-x)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 + \sqrt{x+5}}{2 + \sqrt{x}} = \frac{3+3}{2+2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

smart- ۱۴۰۰

۲۸- گزینه ۱

عبارت $[-x]$ را تعیین می کنیم:

$$x \rightarrow (-3)^- \Rightarrow [-x] = [-(-3 - \varepsilon)] = [3 + \varepsilon] = 3$$

در $x \rightarrow (-3)^-$ متغیر x منفی است و $|x| = -x$ پس داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{9 - x^2}{[-x] - |x|} &= \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{9 - x^2}{3 - (-x)} = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{(3-x)(3+x)}{3+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-3)^-} (3-x) = 3 - (-3) = 6 \end{aligned}$$

smart- ۱۴۰۰

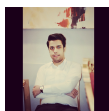
۲۹- گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+2}{\sqrt{x+2}} = \frac{0}{0}$$

کافی است مخرج را گویا نمائیم.

$$\lim \frac{x+2}{\sqrt{x+2}} \times \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} = \lim \frac{\cancel{(x+2)} \sqrt{x+2}}{\cancel{(x+2)}} = 0$$

منتآ- ۱۳۹۲



$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x+7} - 4} = \frac{0}{0}$$

برای استخراج عامل صفرشونده $(x - 9)$ باید صورت و مخرج گویا شود.

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x+7} - 4} \times \frac{3 + \sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+7} + 4}{\sqrt{x+7} + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{(9-x)(\sqrt{x+7}+4)}{\underbrace{(x+7-16)}_{(x-9)}(3+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-\cancel{(x-9)}(\sqrt{x+7}+4)}{\cancel{(x-9)}(3+\sqrt{x})} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

منتا- ۱۳۹۲

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 4x - 12}{9x^2 - 6x - 24} = \frac{0}{0}$$

برای استخراج عامل صفرشونده باید صورت و مخرج را تجزیه نمود. برای تجزیه بر عامل $x - 2$ تقسیم می‌کنیم

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4x - 12 \mid x - 2 \\ 5x^2 - 10x \\ \hline 6x - 12 \\ - 6x + 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9x^2 - 6x - 24 \mid x - 2 \\ 9x^2 - 18x \\ \hline 12x - 24 \\ - 12x + 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

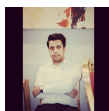
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(5x+6)}{\cancel{(x-2)}(9x+12)} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

منتا- ۱۳۹۲

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{2x+3}}{2 - \sqrt{3-x}} = \frac{0}{0}$$

باتوجه به صورت و مخرج هر دو باید گویا شوند.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{2x+3}}{2 - \sqrt{3-x}} \times \frac{x - \sqrt{2x+3}}{x - \sqrt{2x+3}} \times \frac{2 + \sqrt{3-x}}{2 + \sqrt{3-x}}$$



$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 2x - 3)(2 + \sqrt{3-x})}{(4 - 3 + x)(x - \sqrt{2x+3})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)} (x-3)(2 + \sqrt{3-x})}{\cancel{(x+1)} (x - \sqrt{3x+3})} = \frac{-16}{-2} = 8$$

سنجش - ۱۳۹۴

۳۳- گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{0}{0}$$

صورت کسر را باید تجزیه و مخرج را با استفاده از مکمل گویا کرد:

$$\begin{array}{r} x^3 + x - 2 \mid x - 1 \\ x^3 - x^2 \\ \hline 2x - 2 \\ - 2x - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{\sqrt[3]{x} - 1} &\times \frac{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} (x^2 + x + 2)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{\cancel{(x-1)}} = 4 \times 3 = 12 \end{aligned}$$

آزاد صبح - ۱۳۸۵

۳۴- گزینه ۳ اول: تابع در $x = 1$ مقدار ندارد، پس گزینه‌های ۲ و ۴ رد می‌شوند.

دوم: حد تابع در $x = 1$ برابر ۳ است. بررسی گزینه‌های ۱ و ۳

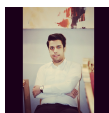
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} (x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$$

گزینه ۱:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} (x^2 + x + 1)}{\cancel{x-1}} = 3$$

گزینه ۳:

خوشخوان - ۱۳۹۸



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\overbrace{|x^2 - 4|}^{+}}{x^2 - 4} + \underbrace{\frac{x - 2}{|x - 2|}}_{+} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{(x^2 - 4)}{x^2 - 4} + \frac{x - 2}{x - 2} \right) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{\underbrace{|x^2 - 4|}_{-}}{x^2 - 4} + \underbrace{\frac{x - 2}{|x - 2|}}_{-} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{-(x^2 - 4)}{x^2 - 4} + \frac{x - 2}{-(x - 2)} \right) = -1 - 1 = -2$$

بنابراین قدرمطلق تفاضل حد راست از حد چپ تابع برابر ۴ می باشد.

منتا- ۱۳۹۲

تابع داده شده به صورت $f(x) = \frac{|(x-2)(x+1)|}{x^2 - 4}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\overbrace{|(x-2)(x+1)|}^{+}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\underbrace{|(x-2)(x+1)|}_{-}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{-(2+1)}{2+2} = -\frac{3}{4}$$

پس قدرمطلق تفاضل این دو حد برابر $\frac{6}{4}$ یا 1.5 است.

سنجش- ۱۳۹۴

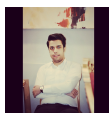
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

باید برای رفع ابهام صورت را گویا و مخرج را تجزیه نماییم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} \times \frac{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\overbrace{(\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}^{(-3x+9)}}{(\cancel{x-3})(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \frac{-3}{48} = -\frac{1}{16}$$

منتا- ۱۳۹۲



$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{4 - \sqrt{2x - 2}}{3 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

باید صورت و مخرج را گویا نمائیم تا عامل صفرشونده $(x - 9)$ را استخراج نمائیم:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{4 - \sqrt{2x - 2}}{3 - \sqrt{x}} \times \frac{4 + \sqrt{2x - 2}}{4 + \sqrt{2x - 2}} \times \frac{3 + \sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\overbrace{(16 - 2x + 2)}^{(-2x + 18)} (3 + \sqrt{x})}{(9 - x)(4 + \sqrt{2x - 2})} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{2(9 - x) (3 + \sqrt{x})}{(9 - x) (4 + \sqrt{2x - 2})} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

منتا- ۱۳۹۲

۳۹- گزینه ۲ کافیت صورت کسر تجزیه شود تا عامل صفرشونده استخراج شود.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cancel{\sin x} - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{(\cancel{\sin x} - \cos x)} = \frac{3}{2}$$

منتا- ۱۳۹۷

۴۰- گزینه ۲ بخش اول و دوم را جداگانه محاسبه می‌نمائیم. هر دو بخش مبهم $\frac{0}{0}$ می‌باشند و باید گویا شوند

$$(I) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \times \frac{\sqrt{x + 1} + 2}{\sqrt{x + 1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x - 3)} (\sqrt{x + 1} + 2)}{\underbrace{(x + 1 - 4)}_{\cancel{(x - 3)}}} = 4$$

$$(II) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x^2 - 9} \times \frac{\sqrt{x + 1} + 2}{(\sqrt{x + 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\overbrace{(x + 1 - 4)}^{\cancel{(x - 3)}}}{\cancel{(x - 3)} (x + 3)(\sqrt{x + 1} + 2)} = \frac{1}{24}$$

جواب نهائی مجموع دو بخش I و II می‌باشد

$$4 + \frac{1}{24} = \frac{97}{24}$$

منتا- ۱۳۹۲

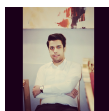
۴۱- گزینه ۳ هرگاه x به سمت عددی میل کند که باعث صفر شدن تمام جملات شود آن گاه هر عبارت، هم ارز آن

جمله‌ای است که توان کمتری دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 - 5x^4 + 4x}{3x^2 - 3x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{-3x} = \frac{-4}{3}$$

منتا- ۱۳۹۲

۴۲- گزینه ۳



شرط پیوستگی تابع f در $x = a$ این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1(2)}{2\sqrt{2x}}}{-1} = -\frac{1}{2}$$

پس $f(2) = a = -\frac{1}{2}$ است

سراسری - ۱۳۸۷

۴۳- گزینه ۳

برای این که تابع f در نقطه ی مرزی $x = -1$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر باشند.

امکان ندارد

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{-1+a} = \frac{-1}{1-a} \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^2 + ax) = (-1)^2 + a(-1) = 1-a \\ f(-1) &= \frac{1}{-1+a} = \frac{-1}{1-a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{1-a} = 1-a \Rightarrow (1-a)^2 = -1 \Rightarrow$$

خارج از کشور - ۱۳۸۷

۴۴- گزینه ۱ ابتدا $f(x) + g(x)$ را تشکیل می دهیم و سپس شرط پیوستگی (یعنی تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x = 1$ اعمال می کنیم.

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2x + a + 1 & x < 1 \\ \frac{a}{x+1} + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

حد راست: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{a}{x+1} + 1 \right) = \frac{a}{2} + 1$

حد چپ: $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + a + 1) = 2 + a + 1 = a + 3$

مقدار تابع: $(f+g)(1) = \frac{a}{2} + 1$

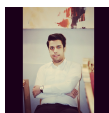
پس: $\frac{a}{2} + 1 = a + 3 \rightarrow a + 2 = 2a + 6 \rightarrow a = -4$

خارج از کشور - ۱۳۸۴

۴۵- گزینه ۴ ابتدا تابع داده شده را ساده می کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 2x & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در $x = 1$ و $x = -1$ بدست آوریم.



$$x = 1 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2(1) = 2 \\ f(1) = 2(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = 1 \text{ ناپیوسته است.}$$

$$x = -1 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} 2x = 2(-1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x - 1) = -1 - 1 = -2 \\ f(-1) = 2(-1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = -1 \text{ پیوسته است.}$$

سراسری - ۱۳۸۸

۴۶- گزینه ۱ کافی است حد چپ تابع در $x = -2$ و مقدار تابع در $x = -2$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1 + x^2}{\underbrace{|x + 2|}_{-}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{-(x + 2)} = -12$$

درضمن $f(-2) = a$ است پس $a = -12$ است.

سراسری - ۱۳۹۸

۴۷- گزینه ۴ شرط آن که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{1 - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(2 \sin x + 1)(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{-(2 + 1)}{2 + 0} = -1.5 \end{aligned}$$

توجه کنید که $f(\frac{\pi}{2}) = a$ است، پس $a = -1.5$ است.

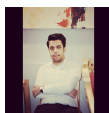
خارج از کشور - ۱۳۹۹

۴۸- گزینه ۴

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = -2$ باید با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x + a)^2 = (-2 + a)^2 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (3x - 1) = 3(-2) - 1 = -7 \\ f(-2) &= (-2 + a)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (-2 + a)^2 = -7 \rightarrow \text{امکان ندارد}$$

منتا - ۱۳۹۲



۴۹- گزینه ۴ کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = 0$ بدست آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3x + \frac{\overbrace{|2x|}^+}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(3x + \frac{\overbrace{|2x|}^-}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x - 2) = -2$$

تابع در $x = 0$ حد ندارد پس نمی تواند پیوسته باشد.

منتا- ۱۳۹۲

۵۰- گزینه ۴ $x = -9$: تابع در همسایگی چپ این نقطه تعریف نشده، در نتیجه حد نداشته و ناپیوسته است.

$x = -7$: تابع در این نقطه حد دارد ولی با مقدار تابع برابر نیست، پس ناپیوسته است.

$x = -5$: حد راست در این نقطه وجود ندارد $(-\infty)$ ، پس ناپیوسته است.

$x = -4$: این نقطه در دامنه تابع قرار ندارد، پس بررسی نمی کنیم.

$x = -2$: تابع در این نقطه حد چپ و راست متفاوت دارد، پس حد نداشته و ناپیوسته است.

$x = 1, x = 3$: این نقاط در دامنه قرار ندارند، پس بررسی نمی کنیم.

$x = 5$: حد چپ و حد راست در این نقطه برابر نیستند، پس حد نداشته و ناپیوسته است.

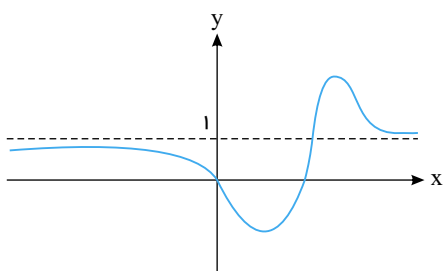
بنابراین تابع در نقاط $-9, -7, -5, -2, 5$ از دامنه اش ناپیوسته است.

smart- ۱۴۰۰

۵۱- گزینه ۲

تابع $g(x) = \frac{f(x) - 1}{f(x) - 1}$ در نقاطی ناپیوسته است که مخرج کسر برابر صفر

باشد. (دقت شود که تابع f در کل $\mathbb{R}$ پیوسته است.)

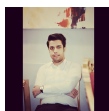


$$f(x) - 1 = 0 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow$$

یک ریشه دارد چون خط $y = 1$ نمودار تابع $y = f(x)$ را در یک نقطه قطع می کند. $\Leftarrow$ بنابراین تابع g در یک نقطه ناپیوسته است.

خوشخوان- ۱۳۹۹

۵۲- گزینه ۲ شرط اینکه تابع در $x = a$ پیوسته باشد این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.



$$x = 0 \text{ در پیوستگی در } : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0[0^+] - 2(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0[0^-] - 2(0) = 0 \rightarrow \text{تابع در } x = 0 \text{ پیوسته است.} \\ f(0) = 0[0] - 2(0) = 0 \end{cases}$$

$$x = 1 \text{ در پیوستگی در } : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1[1^+] - 2(1) = 1 - 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1[1^-] - 2(1) = 0 - 2 = -2 \rightarrow \text{تابع در } x = 1 \text{ ناپیوسته است.} \\ f(1) = 1[1] - 2(1) = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

smart- ۱۴۰۰

۵۳- گزینه ۴ حدود چپ و راست و مقدار تابع را در $x = 2$ محاسبه می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 1) = 3$$

$$f(2) = 3$$

پس تابع در $x = 2$ از چپ پیوسته است.

خوشخوان - ۱۳۹۸

۵۴- گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} [-x^2] = [-(3^+)^2] = [-(9^+)] = [-9^-] = -10$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [-x^2] = [-(3^-)^2] = [-(9^-)] = [-9^+] = -9$$

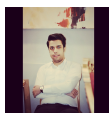
$$f(-3) = [-9] = -9$$

تابع از چپ پیوسته و از راست ناپیوسته است.

آزاد صبح - ۱۳۸۹

۵۵- گزینه ۲ چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از یک پیوسته است پس حتماً در $x = 6$ نیز باید پیوسته باشد. یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 6$ باید با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} \left(a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} \right) = a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = a + \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ f(6) &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$



۵۶- گزینه ۱ چون هر دو ضابطه پیوسته هستند، برای آنکه تابع دو ضابطه‌ای f روی R (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) پیوسته باشد، کافی است شرایط پیوستگی تابع را تنها در نقطه‌ی مرزی آن، یعنی $x = 2$ برقرار نماییم.

$$\begin{cases} \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax - 5) = 4 + 2a - 5 = 2a - 1 \\ \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1 \end{cases}$$

چون به ازای هر مقدار a ، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 2$ با هم برابر هستند، پس نتیجه می‌گیریم که به ازای هر مقدار حقیقی a ، تابع f روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

سراسری- ۱۳۹۱

۵۷- گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی یعنی تساوی حدود راست و چپ و مقدار تابع با هم را در $x = 1$ بررسی کنیم.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 4) = -1 + 4 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + 5x - a) = a + 5 - a = 5 \\ f(1) = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$

تابع f در $x = 1$ پیوسته نمی‌باشد. بنابراین به ازای هیچ مقداری برای a تابع f در بازه‌ی $[-2, 2]$ پیوسته نمی‌باشد.

سراسری- ۱۳۸۴

۵۸- گزینه ۴ کافی است شرط پیوستگی را در $x = \frac{\pi}{2}$ بررسی کنید (تساوی حد راست و چپ و مقدار تابع در

$$(x = \frac{\pi}{2})$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} b \cos 2x = b \cos \pi = -b \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (a + \sin 3x) = a + \sin \frac{3\pi}{2} = a - 1 \\ f(\frac{\pi}{2}) = 2 \end{cases}$$

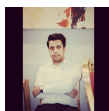
پس: $-b = 2 \rightarrow b = -2$, $a - 1 = 2 \rightarrow a = 3 \rightarrow a - b = 5$

سراسری- ۱۳۸۹

۵۹- گزینه ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = 1$ به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\overbrace{[(x+2)(x-1)]}^+}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\overbrace{((x+2)(x-1))}^-}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+2)(x-1)}{(x-1)} = -3$$

این تابع در $x = 1$ پیوسته نمی‌باشد.

سراسری - ۱۳۹۰

۶۰- گزینه ۴ برای پیوستگی f در بازه $[\frac{\pi}{4}, 2\pi]$ تنها کافی است شرایط پیوستگی را در نقطه‌ی مرزی $x = \frac{3\pi}{4}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+} \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos \pi = -1 \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} a \sin 2x = a \sin \frac{3\pi}{2} = -a \\ f(\frac{3\pi}{4}) &= \cos(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \cos \pi = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$$

خارج از کشور - ۱۳۹۰

۶۱- گزینه ۱ می‌دانیم اگر $x = k$ یکی از ریشه‌های تابع $f(x)$ باشد آن‌گاه $f(x)$ بر $x - k$ بخش‌پذیر است.

کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x = 2$ اعمال کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x-2} &= \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 - x - 2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x - 2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + b) &= 4 + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 4 + b \Rightarrow b = -4$$

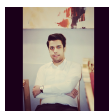
خارج از کشور - ۱۳۸۹

۶۲- گزینه ۱ برای پیوستگی تابع f در بازه $[0, 2\pi]$ ، تنها کافی است شرایط پیوستگی تابع را در نقطه‌ی مرزی به

طول $x = \frac{\pi}{4}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \sqrt{2} \cos 3x = \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (a + \sin^2 x) = a + \sin^2 \frac{\pi}{4} = a + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a + \frac{1}{2} \\ f(\frac{\pi}{4}) &= \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

خارج از کشور - ۱۳۸۸



۶۳- گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x = 2$ اعمال کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

برای استخراج عامل صفرشونده می توان صورت را برای عامل صفرشونده $x - 2$ تقسیم نمود:

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x - 2} \Bigg| \frac{x - 2}{x^2 - x - 2}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2-x-2)}{(x-2)} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + b) &= 4 + b \end{aligned} \right\} 0 = 4 + b \rightarrow b = -4$$

خارج از کشور - ۱۳۸۹

۶۴- گزینه ۱ می دانیم که $|f(x)| \leq k \xrightarrow{k>0} -k \leq f(x) \leq k$ و $|f(x)| \geq k \xrightarrow{k>0}$ یا $f(x) \geq k$ یا $f(x) \leq -k$ است.

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & -1 < x-1 < 1 \\ x^2 + ax + b & x-1 \geq 1 \text{ یا } x-1 \leq -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases}$$

چون تابع همواره پیوسته است، پس حتماً در $x = 0$ و $x = 2$ نیز پیوسته است.

$$x = 0 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)[x] = -1[0^+] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + b) = b \rightarrow b = 0 \\ f(0) = b \end{cases}$$

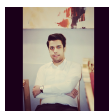
$$x = 2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)[x] = 1[2^-] = 1 \rightarrow 4 + 2a = 1 \rightarrow a = \frac{-3}{2} \\ f(2) = 4 + 2a \end{cases}$$

سراسری - ۱۳۹۹

۶۵- گزینه ۲

$$f(x) = [x] \sin \pi x, \quad -2 \leq x \leq 2$$

اعداد $-1, 0, 1$ داخل جزء صحیح را صحیح کرده و باعث ناپیوستگی آن می شوند ولی چون این سه عدد $\sin \pi x$ را صفر می کنند (ضریب صفرشونده) نقاط ناپیوستگی محسوب نمی شوند و $x = -2$ و $x = 2$ چون ابتدا و انتهای بازه بسته هستند نقاط ناپیوستگی محسوب می شوند پس این تابع ۲ نقطه ناپیوستگی دارد.



۶۶- گزینه ۳ چون تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس باید مخرج کسر فاقد ریشه باشد:

$$a \cos 2x + 4 = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{4}{a}$$

برای این که معادله فوق فاقد ریشه باشد، باید $1 > \left| -\frac{4}{a} \right|$ باشد. یعنی:

$$\left| -\frac{4}{a} \right| > 1 \xrightarrow{\text{طبق خواص قدرمطلق}} \left| \frac{4}{a} \right| > 1 \xrightarrow[\text{عکس می‌کنیم.}]{\text{طرفین را}} \left| \frac{a}{4} \right| < 1 \Rightarrow |a| < 4$$

تذکر: توجه شود که اگر $a = 0$ باشد، تابع f به تابع ثابت $f(x) = 4$ تبدیل می‌شود که در کل $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس $a = 0$ نیز قابل قبول است.

خوشخوان - ۱۳۹۹

۶۷- گزینه ۲ تابع در فاصله‌ای پیوسته است که مخرج کسر برابر صفر نشود، بنابراین داریم:

$$|x - 3| + 3 - x = 0 \Rightarrow |x - 3| = x - 3 \Rightarrow x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

پس در $x \geq 3$ مخرج کسر برابر صفر می‌شود و تابع تعریف نشده و ناپیوسته است از این رو تابع در بازه $(-\infty, 3)$ پیوسته است.

خوشخوان - ۱۳۹۹

۶۸- گزینه ۴ تابع f فقط در نقاط $x = 1$ و $x = 2$ از دامنه‌اش ناپیوسته است.

در نقطه $x = 2$ حد دارد ولی پیوسته نیست.

در نقطه $x = 2$ پیوستگی چپ ندارد پس روی بازه $(1, 2]$ پیوسته نیست.

در هر نقطه در بازه $(-1, 1)$ پیوسته است و در نقطه $x = 1$ پیوستگی چپ دارد، در نتیجه روی بازه $(-1, 1]$ پیوسته است.

smart- ۱۴۰۰

۶۹- گزینه ۱ دقت کنید که در $x = 1$ برای پیوستگی، پیوستگی چپ کافیت و همچنین برای پیوستگی در نقطه $x = 2$ ، پیوستگی راست کافیت.

خوشخوان - ۱۳۹۸

۷۰- گزینه ۳ اول: تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته است. پس تابع $\sqrt{\frac{1}{f} - 1}$ در دامنه‌اش پیوسته است.

$$\left. \begin{aligned} f &\neq 0 \\ \frac{1}{f} - 1 \geq 0 &\Rightarrow \frac{1}{f} \geq 1 \xrightarrow{f > 0} f \leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 < f \leq 1$$

دوم: از نمودار تابع معلوم است، تابع f در بازه $(5, 6) \cup (-2, 0]$ در بازه $0 < f \leq 1$ قرار می‌گیرد.

خوشخوان - ۱۳۹۸

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۱۳ - ۱	۲۵ - ۲	۳۷ - ۱	۴۹ - ۴	۶۱ - ۱
۲ - ۳	۱۴ - ۲	۲۶ - ۱	۳۸ - ۱	۵۰ - ۴	۶۲ - ۱
۳ - ۱	۱۵ - ۲	۲۷ - ۲	۳۹ - ۲	۵۱ - ۲	۶۳ - ۱
۴ - ۲	۱۶ - ۱	۲۸ - ۱	۴۰ - ۲	۵۲ - ۲	۶۴ - ۱
۵ - ۳	۱۷ - ۴	۲۹ - ۴	۴۱ - ۳	۵۳ - ۴	۶۵ - ۲
۶ - ۳	۱۸ - ۲	۳۰ - ۴	۴۲ - ۳	۵۴ - ۲	۶۶ - ۳
۷ - ۲	۱۹ - ۳	۳۱ - ۱	۴۳ - ۳	۵۵ - ۲	۶۷ - ۲
۸ - ۱	۲۰ - ۲	۳۲ - ۴	۴۴ - ۱	۵۶ - ۱	۶۸ - ۴
۹ - ۱	۲۱ - ۴	۳۳ - ۴	۴۵ - ۴	۵۷ - ۱	۶۹ - ۱
۱۰ - ۳	۲۲ - ۱	۳۴ - ۳	۴۶ - ۱	۵۸ - ۴	۷۰ - ۳
۱۱ - ۳	۲۳ - ۴	۳۵ - ۲	۴۷ - ۴	۵۹ - ۴	
۱۲ - ۴	۲۴ - ۱	۳۶ - ۳	۴۸ - ۴	۶۰ - ۴	