

نویدپورزکی

فصل دوم : تابع

یادآوری مفهوم تابع و نحوه نمایش آن

۱- اگر $f = \{(m^2 - 4, 5), (m^2 - 4, m^2 - 11), (8 + m, 2)\}$ یک تابع باشد، m کدام است؟

- ① فقط ۴ + ② فقط ۴ - ③ ± 4 ④ هیچ مقداری برای m وجود ندارد.

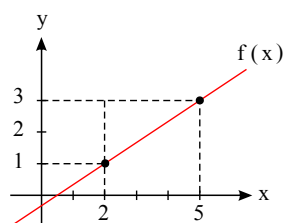
۲- اگر تابع داده شده در جدول زیر را با یک ضابطه بتوان نشان داد، مقدار a کدام است؟

x	۰	۳	۴	$a + 1$
$f(x)$	۰	۲۷	۶۴	۲۱۶

- ① ۴ ② ۵ ③ ۶ ④ ۷

۳- اگر $f = \{(5, a^2 - 1), (a, 3), (5, 48), (7, 2)\}$ یک تابع باشد، مقدار a کدام است؟

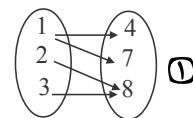
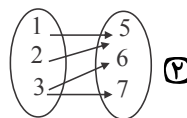
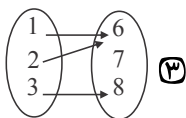
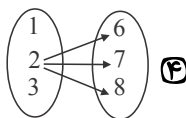
- ① ۷ ② ۷ - ③ ۲۵ ④ ۲۵ -

۴- نمودار تابع f به صورت مقابل است. $f(3)$ کدام است؟

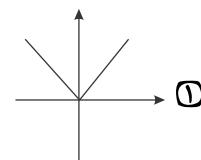
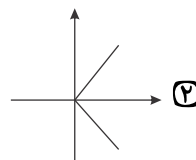
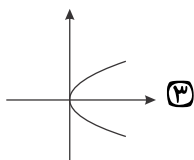
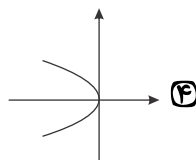
- ① $\frac{13}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{5}{3}$ ④ $\frac{7}{3}$



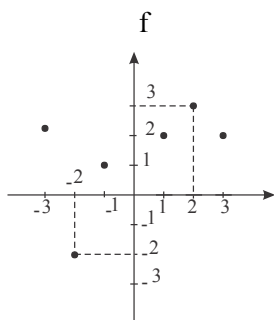
۵- کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟



۶- کدام یک از نمودارهای مختصاتی زیر نشان دهنده یک تابع است؟

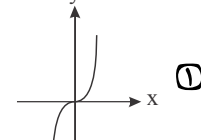
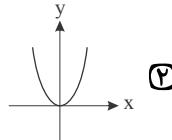
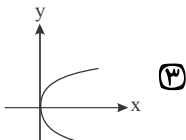
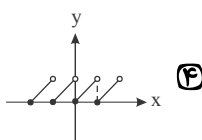


۷- با توجه به نمودار مختصاتی زیر حاصل $f(2) + f(-2)$ برابر کدام گزینه است؟



- ۱ ۱
- ۲ -۱
- ۳ ۲
- ۴ صفر

۸- کدام یک از نمودارهای زیر تابع نمی باشد؟





۹- اگر نمایش زوج مرتبی تابع f به صورت $f = \{(2, 5), (6, 8), (7, 2)\}$ باشد در این صورت حاصل $\frac{f(6) + f(7)}{f(f(7))}$ برابر کدام گزینه است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۰ (۱)

۱۰- اگر مجموعه A مربوط به نمایش زوج مرتبی یک تابع باشد حاصل $a + b$ برابر کدام گزینه است؟

$$A = \{(3, 5), (a-1, 2), (5, a-2), (a-2, b-3), (5, 3)\}$$

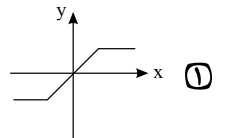
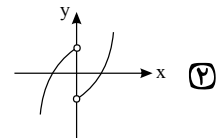
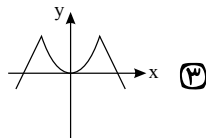
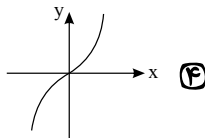
۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

۱۱- دامنه و برد نمودار کدام تابع مجموعه اعداد حقیقی است؟



توابع چند ضابطه ای

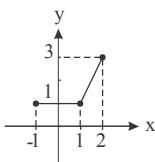
۱۲- اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} + x & x < -1 \\ \sqrt{2} - x & x \geq -1 \end{cases}$ مقدار $f(\sqrt{2} - 1) + f(\sqrt{2} + 1)$ کدام است؟

$2\sqrt{2} - 2$ (۴)

صفر (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)



۱۳- اگر نمودار f به شکل زیر باشد، ضابطه این تابع کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (۲)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad (۴)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & -1 \leq x < 2 \\ 2 & 1 < x < 2 \end{cases} \quad (۳)$$



۱۴- با توجه به تابع دو ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} 6x - 2 & x \geq 2 \\ x - 3 & x < 2 \end{cases}$ حاصل $f(2) + f(-2)$ چقدر است؟

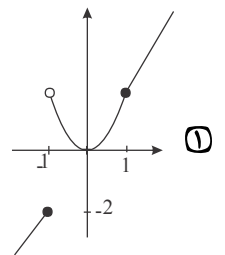
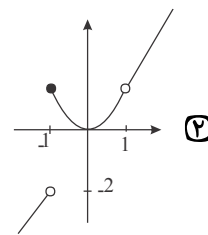
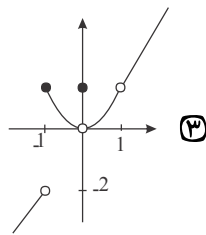
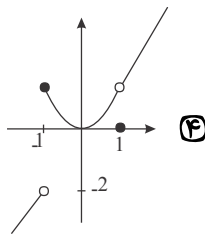
- ① ۵ ② -۵ ③ ۱۰ ④ -۱۰

۱۵- اگر تابع دو ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 1 & x \geq 0 \\ -3 & x < 0 \end{cases}$ یک تابع ثابت باشد، در این صورت مقدار x برابر کدام گزینه است؟

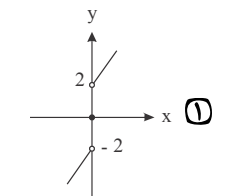
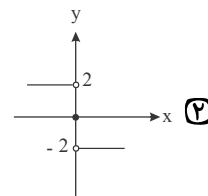
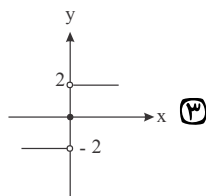
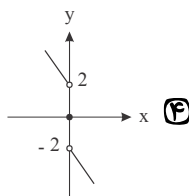
- ① ۲ ② -۲ ③ ۲ یا -۲ ④ صفر

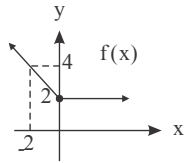
۱۶- نمودار مختصاتی تابع زیر به کدام صورت است؟

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 1 \\ x^2 & -1 < x \leq 1 \\ 3x + 1 & x \leq -1 \end{cases}$$



۱۷- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -2 & , x < 0 \end{cases}$ در کدام گزینه آمده است؟





۱۸- ضابطه تابع $f(x)$ که نمودار آن به صورت مقابل می باشد، کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} -2x & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases} \quad \textcircled{۲}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x & x \leq 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases} \quad \textcircled{۴}$$

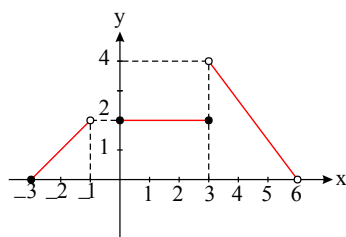
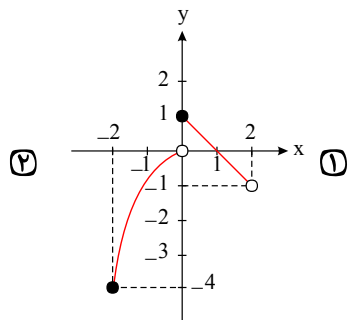
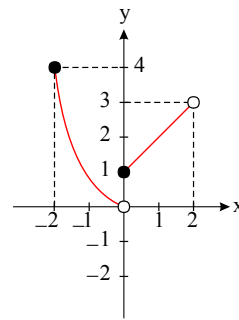
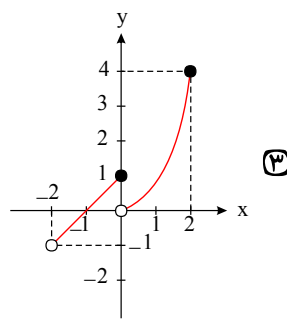
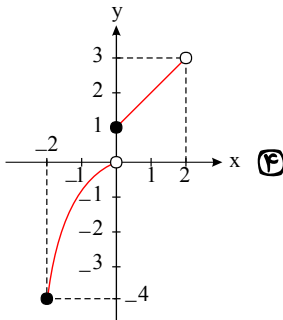
$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \leq 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases} \quad \textcircled{۱}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad \textcircled{۳}$$

۱۹- در تابع $f(x) = \begin{cases} x & , x < -1 \\ x^2 + 2x - 5 & , -1 \leq x \leq 2 \\ -2 & , x > 2 \end{cases}$ حاصل عبارت $f(\sqrt{2}-1) + f(\sqrt{2}+1)$ کدام است؟

① -۲ ② -۶ ③ $2\sqrt{2}-5$ ④ -۴

۲۰- کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع چند ضابطه ای $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x < 0 \\ x+1 & 0 \leq x < 2 \end{cases}$ است؟



۲۱- در تابع شکل زیر حاصل $f(4) + f(-2) + f(2)$ کدام است؟

- ① صفر
 ② ۳
 ③ ۱
 ④ $\frac{17}{3}$

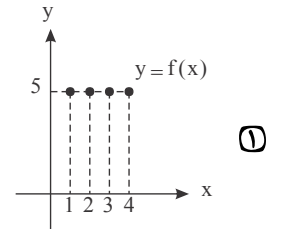
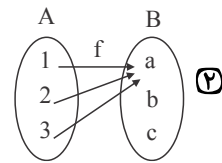


توابع ثابت و همانی

۲۲- کدام گزینه یک تابع ثابت را مشخص نمی‌کند؟

۴ $f = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

۳ $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \gamma \end{cases}$



۲۳- اگر $f = \{(1, 2a - 1), (a + 2, b + 1), (1, a + 1)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

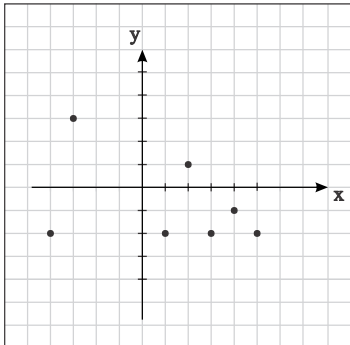
۴ ۴

۳ -۲

۷ ۲

۱ ۱

۲۴- از نمودار تابع روبه‌رو حداقل چند نقطه حذف کنیم تا نمودار حاصل تبدیل به یک تابع ثابت شود؟



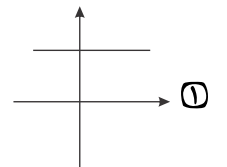
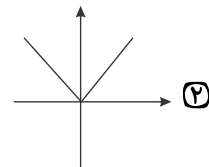
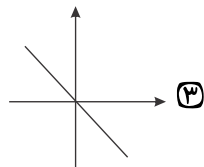
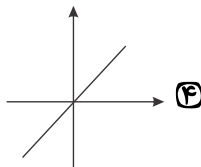
۱ ۱

۲ ۲

۳ ۳

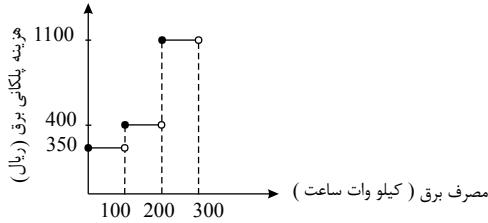
۴ ۶

۲۵- کدام یک از نمودارهای مختصاتی زیر مربوط به یک تابع همانی است؟





۲۶- نمودار پلکانی زیر برای محاسبه هزینه پلکانی برق مصرفی یک خانوار رسم شده است. اگر برق مصرفی این خانوار ۳۰۰ کیلووات ساعت باشد، هزینه برق مصرفی این خانوار چند ریال است؟



- ① ۱۱۰۰
② ۱۸۵۰
③ ۱۸۵۰۰۰
④ ۱۱۰۰۰۰

۲۷- اگر تابع ثابت f با ضابطه $f(x) = -1$ و تابع g همانی باشد، مقدار عبارت زیر کدام است؟

$$A = \frac{g(2) + f(3) + g(-1)}{3f(3) + 5g(6)}$$

④ -۶

③ ۴

② ۲

① صفر

۲۸- اگر f یک تابع همانی باشد و $f(2k+3) = k+5$ در این صورت $f(k^2)$ کدام است؟

④ $\frac{4}{9}$

③ ۴

② $\frac{9}{4}$

① ۲۵

۲۹- تابع f یک تابع همانی با دامنه اعداد حقیقی است. حاصل $\frac{f(3) + 2f(-3)}{2f(3) - f(-3)}$ کدام است؟

④ $\frac{1}{3}$

③ ۳

② -۳

① $-\frac{1}{3}$

۳۰- اگر $f = \{(5, \sqrt{9}), (6, m-2n), (10, m+2n)\}$ تابعی ثابت و $g = \{(\frac{a}{2}, 1), (4, 4), (8, b-2)\}$ تابعی

همانی باشد، حاصل عبارت $m - n + a - b$ کدام است؟

④ ۶

③ -۶

② ۵

① -۵



۳۱- اگر جدول زیر مربوط به یک تابع ثابت باشد، در این صورت حاصل $a + b + c$ کدام است؟

x	-۱	-۲	۳	$\sqrt{۲}$
y	$\sqrt{a}$	$b^۲$	$۲b - ۱$	c

(۴) -۳

(۳) -۱

(۲) ۲

(۱) ۱

توابع پلکانی

۳۲- حاصل عبارت $sign(-۳,۵) + sign(۴,۵)$ چقدر است؟

(۴) صفر

(۳) ۲

(۲) -۱

(۱) ۱

۳۳- حاصل $sign(x - ۱)$ به ازای $۱ < x \leq ۳$ چقدر است؟

(۴) صفر

(۳) -۲

(۲) -۱

(۱) ۱

۳۴- حاصل $sign(-۲x + ۵)$ به ازای کدام یک از مقادیر زیر برابر -۱ است؟

(۴) $۰ < x < \frac{۵}{۲}$

(۳) $۳ < x < ۴$

(۲) $۱ < x < ۲$

(۱) $-۴ < x < -۳$

۳۵- اگر $f(x) = [x]$ در این صورت حاصل عبارت $f(-۳,۹) + f(۴,۱)$ برابر کدام گزینه است؟

(۴) صفر

(۳) ۰٫۲

(۲) -۱

(۱) ۱



۳۶- اگر $f(x) = [x]$ در این صورت حاصل $f(-\frac{4}{\pi})$ چقدر است؟

- ① ۱ ② -۱ ③ -۲ ④ صفر

۳۷- حاصل $[-\sqrt{5} + 2] + [\sqrt{5} - 2]$ برابر کدام گزینه است؟

- ① ۱ ② -۱ ③ $\sqrt{5}$ ④ صفر

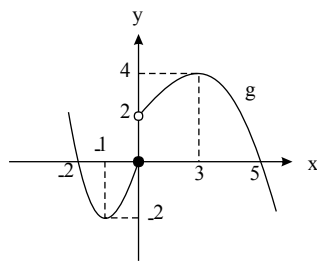
۳۸- اگر $0 < x < 1$ باشد، در این صورت حاصل $[x^2 - 1]$ چقدر است؟

- ① ۱ ② -۱ ③ -۲ ④ صفر

۳۹- مقدار تابع $f(x) = [x] + [-x]$ به ازای $x = -1, 2$ کدام است؟ (علامت جزء صحیح است.)

- ① ۱ ② -۲ ③ صفر ④ -۱

۴۰- اگر $f(x) = \text{sign}(x)$ و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، حاصل عبارت $\text{sign}(-4) \times g(-1) + f(0) \times g(3)$ کدام



است؟

- ① -۳ ② ۳ ③ -۲ ④ ۲

۴۱- حاصل عبارت $A = \frac{3[x] - 4[-x]}{\sqrt{[x]} + [2x]}$ به ازای $x = 4, 8$ کدام است؟ (نماد جزء صحیح است.)

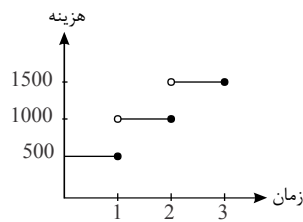
- ① $\frac{35}{11}$ ② $\frac{32}{11}$ ③ $\frac{40}{13}$ ④ $\frac{45}{13}$



۴۲- مقدار تابع $f(x) = \left[\frac{-x^2}{x^2 - 1} \right]$ به ازای $x = 3$ کدام است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

- ① ۱ ② صفر ③ -۱ ④ -۲

۴۳- نمودار زیر مربوط به هزینه پارکینگ یک مجتمع تجاری است به ازای ۳:۲ توقف در این پارکینگ چقدر باید پرداخت کنیم؟



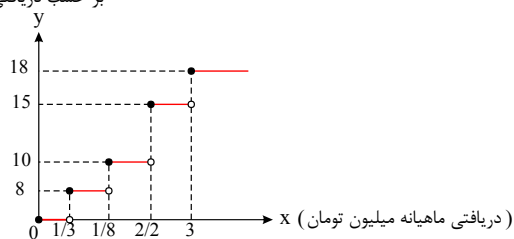
- ① ۱۷۵۰
② ۲۰۰۰
③ ۲۲۵۰
④ ۲۵۰۰

۴۴- نمودار توابع $y = -1|x|$ و $y = \text{sign}(x)$ در چند نقطه با هم تلاقی دارند؟

- ① صفر ② یک نقطه ③ دو نقطه ④ سه نقطه

۴۵- مطابق نمودار زیر، شخصی که ۲ میلیون تومان دریافتی ماهیانه دارد مالیات می پردازد و مبلغ زیر معاف از مالیات است.

درصد میزان مالیات پلکانی
بر حسب دریافتی



- ① ۹۰ هزار تومان - یک میلیون و هشتصد هزار تومان
② ۹۰ هزار تومان - یک میلیون و سیصد هزار تومان
③ ۶۰ هزار تومان - یک میلیون و سیصد هزار تومان
④ ۶۰ هزار تومان - یک میلیون و هشتصد هزار تومان



تابع قدر مطلق

۴۶- حاصل $f(2)$ را برای تابع $f(x) = |\sqrt{3} - x| - |x + \sqrt{3}|$ بدست آورید؟

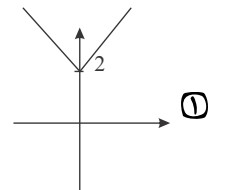
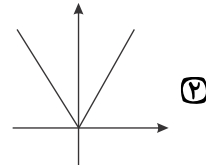
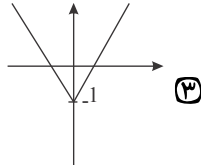
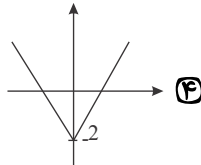
④ $-2\sqrt{3}$

③ $2\sqrt{3}$

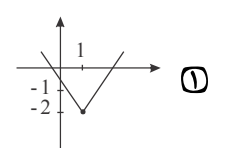
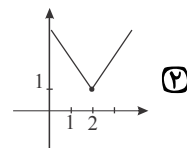
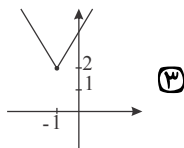
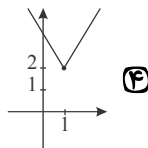
② $-2\sqrt{3} - 4$

① $2\sqrt{3} + 4$

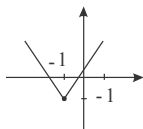
۴۷- نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x| - 2$ به کدام صورت است؟



۴۸- نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x + 1| + 2$ به کدام صورت است؟



۴۹- ضابطه نمودار مختصاتی زیر کدام است؟



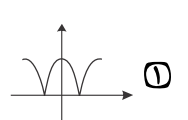
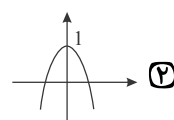
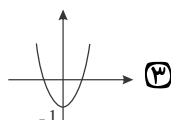
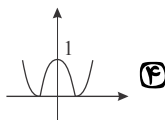
⑤ $|x - 1| + 1$

① $|x - 1| - 1$

④ $|x + 1| + 1$

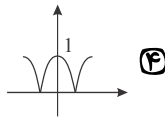
③ $|x + 1| - 1$

۵۰- نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ به کدام صورت است؟

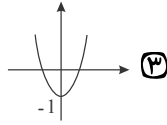




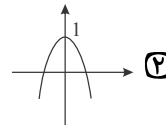
۵۱- نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |-x^2 + 1|$ به کدام صورت است؟



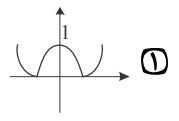
۴



۳



۲



۱

۵۲- علی برای رسم تابع $f(x)$ ابتدا تابع $y = |x|$ را رسم کرد. سپس این نمودار را نسبت به محور x ها قرینه کرد و به اندازه ۳ واحد بالا برد. ضابطه تابع $f(x)$ کدام است؟

$f(x) = -|x-3|$ ۴

$f(x) = -|x|+3$ ۳

$f(x) = -|x+3|$ ۲

$f(x) = |-x|+3$ ۱

۵۳- اگر $|3x-a| = \begin{cases} 3x-a & x \geq 2 \\ -(3x-a) & x < 2 \end{cases}$ مقدار a کدام است؟

۶ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

۵۴- در کدام گزینه، تابع قدر مطلق به درستی به تابع چند ضابطه ای تبدیل نشده است؟

$y = 3 + |x-2| = \begin{cases} x+1 & , x \geq 2 \\ 5-x & , x < 2 \end{cases}$ ۲

$y = |x-1| = \begin{cases} x-1 & , x > 1 \\ 1-x & , x \leq 1 \end{cases}$ ۱

$y = -|x+5|-3 = \begin{cases} x+2 & , x \geq -5 \\ -x-8 & , x < -5 \end{cases}$ ۴

$y = -|x|+4 = \begin{cases} 4-x & , x \geq 0 \\ 4+x & , x < 0 \end{cases}$ ۳

۵۵- مساحت ناحیه ای که نمودار تابع $f(x) = -|x-3|+3$ با محور طول ها می سازد، کدام است؟

۱۲ ۴

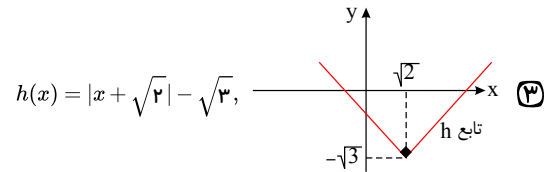
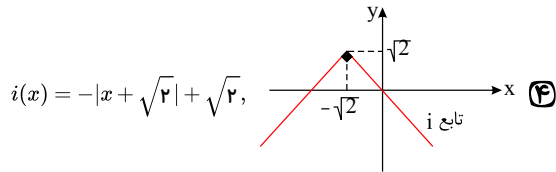
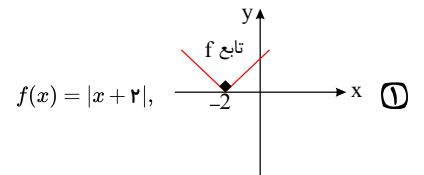
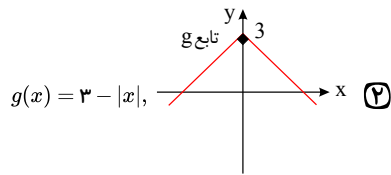
۶ ۳

۹ ۲

۱۸ ۱



۵۶- در کدام گزینه، نمودار و ضابطه تابع، با هم مطابقت ندارند؟



۵۷- مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = 3 - |x|$ و محور x ها کدام است؟

۴) ۳

۳) $\frac{3}{2}$

۲) ۹

۱) $\frac{9}{2}$

اعمال جبری بر روی توابع

۵۸- اگر تابع f به صورت $f = \{(1, 2), (0, 3), (4, 0), (3, 2)\}$ و تابع g به صورت $g = \{(4, 2), (0, -1), (1, 4), (3, 0)\}$ باشد، در این صورت تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به ازای کدام مقدار x تعریف نمی شود؟

۴) ۴

۳) ۳

۲) ۱

۱) ۰

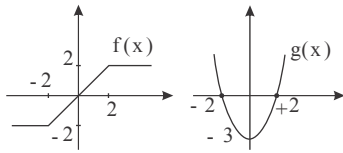
۵۹- اگر تابع f به صورت $f = \{(1, a+1), (-1, a), (3, 2)\}$ و تابع g به صورت $g = \{(1, 4), (2, 3), (-1, 5)\}$ داشته باشیم $(f+g)(1) = 7$ ، در این صورت مقدار a چقدر است؟

۴) -۲

۳) ۲

۲) -۱

۱) ۱



۶۰- با توجه به نمودار مختصاتی تابع f و g حاصل $(f - g)(2)$ چقدر است؟

- ۱ (۱) ۲ (۳)
۳ (۴) ۴ (۲)

۶۱- دامنه تابع $(f - g)(x)$ برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- ۱ (۱) $D_f \cup D_g$ ۲ (۲) $D_f \cap D_g$ ۳ (۳) $D_f - D_g$ ۴ (۴) $D_g - D_f$

۶۲- دامنه تابع $\frac{f}{g}(x)$ همواره برابر کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- ۱ (۱) $D_f \cup D_g$ ۲ (۲) $D_f \cap D_g$ ۳ (۳) $(D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\}$ ۴ (۴) $D_f - D_g$

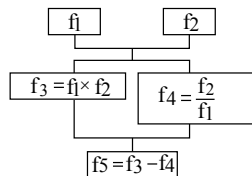
۶۳- اگر تابع $f(x) = x^2 + 3x - 1$ و $g(x) = 4x + 3$ باشد آنگاه ضابطه تابع $(f + g)(x)$ در دامنه مشترک برابر کدام گزینه است؟

- ۱ (۱) $x^2 + x + 4$ ۲ (۲) $x^2 + x - 2$ ۳ (۳) $x^2 + 7x + 4$ ۴ (۴) $x^2 + 7x + 2$

۶۴- اگر $f = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 1 \right), (-2, 3), (1, 2) \right\}$ و $g = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 3 \right), (3, -2), (1, 5) \right\}$ ، مجموعه D_{f+g} کدام است؟

- ۱ (۱) $\left\{ \frac{1}{2}, 3, 1, -2 \right\}$ ۲ (۲) $\left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$ ۳ (۳) $\{3\}$ ۴ (۴) $\left\{ \frac{1}{2}, 3 \right\}$

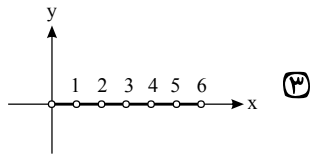
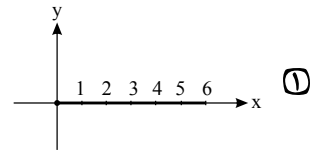
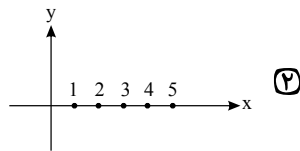
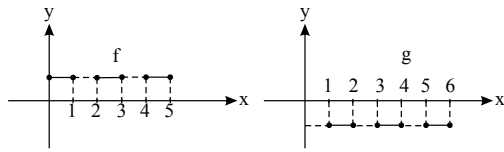
۶۵- اگر $f_1(x) = x - 1$ و $f_2(x) = x + 1$ ، با توجه به درخت روبه‌رو، حاصل $f_\Delta(x)$ به ازای $x = 3$ کدام است؟



- ۱ (۱) ۸ ۳ (۳) ۶
۲ (۲) ۴ (۴)

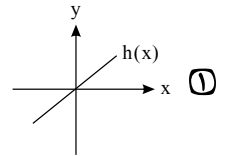
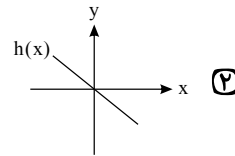
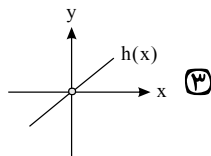
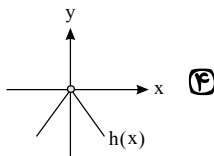


۶۶- با توجه به نمودار دو تابع f و g در شکل زیر، نمودار تابع $f + g$ کدام است؟

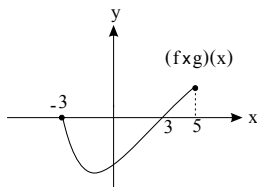


۴) تابع $f + g$ وجود ندارد.

۶۷- اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = \text{sign}(x)$ در این صورت نمودار تابع $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟



۶۸- اگر f و g دو تابع باشند و نمودار $(f \times g)(x)$ به صورت مقابل باشد، دامنه تابع $f(x)$ کدام محدوده می تواند باشد؟



۱) $-5 \leq x \leq 7$

۲) $3 \leq x \leq 5$

۳) $-3 \leq x \leq 3$

۴) $-5 \leq x \leq 3$



۶۹- اگر $f = \{(3, -1), (2, a)\}$ و $g = \{(2, -1), (4, a+1)\}$ و $(f+g)(b) = 3$ ، آن گاه $a+b$ کدام است؟

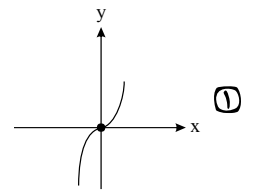
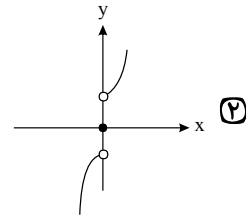
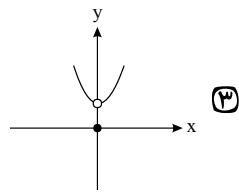
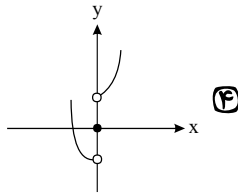
۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۱ (۱)

۷۰- اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \text{sign}(x)$ باشند، نمودار تابع $(f+g)(x)$ کدام است؟





پاسخنامه تشریحی

۱- گزینه ۲

در تابع اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول برابر باشند باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند.

$$(m^2 - 4, 5) = (m^2 - 4, m^2 - 11) \Rightarrow m^2 - 11 = 5 \Rightarrow m^2 = 16 \xrightarrow{\text{جنر}} m = \pm 4$$

$$m = 4 \Rightarrow f = \{(12, 5), (12, 2)\} \Rightarrow f \text{ تابع نیست}$$

$$m = -4 \Rightarrow f = \{(12, 5), (4, 2)\} \Rightarrow f \text{ تابع است}$$

پس فقط جواب $m = -4$ قابل قبول است.

۲- گزینه ۲ با توجه به مقادیر داده شده در جدول و کمی دقت می‌توان فهمید که ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = x^3$ است.

$$(a + 1)^3 = 216 \Rightarrow (a + 1)^3 = 6^3 \Rightarrow a + 1 = 6 \Rightarrow a = 5$$

۳- گزینه ۲ هنگامی مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تشکیل تابع می‌دهند که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن مؤلفه‌های اول برابر نداشته باشد و اگر مؤلفه‌های اول آن‌ها با هم برابر بود حتماً مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} (5, a^2 - 1) \in f \\ (5, 48) \in f \end{cases} \Rightarrow a^2 - 1 = 48 \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = \pm 7$$

$$a = 7 \Rightarrow f = \{(5, 48), (7, 3), (7, 2)\} \rightarrow \text{تابع نیست}$$

$$a = -7 \Rightarrow f = \{(5, 48), (-7, 3), (7, 2)\} \rightarrow \text{تابع است}$$

پس $a = -7$ قابل قبول است.

۴- گزینه ۲ نمودار f خطی است که از دو نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \end{vmatrix}$ می‌گذرد. معادله‌ی این خط را می‌نویسیم:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow m_{AB} = \frac{1 - 3}{2 - 5} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \\ m = \frac{2}{3} \end{cases} \xrightarrow{y - y_A = m(x - x_A)} y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow f(3) = \frac{2}{3}(3) - \frac{1}{3} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

۵- گزینه ۳ نکته: نمودار پیکانی یک رابطه زمانی تابع است که از هر عضو مجموعه اول، فقط یک پیکان خارج شود.

با توجه به گزینه‌ها و نکته بالا، تنها گزینه ۳ نشان دهنده یک تابع است.

بررسی سایر گزینه‌ها:



- گزینه ۱: از عدد ۱ دو پیکان خارج شده است.
گزینه ۲: از عدد ۳ دو پیکان خارج شده است.
گزینه ۴: از عدد ۲ سه پیکان خارج شده است.

۶- گزینه ۱ نکته: نمایش مختصاتی یک رابطه وقتی تابع است که هر خط موازی محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

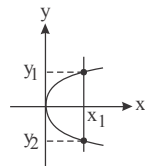
با توجه به نکته بالا با کشیدن خطوط موازی برای هر کدام از نمودارهای مختصاتی اگر خط موازی محور y ها در بیش از یک نقطه نمودار را قطع کند، تابع نیست.

۷- گزینه ۱ با توجه به نمودار مختصاتی $f(2) = 3$ و $f(-2) = -2$ در نتیجه:

$$f(2) + f(-2) = 3 + (-2) = 1$$

۸- گزینه ۳ در گزینه ۳، از آنجا که خط موازی با محور y ها وجود دارد که نمودار را در دو نقطه قطع می کند.

لذا این نمودار تابع نمی باشد. زیرا به ازای یک x دو مقدار برای y به دست می آید.



۹- گزینه ۲ با توجه به نمایش زوج مرتبی تابع f داریم:

$$f = \{(2, 5), (6, 8), (7, 2)\}$$

$$(2, 5) \Rightarrow f(2) = 5, (6, 8) \Rightarrow f(6) = 8, (7, 2) \Rightarrow f(7) = 2$$

همچنین برای $f(f(7))$ داریم:

$$f(\underbrace{f(7)}_{=2}) = f(2) = 5$$

با جایگذاری مقادیر به دست آمده داریم:

$$f(6) + f(7) = 8 + 2 = 10 \Rightarrow \frac{f(6) + f(7)}{f(f(7))} = \frac{10}{5} = 2$$

۱۰- گزینه ۳ نکته: در نمایش زوج مرتبی تابع اگر مؤلفه های اول برابر باشند باید مؤلفه های دوم هم برابر باشند.

$$A = \{(3, 5), (a-1, 2), (5, a-2), (a-2, b-3), (5, 3)\}$$

از آنجایی که مؤلفه های اول زوج مرتب های $(5, 3)$ و $(5, a-2)$ برابرند و رابطه تابع است پس مؤلفه های دوم هم باید برابر باشند:

$$a-2 = 3 \Rightarrow a = 5$$

با جایگذاری مقدار a داریم:

$$A = \{(3, 5), (4, 2), (5, 3), (3, b-3), (5, 3)\}$$

دو زوج مرتب $(3, 5)$ و $(3, b-3)$ نیز دارای مؤلفه های اول برابرند در نتیجه: $b-3 = 5 \Rightarrow b = 8$



در آخر حاصل $a + b$ برابر است با: $5 + 8 = 13$

۱۱- گزینه ۴ در نمودار تابع گزینه «۱» دامنه مجموعه نمودار اعداد حقیقی است، ولی برد آن محدود است و همه اعداد حقیقی را شامل نمی شود.

در نمودار تابع گزینه «۲» دامنه تابع $\mathbb{R} - \{0\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است.

در نمودار تابع گزینه «۳» دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی است و برد آن مقادیری از مجموعه اعداد حقیقی مثبت را شامل نمی شود.

در نمودار تابع گزینه «۴» دامنه و برد تابع برابر مجموعه اعداد حقیقی است.

۱۲- گزینه ۳ می دانیم $\sqrt{2} - 1 \simeq 0.4$ و $\sqrt{2} + 1 \simeq 2.4$ هر دو از -1 بزرگ ترند، بنابراین با استفاده از ضابطه $f(x) = \sqrt{2} - x$ داریم:

$$f(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 = 1$$

$$f(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} - (\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 = -1$$

بنابراین:

$$f(\sqrt{2} - 1) + f(\sqrt{2} + 1) = 1 - 1 = 0$$

۱۳- گزینه ۴ در محدوده $-1 \leq x \leq 1$ نمودار تابع، خطی موازی محور طول هاست، پس در این فاصله، ضابطه تابع به صورت

$f(x) = 1$ است و در فاصله $1 \leq x \leq 2$ ضابطه تابع خطی است که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ عبور می کند.

برای به دست آوردن ضابطه تابع خطی داریم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 3 = 2x - 4 \Rightarrow y = 2x - 1$$

تذکر: در $x = 1$ مقدار تابع در هر دو ضابطه یکسان است.

۱۴- گزینه ۱ چون ۲ در قسمت $x \geq 2$ است پس:

$$f(2) = 6 \times 2 - 2 = 10$$

همچنین -2 در قسمت $x < 2$ است پس:

$$f(-2) = -2 - 3 = -5$$

و در نتیجه حاصل:

$$f(2) + f(-2) = 10 + (-5) = 5$$

۱۵- گزینه ۱ تابع ثابت به ازای هر مقدار از دامنه مقدار ثابتی از برد را نتیجه می دهد، در نتیجه باید مقدار دو ضابطه این تابع با هم برابر باشند.

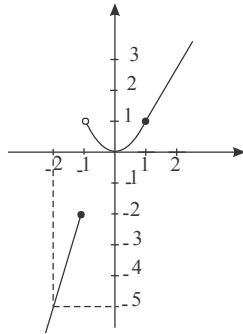


اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$x^2 - 4x + 1 = -3 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

۱۶- گزینه ۱ با توجه به اینکه تابع چند ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 1 \\ x^2 & -1 < x \leq 1 \\ 3x+1 & x \leq -1 \end{cases}$ برای x های بزرگ‌تر از یک به صورت

$2x-1$ و برای x های بزرگ‌تر از -1 و کوچک‌تر یا مساوی 1 به صورت x^2 و برای x های کوچک‌تر یا مساوی -1 به صورت $3x+1$ است.

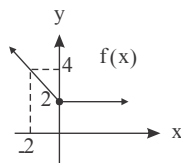


x	1	2
y	1	3
(x, y)	$(1, 1)$	$(2, 3)$

x	-1	-2
y	-2	-5
(x, y)	$(-1, -2)$	$(-2, -5)$

۱۷- گزینه ۳ ضابطه‌ها، تابع ثابت هستند. پس در نمودار f خط مایل نخواهیم داشت. (پس گزینه ۱ و ۴ رد می‌شوند) فقط کافی است خط افقی $y = 2$ را در فاصله $x > 0$ ، خط افقی $y = -2$ را در فاصله $x < 0$ و نقطه $O(0, 0)$ را رسم کنیم. لذا نمودار گزینه ۳ درست است.

۱۸- گزینه ۱ نکته: توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلف دارند، توابع چند ضابطه‌ای نامیده می‌شوند.



نکته: تابع $f(x) = \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = c \end{cases}$ را که در آن مجموعه $R_f = \{c\}$ برد تابع است، تابع ثابت می‌نامند. برد تابع ثابت، یک مجموعه تک‌عضوی است.

نکته: شیب خطی که از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد برابر $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ است.

این تابع برای $x > 0$ به صورت یک تابع با برد $\{2\}$ است و برای $x \leq 0$ به صورت یک تابع خطی است که از نقاط $(0, 2)$ و $(-2, 4)$ عبور می‌کند. بنابراین مطابق نکته، شیب این خط برابر است با:

$$m = \frac{2 - 4}{0 - (-2)} = \frac{-2}{2} = -1$$

اگر معادله خط را به صورت $y = mx + n$ در نظر بگیریم، با جایگذاری مقدار شیب و یکی از نقاط در این معادله داریم:

$$y = mx + n \xrightarrow{\text{از نقطه } (0, 2) \text{ می‌گذرد}} y = -x + n \rightarrow 2 = -1(0) + n \Rightarrow n = 2$$

پس معادله خط به صورت $y = -x + 2$ است.

بنابراین ضابطه $f(x)$ به صورت مقابل است:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x \leq 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$$



$$1 < 2 < 4 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 1 - 1 < \sqrt{2} - 1 < 2 - 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{2} - 1 < 1$$

پس برای محاسبه $f(\sqrt{2} - 1)$ می‌بایست از ضابطه دوم استفاده کنیم، در این حالت داریم:

$$f(x) = x^2 + 2x - 5 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 5 = (x + 1)^2 - 6 \xrightarrow{x = \sqrt{2} - 1}$$

$$f(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 - 6 = (\sqrt{2})^2 - 6 = 2 - 6 = -4 \quad (1)$$

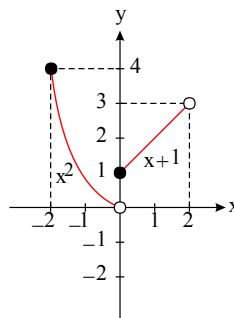
$$1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 < 2 + 1 \Rightarrow 2 < \sqrt{2} + 1 < 3$$

و برای محاسبه $f(\sqrt{2} + 1)$ از ضابطه سوم استفاده می‌کنیم که تابعی ثابت است، لذا داریم:

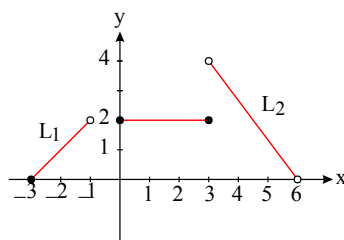
$$f(\sqrt{2} + 1) = -2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} f(\sqrt{2} - 1) + f(\sqrt{2} + 1) = -4 - 2 = -6$$

۲۰- گزینه ۲ تابع دو ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x < 0 \\ x + 1 & 0 \leq x < 2 \end{cases}$ را در قسمت‌های مختلف دامنه آن رسم می‌کنیم.



x	0	2
y	1	3



ابتدا با توجه به نمودار مختصاتی تابع ضابطه تابع را مشخص می‌کنیم.

$$L_1 : \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ شیب خط} = \frac{2 - 0}{-1 - (-3)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow y - 0 = 1(x - (-3)) \Rightarrow y = x + 3$$



$$L_1 : \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ شیب خط} = \frac{0-4}{6-3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow y-0 = -\frac{4}{3}(x-6) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 8$$

پس ضابطه تابع به صورت:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & -3 \leq x < -1 \\ 2 & 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{4}{3}x + 8 & 3 < x < 6 \end{cases}$$

حال مقادیر $f(2)$ و $f(-2)$ و $f(4)$ را مشخص می‌کنیم.

$$f(4) \xRightarrow{4 \in 3 < x < 6} f(4) = -\frac{4}{3}x + 8 = -\frac{4}{3} \times 4 + 8 = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}$$

$$f(-2) \xRightarrow{-2 \in -3 \leq x < -1} f(-2) = x + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$f(2) \xRightarrow{2 \in 0 \leq x \leq 3} f(2) = 2$$

$$f(4) + f(-2) + f(2) = \frac{8}{3} + 1 + 2 = \frac{17}{3}$$

۲۲- گزینه ۴ نکته: تابع $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = c \end{cases}$ را که در آن مجموعه تک عضوی $R_f = \{c\}$ برد تابع است، تابع ثابت می‌نامند.

با توجه به نکته، تک تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: برد به صورت $R = \{5\}$ می‌باشد، پس تابع ثابت است.

گزینه ۲: برد به صورت $R = \{a\}$ می‌باشد، پس تابع ثابت است.

گزینه ۳: برد به صورت $R = \{7\}$ می‌باشد، پس تابع ثابت است.

گزینه ۴: تابع نیست. زیرا دو زوج مرتب $(2, 2)$ و $(2, 1)$ که دارای مؤلفه اول برابر و مؤلفه دوم غیر برابر هستند، در این رابطه وجود دارند.

۲۳- گزینه ۴ نکته: در نمایش زوج مرتبی یک تابع ثابت، تمامی مؤلفه‌های دوم با هم برابرند.

چون تابع ثابت است، پس مطابق نکته داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{1} : 2a - 1 = a + 1 \Rightarrow a = 2 \\ \boxed{2} : b + 1 = a + 1 \xrightarrow{a=2} b + 1 = 3 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 2 + 2 = 4$$

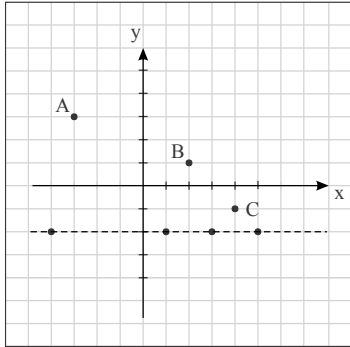
$$\begin{array}{c} \boxed{2} \\ \xrightarrow{2a-1=b+1=a+1} \\ \boxed{1} \end{array}$$



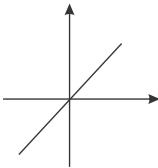
۲۴- گزینه ۳

نکته: در نمایش مختصاتی تابع ثابت، هر خط یا دسته نقاط موازی محور طول‌ها نشان دهنده یک تابع ثابت هستند.

چون ۴ نقطه روی یک خط افقی قرار دارند، پس باید برای اینکه حداقل تعداد نقاط را حذف کنیم، نقاط A, B, C را حذف کنیم. در غیر این صورت تعداد نقاطی که باید حذف شود، بیشتر از ۳ است.

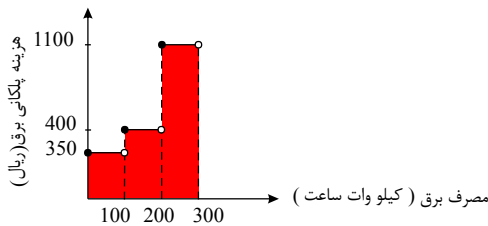


۲۵- گزینه ۴ نکته: نمودار مختصاتی مربوط به تابع همانی، همان نیمساز ناحیه اول و سوم است.



۲۶- گزینه ۳ هزینه برق مصرفی برابر مساحت زیر نمودار است که برابر است با:

$$- \circ) \times 350 + (200 - 100) \times 400 + (300 - 200) \times 1100 = 35000 + 40000 + 110000 = 185000$$



۲۷- گزینه ۱ $f(x)$ یک تابع ثابت است که به ازای هر مقدار x مقدار -1 را می‌دهد و g تابعی همانی است که ضابطه آن $g(x) = x$ است، لذا داریم:

$$A = \frac{g(2) + f(3) + g(-1)}{3f(3) + 5g(6)} = \frac{2 + (-1) + (-1)}{3 \times (-1) + 5 \times (6)} = \frac{0}{27} = 0$$

۲۸- گزینه ۳ ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است، یعنی به ازای هر مقدار از دامنه، برد آن نیز همان مقدار است:

$$f(2k+3) = k+5 \Rightarrow 2k+3 = k+5 \Rightarrow 2k-k = 5-3 \Rightarrow k = 2$$

$$f(k^2) = f(2^2) = f(4) = 4$$

۲۹- گزینه ۱ نکته: تابع $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x \end{cases}$ را همانی می‌نامند.



با توجه به نکته داریم:

$$f(3) = 3, f(-3) = -3$$

با جایگذاری مقادیر فوق در عبارت داده شده، داریم:

$$\frac{f(3) + 2f(-3)}{2f(3) - f(-3)} = \frac{3 + 2 \times (-3)}{2 \times 3 - (-3)} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

۳۰- گزینه ۲ ثابت است پس بُرد آن، تک عضوی است. کاملاً واضح است که بُرد f برابر $\{3\}$ است، پس حاصل $(m - 2n)$ و $(m + 2n)$ هم باید برابر ۳ باشند.

$$+ \begin{cases} m - 2n = 3 \\ m + 2n = 3 \end{cases}$$

$$2m = 6 \Rightarrow m = 3 \longrightarrow n = 0$$

جایگذاری در یکی از معادلات

از طرفی g همانی است یعنی در هر زوج مرتب، عضو اول باید با عضو دوم برابر باشد.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2 \times 1 = 2$$

$$b - 2 = 8 \Rightarrow b = 8 + 2 = 10$$

$$\Rightarrow m - n + a - b = 3 - 0 + 2 - 10 = -5$$

۳۱- گزینه ۲ برای این که جدول مورد نظر مربوط به تابع ثابت باشد، می بایست اعضای برد آن با یکدیگر برابر باشند، داریم:

$$\sqrt{a} = b^2 = 2b - 1 = c \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 2b - 1 \Rightarrow b^2 - 2b + 1 = 0 \Rightarrow (b - 1)^2 = 0 \\ \Rightarrow b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 \\ \sqrt{a} = b^2 \xrightarrow{b=1} \sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1 \\ c = b^2 \xrightarrow{b=1} c = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 1 + 1 + 1 = 3$$

۳۲- گزینه ۴ تابع علامت یا $sign$ به ازای اعداد مثبت برابر ۱ و به ازای اعداد منفی برابر -۱ است؛ پس:

$$sign(-3,5) + sign(4,5) = -1 + 1 = 0$$

۳۳- گزینه ۱ ضابطه تابع $sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ است و حاصل $x - 1$ به ازای $1 < x \leq 3$ مقداری مثبت است؛)

۲ $1 < x \leq 3 \Rightarrow 0 < x - 1 \leq 2$ پس حاصل $sign(x - 1)$ به ازای $1 < x \leq 3$ برابر ۱ است.

۳۴- گزینه ۳ با توجه به اینکه تابع $sign(x)$ به ازای مقادیر منفی برابر -۱ است؛ پس:

$$-2x + 5 < 0 \Rightarrow -2x < -5 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$$



مقدار $sign(-2x + 5)$ به ازای $x > \frac{5}{2}$ برابر -1 است.

۳۵- گزینه ۴ جزء صحیح هر عدد حقیقی مانند x بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از x است و یا به عبارت دیگر اولین عدد صحیح در سمت چپ عدد مورد نظر روی محور است.
با توجه به توضیحات بالا داریم:

$$f(-3,9) = [-3,9] = -4$$

$$f(4,1) = [4,1] = 4$$

$$\Rightarrow f(-3,9) + f(4,1) = -4 + 4 = 0$$

۳۶- گزینه ۳

با توجه به اینکه عدد π تقریباً برابر $3,14$ و کم‌تر از 4 است در این صورت:

$$-2 < -\frac{4}{\pi} < -1$$

در نتیجه حاصل:

$$f\left(-\frac{4}{\pi}\right) = \left[-\frac{4}{\pi}\right] = -2$$

۳۷- گزینه ۲ با توجه به اینکه $2 < \sqrt{5} < 3$ و $-3 < -\sqrt{5} < -2$ در نتیجه:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \sqrt{5} - 2 < 1 \Rightarrow [\sqrt{5} - 2] = 0 \\ -1 < -\sqrt{5} + 2 < 0 \Rightarrow [-\sqrt{5} + 2] = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow [-\sqrt{5} + 2] + [\sqrt{5} - 2] = -1$$

۳۸- گزینه ۲ چون $0 < x < 1$ با توجه به خواص نامساوی‌ها داریم:

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \rightarrow -1 < x^2 - 1 < 0 \Rightarrow [x^2 - 1] = -1$$

۳۹- گزینه ۴ نکته: تابع جزء صحیح، تابعی است که به هر عدد صحیح k ، خود آن عدد و به تمام اعدادی که بین دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ قرار دارند، عدد صحیح k را نسبت می‌دهد، به عبارت دیگر اگر $k \leq x < k+1$ ، آن‌گاه $[x] = k$.

$$f(x) = [x] + [-x] \Rightarrow f(-1,2) = [-1,2] + [1,2] \quad (*)$$

اکنون با استفاده از نکته بالا داریم:

$$\begin{cases} -2 < -1,2 < -1 & \Rightarrow [-1,2] = -2 \\ 1 < 1,2 < 2 & \Rightarrow [1,2] = 1 \end{cases}$$

با جای گذاری این مقادیر در $(*)$ داریم:

$$f(-1,2) = -2 + 1 = -1$$



۴۰- گزینه ۴

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \\ -1, & x < 0 \Rightarrow f(-4) = -1 \end{cases}$$

همچنین از روی نمودار تابع g متوجه می شویم که: $g(3) = 4$ و $g(-1) = -2$

$$\Rightarrow \text{عبارت مطلوب} = (-1) \times (-2) + 0 \times 4 = 2$$

۴۱- گزینه ۲

$$A = \frac{3[x] - 4[-x]}{\sqrt{[x]} + [2x]} \xrightarrow{x=4,8} A = \frac{3[4,8] - 4[-4,8]}{\sqrt{[4,8]} + \underbrace{[2 \times 4,8]}_{9,6}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3 \times (4) - 4 \times (-5)}{\sqrt{4} + 9} = \frac{12 + 20}{2 + 9} = \frac{32}{11}$$

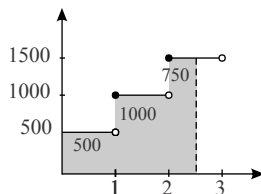
۴۲- گزینه ۴

$$f(x) = \left[\frac{-x^2}{x^2 - 1} \right]$$

$$f(3) = \left[\frac{-(3)^2}{(3)^2 - 1} \right] = \left[\frac{-9}{8} \right] = [-1,125] \xrightarrow{-2 < -1,125 < -1} f(3) = -2$$

۴۳- گزینه ۳

مساحت زیر نمودار به ازای ساعت خواسته شده برابر مبلغ پرداختی توسط مشتری است.



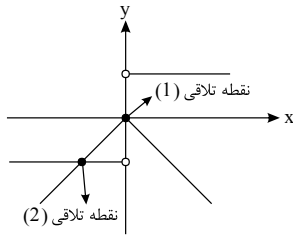
۴۴- گزینه ۳ برای مشخص کردن تعداد نقاط تلاقی دو تابع $y = \text{sign}(x)$ و $y = -|x|$ را در یک نمودار مختصاتی رسم می کنیم.

$$y = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$y = -|x| = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

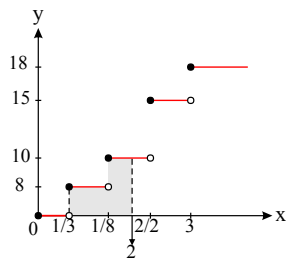


دو تابع $y = \text{sign}(x)$ و $y = -|x|$ در دو نقطه یکدیگر را قطع می کنند.



۴۵- گزینه ۳

مطابق نمودار میزان مالیات شخصی که دو میلیون حقوق دریافت می کند برابر سطح زیر نمودار است. در نتیجه داریم:



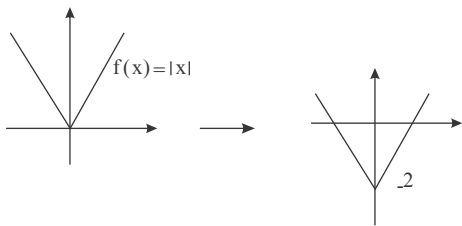
$$\begin{aligned} \text{میزان مالیات پرداختی} &= (1,8 - 1,3) \times \frac{8}{100} + (2 - 1,8) \times \frac{10}{100} \\ &= 0,5 \times \frac{8}{100} + 0,2 \times \frac{10}{100} = 0,04 + 0,02 = 0,06 \text{ میلیون تومان} = 60000 \text{ تومان} \end{aligned}$$

با توجه به نمودار برای شخصی با حقوق دریافتی کمتر از یک میلیون و سیصد هزار تومان مالیاتی دریافت نمی شود. (معاف از مالیات است)

۴۶- گزینه ۴ با قرار دادن مقدار ۲ در تابع داریم:

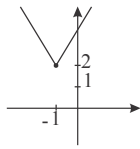
$$\begin{aligned} f(2) &= |\sqrt{3} - 2| - |2 + \sqrt{3}| \begin{matrix} \sqrt{3}-2 < 0 \\ 2+\sqrt{3} > 0 \end{matrix} = (\sqrt{3} - 2) - (2 + \sqrt{3}) \\ &= -\sqrt{3} + 2 - 2 - \sqrt{3} = -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

۴۷- گزینه ۴ برای رسم نمودار تابع $f(x) = |x| - 2$ کافیست نمودار $|x|$ را دو واحد روی محور y پایین تر بیاوریم:



۴۸- گزینه ۳ نکته: برای رسم توابع قدر مطلق به صورت $f(x) = |x + a| + b$ نمودار مختصاتی $f(x) = |x|$ را به اندازه $-a$ واحد در روی محور x ها و b واحد در روی محور y ها منتقل می کنیم.

با توجه به نکته بالا برای رسم تابع $f(x) = |x + 1| + 2$ نمودار مختصاتی $f(x) = |x|$ را ۱ واحد روی محور x ها و ۲ واحد در روی محور y ها جابه جا می کنیم.

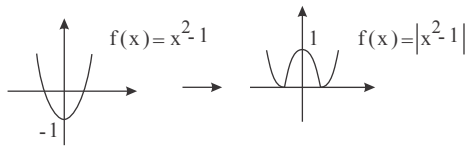


۴۹- گزینه ۳ نکته: برای رسم توابع قدر مطلق به صورت $f(x) = |x + a| + b$ نمودار مختصاتی $f(x) = |x|$ را به اندازه $-a$ واحد در روی محور x ها و $+b$ واحد در روی محور y ها منتقل می‌کنیم.

با توجه به نکته بالا نمودار مختصاتی تابع به اندازه -1 واحد روی محور x ها و به اندازه -1 واحد روی محور y ها منتقل شده است؛ پس ضابطه آن به صورت $|x + 1| - 1$ می‌باشد.

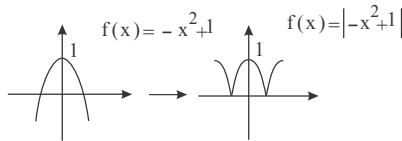
۵۰- گزینه ۴ نکته: برای رسم تابع قدر مطلق می‌توانیم نمودار مختصاتی ضابطه تابع بدون قدر مطلق را رسم کنیم؛ سپس قسمت‌های پایین محور x ها را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

با توجه به نکته بالا ابتدا نمودار مختصاتی تابع $f(x) = x^2 - 1$ را رسم می‌کنیم؛ سپس قسمت‌های پایین محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



۵۱- گزینه ۴ نکته: برای رسم تابع قدر مطلق می‌توانیم نمودار مختصاتی ضابطه تابع بدون قدر مطلق را رسم کنیم سپس قسمت‌های پایین محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

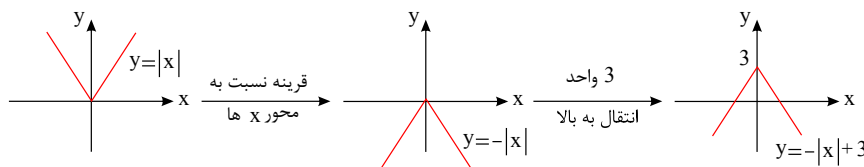
ابتدا نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 1$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های پایین محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



۵۲- گزینه ۳ نکته: برای رسم تابع $y = f(x) + k$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و به اندازه k واحد روی محور y ها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ حرکت در جهت مثبت محور y ها و اگر $k < 0$ حرکت در جهت منفی محور y ها است.

نکته: برای رسم نمودار $y = -f(x)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

فرآیندی که علی طی کرده است به صورت زیر است:



بنابراین ضابطه این تابع به صورت $f(x) = -|x| + 3$ است.

۵۳- گزینه ۴

نکته: با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

$$|3x - a| = \begin{cases} 3x - a & 3x - a \geq 0 \\ -(3x - a) & 3x - a < 0 \end{cases}$$

با توجه به نکته می‌توان نوشت:

برای تعیین حدود x داریم:



$$\begin{cases} 3x - a \geq 0 \Rightarrow 3x \geq a \Rightarrow x \geq \frac{a}{3} \\ 3x - a < 0 \Rightarrow 3x < a \Rightarrow x < \frac{a}{3} \end{cases}$$

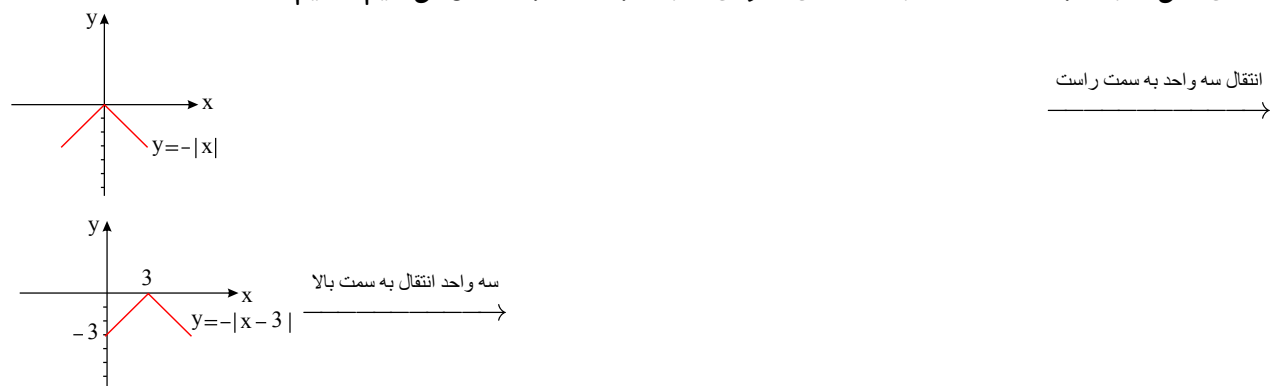
$$\frac{a}{3} = 2 \Rightarrow a = 6$$

با توجه به صورت سؤال داریم:

۵۴- گزینه ۴ در تابع گزینه «۴» ریشه عبارت داخل قدر مطلق (۵-) است، لذا به کمک آن، تابع را دو ضابطه‌ای می‌کنیم، اگر $x \geq -5$ باشد، حاصل (۵ + x) نامنفی است، پس خودش از قدر مطلق خارج می‌شود ولی اگر $x < -5$ باشد، حاصل (۵ + x) منفی است و قرینه‌اش از قدر مطلق خارج خواهد شد، لذا:

$$y = -|x + 5| - 3 = \begin{cases} -x - 8 & , \quad x \geq -5 \\ x + 2 & , \quad x < -5 \end{cases}$$

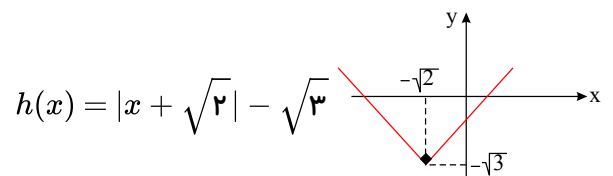
۵۵- گزینه ۲ برای رسم نمودار تابع $y = -|x - 3| + 3$ ابتدا نمودار $y = -|x|$ را رسم می‌کنیم. سپس نمودار را در راستای افقی ۳ واحد به سمت راست و در راستای عمودی ۳ واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم، داریم:



با توجه به شکل مساحت قسمت رنگی برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

۵۶- گزینه ۳ فقط نمودار مربوط به گزینه «۳» با ضابطه آن هم‌خوانی ندارد. نمودار مربوط به ضابطه این گزینه به صورت زیر است:

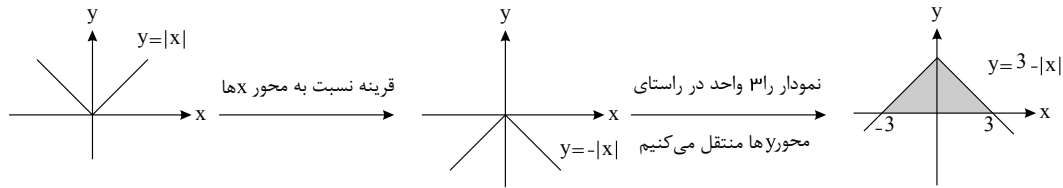


همچنین ضابطه مربوط به نمودار داده شده در گزینه «۳» برابر با $h(x) = |x - \sqrt{2}| - \sqrt{3}$ است.

۵۷- گزینه ۲ ابتدا نمودار $y = 3 - |x|$ را با استفاده از انتقال نمودار $y = |x|$ رسم می‌کنیم.



ابتدا نمودار $y = |x|$ را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.



مساحت محدود بین نمودار و محور x ها برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times (3 - (-3)) \times 3 = \frac{6}{2} \times 3 = 9$$

۵۸- گزینه ۳ تابع $\frac{f}{g}(x)$ در دامنه مشترک و در $g(x) \neq 0$ تعریف می شود.

دامنه دو تابع f و g یکسان است، ولی تابع $g(x)$ به ازای ۳ برابر صفر است پس $\frac{f}{g}(3)$ تعریف نشده است.

۵۹- گزینه ۳ با توجه به اینکه $(f + g)(1) = f(1) + g(1)$ (۱ عضو در دامنه مشترک دو تابع است)

$$f(1) = a + 1, g(1) = 4$$

$$\Rightarrow (f + g)(1) = f(1) + g(1)$$

$$7 = a + 1 + 4 \Rightarrow 7 = a + 5 \Rightarrow a = 2$$

۶۰- گزینه ۳ با توجه به نمودار مختصاتی تابع f و g حاصل $f(2)$ برابر ۲ و $g(2)$ برابر صفر است؛ پس:

$$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 2 - 0 = 2$$

(دقت شود که نقطه ۲ در دامنه مشترک دو تابع قرار دارد.)

۶۱- گزینه ۲ دامنه تابع $(f - g)(x)$ برابر: اشتراک دامنه تابع f با g یعنی $(D_f \cap D_g)$ است.

۶۲- گزینه ۳ دامنه تابع $\frac{f}{g}(x)$ برابر اشتراک دامنه دو تابع f و g منهای مقدارهایی که تابع g در آن صفر می شود.

$$(D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\}$$

۶۳- گزینه ۴ برای به دست آوردن ضابطه تابع $f + g$ در دامنه مشترک کفایت ضابطه دو تابع f و g را با هم جمع کنیم.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x - 1 + 4x + 3 = x^2 + 7x + 2$$

۶۴- گزینه ۲ نکته: عمل جمع روی دو تابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

با توجه به نکته، ابتدا D_f و D_g را به دست می آوریم:

$$D_f = \left\{1, -2, \frac{1}{2}\right\} \quad \text{و} \quad D_g = \left\{\frac{1}{2}, 3, 1\right\}$$



بنابراین:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \left\{1, -2, \frac{1}{2}\right\} \cap \left\{\frac{1}{2}, 3, 1\right\} = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$$

۶۵- گزینه ۳ ابتدا مقادیر تمام توابع f_1, f_2, f_3 و f_4 را به ازای $x = 3$ به دست می آوریم.

$$f_1(x) = x - 1 \Rightarrow f_1(3) = 2$$

$$f_2(x) = x + 1 \Rightarrow f_2(3) = 4$$

$$f_3(x) = (f_1 \times f_2)(x) \Rightarrow f_3(3) = f_1(3) \times f_2(3) = 2 \times 4 = 8$$

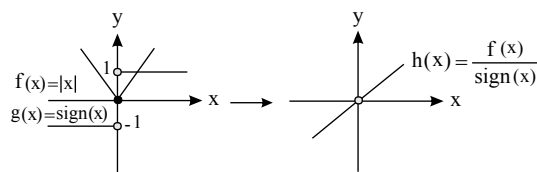
$$f_4(x) = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)(x) \Rightarrow f_4(3) = \frac{f_2(3)}{f_1(3)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$f_5(3) = f_3(3) - f_4(3) = 8 - 2 = 6$$

بنابراین:

۶۶- گزینه ۲ با توجه به نمودار دو تابع در می یابیم که دامنه دو تابع f و g فقط در نقاطی به طول اعداد طبیعی $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ با یکدیگر اشتراک دارند که به ازای طول این نقاط مقدار f برابر یک و مقدار تابع g برابر -1 است که حاصل جمع آن ها صفر خواهد شد. پس نمودار گزینه (۲) پاسخ صحیح است.

۶۷- گزینه ۳ اگر نمودار تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، داریم:



دقت کنید تابع $h(x) = \frac{|x|}{\text{sign}(x)}$ به ازای $x = 0$ تعریف نشده است، زیرا مخرج کسر صفر می شود که تعریف نشده است.

۶۸- گزینه ۱ نکته: عمل ضرب دو تابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad ; \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

با توجه به نکته، دامنه تابع $(f \times g)(x)$ ، اشتراک دامنه دو تابع f و g است. بنابراین دامنه هر دو تابع f و g باید حتماً D_{f+g} را شامل شود. با توجه به نمودار داده شده، دامنه تابع $f \times g$ محدوده $-3 \leq x \leq 5$ است. پاسخ سؤال محدوده ای است که شامل این محدوده شود. تنها گزینه ۱ این ویژگی را دارد.

۶۹- گزینه ۲ نکته: عمل جمع دو تابع به صورت زیر است:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$\begin{cases} f = \{(3, -1), (2, a)\} \\ g = \{(2, -1), (4, a+1)\} \end{cases} \Rightarrow D_{f+g} = \{2\}$$

بنابراین تابع $f + g$ فقط برای $x = 2$ قابل تعریف است. با توجه به اینکه $(f + g)(b) = 3$ می توان نتیجه گرفت که



$b = 2$. اکنون داریم:

$$(f + g)(2) = 3 \Rightarrow f(2) + g(2) = 3 \Rightarrow a + (-1) = 3 \Rightarrow a = 4$$

بنابراین: $a + b = 4 + 2 = 6$

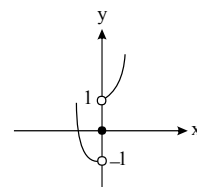
۷- گزینه ۴

کافی است ضابطه ها را بنویسیم و سپس باهم جمع کنیم:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x > 0 \\ x^2 & , x = 0 \\ x^2 - 1 & , x < 0 \end{cases}$$



پاسخنامه کلیدی

(۱) - ۲	(۱۳) - ۴	(۲۵) - ۴	(۳۷) - ۲	(۴۹) - ۳	(۶۱) - ۲
(۲) - ۲	(۱۴) - ۱	(۲۶) - ۳	(۳۸) - ۲	(۵۰) - ۴	(۶۲) - ۳
(۳) - ۲	(۱۵) - ۱	(۲۷) - ۱	(۳۹) - ۴	(۵۱) - ۴	(۶۳) - ۴
(۴) - ۲	(۱۶) - ۱	(۲۸) - ۳	(۴۰) - ۴	(۵۲) - ۳	(۶۴) - ۲
(۵) - ۳	(۱۷) - ۳	(۲۹) - ۱	(۴۱) - ۲	(۵۳) - ۴	(۶۵) - ۳
(۶) - ۱	(۱۸) - ۱	(۳۰) - ۲	(۴۲) - ۴	(۵۴) - ۴	(۶۶) - ۲
(۷) - ۱	(۱۹) - ۲	(۳۱) - ۲	(۴۳) - ۳	(۵۵) - ۲	(۶۷) - ۳
(۸) - ۳	(۲۰) - ۲	(۳۲) - ۴	(۴۴) - ۳	(۵۶) - ۳	(۶۸) - ۱
(۹) - ۲	(۲۱) - ۴	(۳۳) - ۱	(۴۵) - ۳	(۵۷) - ۲	(۶۹) - ۲
(۱۰) - ۳	(۲۲) - ۴	(۳۴) - ۳	(۴۶) - ۴	(۵۸) - ۳	(۷۰) - ۴
(۱۱) - ۴	(۲۳) - ۴	(۳۵) - ۴	(۴۷) - ۴	(۵۹) - ۳	
(۱۲) - ۳	(۲۴) - ۳	(۳۶) - ۳	(۴۸) - ۳	(۶۰) - ۳	