



نوید پورزکی

فصل هفتم : آمار و احتمال

درس اول : احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

۱) اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A|B) = \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه $P(A \cup B)$ را بدست آورید.

۲) دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم هر دو عدد روشده فرد است، چقدر احتمال دارد که مجموع دو عدد روشده شش باشد؟

۳) دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد روشده زوج باشند، به شرطی که بدانیم مجموع اعداد روشده برابر ۶ است را بدست آورید.

۴) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و داشته باشیم $P(A') = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A|B) = \frac{1}{6}$ ، مقدار $P(A \cup B)$ را بدست آورید.

۵) یک تاس را پرتاب کرده‌ایم و عدد ظاهر شده مضرب ۳ نیست. احتمال آن که عدد ظاهر شده زوج باشد، چقدر است؟



۶ در یک خانواده سه فرزندی می‌دانیم که فرزند اول آن‌ها دختر است. احتمال این که حداقل یکی از فرزندان پسر باشد را بدست آورید.

۷ در یک خانواده سه فرزندی می‌دانیم که حداقل یک فرزند دختر است. احتمال این که خانواده دارای ۲ فرزند دختر باشد را محاسبه کنید.

۸ اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(A|B)$ را محاسبه کنید.

۹ دو تاس همگنی را انداخته‌ایم. اگر حاصل جمع شماره‌های رو شده کمتر از ۶ باشد، احتمال آن که تنها شماره یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، چقدر است؟

۱۰ احتمال وقوع یک بیماری در یک جامعه آماری برابر ۱۲٪ و احتمال این که فردی این بیماری را بگیرد و درمان شود برابر ۱۰ درصد است. اگر فردی این بیماری را بگیرد، احتمال درمان او چقدر است؟

۱۱ اگر $P(A) = \frac{1}{2}$ و $P(B) = \frac{2}{5}$ و دو پیشامد A و B مستقل از هم باشند، $P(A \cup B)$ را محاسبه کنید.

۱۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشد و داشته باشیم $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ ، آنگاه $P(B')$ را بدست آورید.



۱۳) اگر ۷۵٪ افراد جامعه‌ای، دارای چشم مشک‌ی و ۴۰٪ گروه خونی نوع A باشند و یک فرد بطور تصادفی از بین آنها انتخاب شود. احتمال این که این فرد دارای چشم مشک‌ی یا گروه خونی A باشد چقدر است؟

۱۴) دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرطی که بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

۱۵) تاسی را دو بار می‌اندازیم:

الف- احتمال پیشامد A را که در آن عدد رو شده در پرتاب اول ۵ باشد.

ب- احتمال پیشامد B را که در آن مجموع اعداد رو شده در تاس ۷ باشد.

پ- آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟

۱۶) ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A ، $\frac{1}{5}$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{7}$ است. اگر ماده A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{4}$ خواهد شد. با چه احتمالی، حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

۱۷) در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ و پیشامد C عددی بزرگتر از ۲ باشد. مستقل یا غیرمستقل بودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

۱۸) احتمال اینکه رویا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر $\frac{625}{9}$ باشد، رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟



۱۹) یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به دست آورید، به شرط اینکه در دو پرتاب اول و دوم پشت ظاهر شده باشد.

۲۰) احمد به احتمال 0.7 در تیم بسکتبال مدرسه شان و به احتمال 0.8 در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می شود. احتمال های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم موردنظر انتخاب شود.

ب) در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم ها انتخاب شود.

درس دوم : آمار توصیفی

۲۱) اگر میانگین داده های $x_1 + 9$ ، $x_2 - 3$ ، $x_3 - 4$ ، $x_4 + 6$ برابر 10 باشد، میانگین داده های x_1, x_2, x_3, x_4 را بیابید.



۲۲) اگر میانگین ۲۰ داده آماری ۳۵ باشد و داده‌های ۵۲، ۴۱، ۴۹، ۴۶ را از مجموعه داده‌ها حذف کنیم، میانگین جدید چقدر است؟

۲۳) میانه داده‌های آماری ۳۰، ۲۶، ۱۵، ۱۴، ۱۷، ۲۳، ۱۲، ۲۰، ۲۵، ۲۷، ۱۹ را بدست آورید.

۲۴) در داده‌های مرتب شده ۲۹، ۲۷، ۲۲، ۲۰، x ، ۱۰، ۸، ۷، ۶، ۴

الف- اگر میانه برابر با ۱۳ باشد، x را بدست آورید.

ب- اگر میانگین برابر ۱۵ باشد، x و میانه را بدست آورید.

۲۵) در یک امتحان ریاضی نمرات ۱۵ نفر بصورت زیر است. میانه این نمرات را بدست آورید.

۵، ۹، ۱۰، ۱۴، ۱۷، ۱۹، ۱۷، ۱۵، ۱۱، ۱۲، ۳، ۷، ۴، ۷

۲۶) میانه یک مجموعه از داده‌های مرتب شده، برابر میانگین چهارمین و پنجمین داده و مجموع کل داده‌ها مساوی با ۳۶۰ گردیده است. میانگین کل داده‌ها چقدر است؟

۲۷) برای داده‌های ۸، ۱۹، ۱۷، ۳۰، ۲۴، ۲۰، ۱۲، ۳۱، ۱۴، ۱۵، ۲۱ میانه، چارک اول و چارک سوم را بیابید.



۲۸) اعداد ۱۸، ۲۹، ۳۴ به ترتیب چارک اول، میانه و چارک سوم ۸۰ داده متمایز هستند.

الف- چه تعداد از داده‌ها بیش‌تر از ۳۴ است؟

ب- چه تعداد از داده‌ها کم‌تر از ۱۸ است؟

پ- چه تعداد داده بین ۱۸ و ۳۴ است؟

۲۹) در داده‌های ۲۹، ۲۲، ۱۸، ۱۰، ۲۰، ۳۴، ۱۵، ۲۵، ۱۲، ۱۷، ۲۴، ۳۵ میانگین داده‌های بزرگتر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم چقدر است؟

۳۰) اگر دامنه تغییرات داده‌های ۳۰، m ، ۱۸، ۲۴، ۲۰، ۲۵، برابر ۱۵ باشد، m را بدست آورید.

۳۱) اگر در جامعه آماری $3 - 4b$ ، $5 - 3a$ ، $6b$ ، دامنه تغییرات برابر صفر باشد، a و b را بدست آورید.

۳۲) واریانس داده‌های ۲۶، ۱۹، ۲۲، ۲۴، ۱۵، ۲۰ را بدست آورید.

۳۳) اگر واریانس داده‌های $2a - b$ ، $7 - a - 3b$ ، برابر صفر باشد، a و b را بدست آورید.

۳۴) هشت داده آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ داریم. اگر دو داده ۱۲ و ۱۸ به آن‌ها افزوده شود، واریانس ۱۰ داده حاصل را بدست آورید.



(۳۵) اگر انحراف معیار داده های $2x - 1, 3y + 2, z - 3, 5$ برابر با صفر باشد، z, y, x را محاسبه کنید.

(۳۶) اگر داده های یک جامعه آماری را از متر به سانتی متر تبدیل کنیم، انحراف معیار جدید چگونه بدست می آید؟

(۳۷) در ۶۰ داده آماری میانگین ۳ و انحراف معیار $1/2$ محاسبه شده است. اگر به تمام داده ها ۹ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده های جدید را بدست آورید.

(۳۸) در داده های آماری با میانگین $\bar{X}$ و انحراف معیار σ اگر به هر یک از داده ها، مقدار $\bar{X}$ را اضافه کنیم تا داده های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده های قبلی می شود؟

(۳۹) کارخانه ای دو نوع لاستیک تولید می کند. میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۱۱۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار برای نوع A و B به ترتیب ۲۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰ کیلومتر است. کدام نوع لاستیک بهتر است؟

(۴۰) درستی یا نادرستی جمله های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر مقدار ثابت c از داده ها کم شود، انحراف معیار به اندازه $\sqrt{c}$ کاهش می یابد.

ب) اگر مقدار ثابت c به داده ها اضافه شود، ضریب تغییرات بزرگ تر می شود.

پ) اگر مقدار ثابت $\frac{1}{c}$ در داده ها ضرب شود، انحراف معیار $\frac{1}{c}$ برابر می شود.

ت) اگر مقدار ثابت c در داده ها ضرب شود، ضریب تغییر ثابت می ماند.





پاسخنامه تشریحی

۱

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{12}}$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{9}{12} \rightarrow \boxed{P(A \cup B) = \frac{3}{4}}$$

۲

B = پیشامد آن که هر دو عدد روشده فرد باشد، A = پیشامد آن که مجموع دو عدد ۶ باشد.

$$B = \{(1,1)(1,3)(1,5)(3,1)(3,3)(3,5)(5,1)(5,3)(5,5)\}, A \cap B = \{(1,5)(3,3)(5,1)\}$$

$$\rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{3}{9} \rightarrow \boxed{P(A|B) = \frac{1}{3}}$$

۳

A = پیشامد هر دو عدد زوج = $\{(2,2)(2,4)(2,6)(4,2)(4,4)(4,6)(6,2)(6,4)(6,6)\}$

B = پیشامد مجموع اعداد روشده برابر ۶ = $\{(1,5)(2,4)(3,3)(4,2)(5,1)\}$

$$\rightarrow A \cap B = \{(2,4)(4,2)\} \rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{P(A|B) = \frac{2}{5}}$$

۴

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{3} \rightarrow \boxed{P(A) = \frac{1}{3}}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{24}}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} \rightarrow \boxed{P(A \cup B) = \frac{13}{24}}$$

۵

A = پیشامد آن که عدد تاس مضرب ۳ نباشد = $\{1, 2, 4, 5\}$

B = پیشامد آن که عدد تاس زوج باشد = $\{2, 4, 6\}$ و $A \cap B = \{2, 4\}$

$$\rightarrow P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{4} \rightarrow \boxed{P(B|A) = \frac{1}{2}}$$

۶

A = پیشامد آن که فرزند اول دختر باشد = $\{(د پ پ)(د پ د)(د د پ)(د د د)\}$

B = پیشامد آن که حداقل یکی از فرزندان پسر باشد $A \cap B = \{(د پ پ)(د پ د)(د د پ)\}$

$$\rightarrow P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{3}{4} \rightarrow \boxed{P(B|A) = \frac{3}{4}}$$



۷

$A = \text{پیشامد آن که حداقل یک فرزند دختر باشد} = \{(د د د) (د د پ) (د پ د) (د پ پ) (پ د د) (پ د پ) (پ پ د) (پ پ پ)\}$

$B = \text{پیشامد آن که خانواده دارای ۲ فرزند دختر باشد} = \{(د د د) (د د پ) (پ د د)\}$

$$A \cap B = \{(د د د) (د د پ) (پ د د)\}$$

$$\rightarrow P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{3}{7} \rightarrow \boxed{P(B|A) = \frac{3}{7}}$$

۸

A و B دو پیشامد ناسازگار $\rightarrow A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = 0$

$$\rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} \rightarrow P(A|B) = 0$$

۹

$A =$ پیشامد آن که حاصل شماره‌های ۲ تاس کمتر از ۶ باشد

$B =$ پیشامد آن که تنها شماره یک تاس ۲ باشد

$$A = \{(1, 1)(1, 2)(2, 1)(1, 3)(2, 2)(3, 1)(1, 4)(2, 3)(3, 2)(4, 1)\}$$

$$A \cap B = \{(1, 2)(2, 1)(2, 3)(3, 2)\}$$

$$\rightarrow P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{4}{10} \rightarrow \boxed{P(B|A) = \frac{4}{10}}$$

۱۰

$A =$ پیشامد درمان شدن ، $B =$ پیشامد بیمار شدن

$$P(A) = \frac{12}{100}, P(A \cap B) = \frac{10}{100}$$

$$\rightarrow P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{12}{100}} = \frac{10}{12} \rightarrow \boxed{P(B|A) = \frac{5}{6}}$$

۱۱

$\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \rightarrow \boxed{P(A \cup B) = \frac{7}{10}}$$

۱۲

$\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ پیشامدهای A و B مستقل از هم هستند

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B) \rightarrow \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = (1 - \frac{1}{3})P(B)$$

$$\rightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{3}P(B) \rightarrow \boxed{P(B) = \frac{3}{4}}$$

$$\rightarrow P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{4} \rightarrow \boxed{P(B') = \frac{1}{4}}$$

۱۳

$B =$ پیشامد آن که فرد دارای چشم مشکمی باشد $A =$ پیشامد آن که فرد دارای گروه خونی A باشد

$\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ A و B دو پیشامد مستقل هستند

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$



$$\rightarrow P(A \cup B) = \frac{40}{100} + \frac{75}{100} - \frac{40}{100} \times \frac{75}{100} = \frac{40}{100} + \frac{75}{100} - \frac{30}{100} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{85}{100}$$

۱۴

$$\text{پیشامد هر دو عدد زوج} = A = \{(2, 2)(2, 4)(2, 6)(4, 2)(4, 4)(4, 6)(6, 2)(6, 4)(6, 6)\}$$

$$\text{پیشامد مجموع اعداد رو شده برابر ۸} = B = \{(2, 6)(3, 5)(4, 4)(5, 3)(6, 2)\}$$

$$A \cap B = \{(2, 6)(4, 4)(6, 2)\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{3}{5} \rightarrow \boxed{P(A|B) = \frac{3}{5}}$$

۱۵ الف-

$$A = \{(\omega, 1)(\omega, 2)(\omega, 3)(\omega, 4)(\omega, 5)(\omega, 6)\}, \quad n(s) = 36 \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{6}{36} \rightarrow \boxed{P(A) = \frac{1}{6}}$$

-ب

$$B = \{(1, 6)(2, 5)(3, 4)(4, 3)(5, 2)(6, 1)\} \rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(s)} = \frac{6}{36} \rightarrow \boxed{P(B) = \frac{1}{6}}$$

-پ

$$A \cap B = \{(\omega, 2)\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(s)} = \frac{1}{36}$$

$$\rightarrow P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B) \rightarrow \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \Rightarrow \text{دو پیشامد و مستقل هستند}$$

۱۶

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{1}{7}, P(B|A) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = ?$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{20} = \frac{28}{140} + \frac{20}{140} - \frac{7}{140} \rightarrow \boxed{P(A \cup B) = \frac{41}{140}}$$

۱۷

$$A = \{2, 4, 6\} \rightarrow P(A) = \frac{3}{6}, B = \{3, 6\} \rightarrow P(B) = \frac{2}{6}, C = \{3, 4, 5, 6\} \rightarrow P(C) = \frac{4}{6}$$

$$A \cap B = \{6\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \rightarrow P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B) \rightarrow \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6}$$

دو پیشامد A و B مستقل هستند.

$$A \cap C = \{4, 6\} \rightarrow P(A \cap C) = \frac{2}{6} \rightarrow P(A \cap C) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(C) \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6}$$

دو پیشامد A و C مستقل هستند.

$$B \cap C = \{3, 6\} \rightarrow P(B \cap C) = \frac{2}{6} \rightarrow P(B \cap C) \stackrel{?}{=} P(B) \cdot P(C) \rightarrow \frac{2}{6} \neq \frac{2}{6} \times \frac{4}{6}$$

دو پیشامد B و C مستقل نیستند.



پیشامد قبول شدن رویا در درس ریاضی $A =$

پیشامد قبول شدن دوست رویا در درس ریاضی $B =$

دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند در نتیجه: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(B) = x, P(A) = 2x$$

$$P(A \cup B) = 0.625 \rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{625}{1000}$$

$$\rightarrow 2x + x - (2x \cdot x) = \frac{5}{8} \rightarrow 3x - 2x^2 = \frac{5}{8} \rightarrow 24x - 16x^2 = 5$$

$$\rightarrow 16x^2 - 24x + 5 = 0 \rightarrow (4x)^2 - 6(4x) + 5 = 0 \rightarrow (4x - 1)(4x - 5) = 0$$

$$\begin{cases} 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{4} > 1 \text{ غیر قابل قبول } 1 \\ 4x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}, 2x = \frac{1}{2} \rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$n(S) = 8$$

$A = \{ (پ, پ, ر), (پ, پ, پ), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (ر, پ, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, ر, ر) \}$ در پرتاب اول و دوم پشت آمده باشد

$B = \{ (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (ر, پ, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, ر, ر) \}$ در پرتاب سوم رو آمده باشد

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{1}{2}$$

الف

$P(A) = 0.7 \rightarrow$ پیشامد انتخاب در تیم بسکتبال $A =$

$P(B) = 0.8 \rightarrow$ پیشامد انتخاب در تیم ملی فوتبال نوجوانان $B =$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{7}{10} \times \frac{8}{10} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{56}{100}$$

ب

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{10} + \frac{8}{10} - \frac{56}{100} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{94}{100}$$

$$\rightarrow P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{94}{100} \rightarrow P(A \cup B)' = \frac{6}{100}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{8}{10} = \frac{2}{10}$$



$$\rightarrow P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} \rightarrow \boxed{P(A' \cap B') = \frac{6}{100}}$$

ب

$$P(B - A) = P(B \cap A') = P(B) \cdot P(A') = \frac{8}{10} \times \frac{3}{10} \rightarrow \boxed{P(B - A) = \frac{24}{100}}$$

ت

$$\text{روش ۱: } P(B - A) + P(A - B) = P(B \cap A') + P(A \cap B') = P(B) \cdot P(A') + P(A) \cdot P(B')$$

$$= \frac{8}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{24}{100} + \frac{14}{100} \rightarrow \boxed{P(B - A) + P(A - B) = \frac{38}{100}}$$

$$\text{روش ۲: } P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{94}{100} - \frac{56}{100} \rightarrow \boxed{P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{38}{100}}$$

ث

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{10} + \frac{8}{10} - \frac{56}{100} \rightarrow \boxed{P(A \cup B) = \frac{94}{100}}$$

$$\frac{x_1 + 9 + x_2 - 3 + x_3 - 4 + x_4 + 6}{4} = 10 \rightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 8}{4} = 10$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 8 = 40 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32 \rightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 8$$

$$\text{میانگین ۲۰ داده} = \frac{\text{مجموع ۲۰ داده}}{20} \rightarrow 35 = \frac{\text{مجموع ۲۰ داده}}{20}$$

$$\rightarrow \text{مجموع ۲۰ داده} = 35 \times 20$$

$$\rightarrow \text{مجموع ۲۰ داده} = 700 \rightarrow \text{مجموع ۱۶ داده} = 700 - (46 + 49 + 41 + 52)$$

$$\text{مجموع ۱۶ داده} = 512$$

$$\text{میانگین ۱۶ داده} = \frac{\text{مجموع ۱۶ داده}}{16} = \frac{512}{16} \rightarrow \text{میانگین ۱۶ داده} = 32$$

$$12, 14, 15, 17, 19, \underline{20}, 23, 25, 26, 27, 30$$

$$\text{فرد} = \text{تعداد داده‌ها} \rightarrow Q_2 = 20$$

$$Q_2 = \frac{10 + x}{2} \rightarrow 13 = \frac{10 + x}{2} \rightarrow 10 + x = 26 \rightarrow \boxed{x = 16}$$

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \rightarrow 15 = \frac{4 + 6 + \dots + x + \dots + 29}{10} \rightarrow \boxed{15 = \frac{133 + x}{10}}$$

$$\rightarrow 133 + x = 150 \rightarrow \boxed{x = 17} \rightarrow \boxed{Q_2 = \frac{10 + 17}{2}} \rightarrow \boxed{Q_2 = 13.5}$$

$$\rightarrow 3, 4, 5, 7, 7, 9, 10, \underline{11}, 12, 14, 14, 15, 17, 17, 19$$

۲۱

۲۲

۲۳

۲۴

الف -

ب -

۲۵



$$Q_2 = 11 \rightarrow \text{تعداد داده‌ها} = 15$$

۲۶

$$Q_2 = \frac{x_4 + x_5}{2} \rightarrow \text{تعداد کل داده‌ها } N = 8$$

$$\rightarrow \bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{360}{8} \rightarrow \bar{X} = 45$$

۲۷

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$8, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 28, 30, 31$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$Q_1 = 14.5 \quad Q_2 = 19.5 \quad Q_3 = 26$$

$$Q_2 = \frac{19 + 20}{2} = 19.5 \text{ چارک دوم یا میانه}$$

$$Q_1 = \frac{14 + 15}{2} = 14.5 \text{ چارک اول}$$

$$Q_3 = \frac{24 + 28}{2} = 26 \text{ چارک سوم}$$

۲۸ الف - $\frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$ داده‌ها از چارک سوم (۳۴) بزرگ‌تر هستند یعنی: $\frac{1}{4} \times 80 = 20$

ب - $\frac{1}{4} \times 100\% = 25\%$ داده‌ها از چارک اول (۱۸) کوچک‌تر هستند یعنی: $\frac{1}{4} \times 80 = 20$

پ - $\frac{1}{2} \times 100\% = 50\%$ داده‌ها بین چارک اول (۱۸) و چارک سوم هستند یعنی: $\frac{1}{2} \times 80 = 40$

۲۹ ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم و داریم:

$$10, 12, 15, 17, 18, 20, 22, 24, 25, 29, 34, 35$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$Q_1 = 16 \quad Q_2 = 21 \quad Q_3 = 27$$

$$\rightarrow \bar{X} = \frac{17 + 18 + 20 + 22 + 24 + 25}{6} = \frac{126}{6} \rightarrow \bar{X} = 21$$

۳۰

$$m = 18 \rightarrow 18, 20, 24, 25, 30, m \rightarrow m - 18 = 15 \rightarrow m = 33$$

$$m = 30 \rightarrow m, 18, 20, 24, 25, 30 \rightarrow 30 - m = 15 \rightarrow m = 15$$

۳۱ اگر دامنه تغییرات برابر صفر باشد یعنی داده‌های جامعه آماری با هم برابرند و داریم:

$$\begin{cases} 4b - 3 = 5 \rightarrow 4b = 5 + 3 \rightarrow 4b = 8 \rightarrow b = 2 \\ 6b - 3a = 5 \rightarrow 6(2) - 3a = 5 \rightarrow 12 - 3a = 5 \rightarrow 3a = 7 \rightarrow a = \frac{7}{3} \end{cases}$$

۳۲

$$\bar{X} = \frac{20 + 15 + 24 + 22 + 19 + 26}{6} = \frac{126}{6} \rightarrow \bar{X} = 21$$

$$\sigma^2 = \frac{(20 - 21)^2 + (15 - 21)^2 + (24 - 21)^2 + (22 - 21)^2 + (19 - 21)^2 + (26 - 21)^2}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{1 + 36 + 9 + 1 + 4 + 25}{6} = \frac{76}{6} \rightarrow \sigma^2 = \frac{38}{3} \approx 12.67$$



۳۳

چون واریانس برابر صفر است، پس تمام داده‌ها به هم برابرند.

$$\begin{cases} 2a - b = 7 \\ -a - 3b = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a - b = 7 \\ -2a + 6b = 14 \end{cases} + \\ -7b = 21 \rightarrow \boxed{b = -3}, \quad 2a - (-3) = 7 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

۳۴

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_8}{8} = 15 \rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 120 \\ s^2 = \frac{(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2}{8} \\ \rightarrow (x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2 = 32$$

اگر دو داده جدید ۱۲ و ۱۸ را اضافه کنیم داریم:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_8 + 12 + 18}{8 + 2} = \frac{120 + 30}{10} \rightarrow \boxed{\bar{X} = 15} \\ \sigma^2 = \frac{(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2 + (12 - 15)^2 + (18 - 15)^2}{10} = \frac{32 + 9 + 9}{10} \\ \rightarrow \sigma^2 = \frac{50}{10} \rightarrow \boxed{\sigma^2 = 5}$$

۳۵ اگر انحراف معیار داده‌ها برابر صفر باشد، یعنی داده با هم برابرند.

$$\begin{cases} 2x - 1 = 5 \rightarrow \boxed{x = 3} \\ 3y + 2 = 5 \rightarrow \boxed{y = 1} \\ z - 3 = 5 \rightarrow \boxed{z = 8} \end{cases}$$

۳۶ اگر داده‌ها را از متر به سانتی متر تبدیل کنیم، تمام داده‌ها ۱۰۰ برابر می‌شوند و داریم:

$$\sigma_{100x} = |100| \sigma_x \rightarrow \boxed{\sigma_{100x} = 100 \sigma_x} \rightarrow \text{انحراف معیار } 100 \text{ برابر می‌شود}$$

۳۷ اضافه شدن ۹ واحد به داده‌های آماری باعث می‌شود که میانگین ۹ واحد زیاد شود و واریانس و انحراف معیار ثابت بماند. پس داریم:

$$\bar{X} = 3 + 9 \rightarrow \bar{X} = 12, \quad \sigma = 1.2 \\ \rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{1.2}{12} \rightarrow CV = 0.1$$

۳۸ اضافه شدن مقدار $\bar{X}$ به داده‌های آماری باعث می‌شود که میانگین به اندازه $\bar{X}$ زیاد شود و واریانس و انحراف معیار ثابت بماند داریم:

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{X}}, \quad CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma}{\bar{X} + \bar{X}} = \frac{\sigma}{2\bar{X}} \\ \frac{CV_{\text{جدید}}}{CV_{\text{قدیم}}} = \frac{\frac{\sigma}{2\bar{X}}}{\frac{\sigma}{\bar{X}}} \rightarrow \frac{CV_{\text{جدید}}}{CV_{\text{قدیم}}} = \frac{1}{2}$$

۳۹

$$cv_A = \frac{\sigma_A}{\bar{X}_A} = \frac{2000}{11000} = \frac{2}{11} \approx 0.18$$

$$cv_B = \frac{\sigma_B}{\bar{X}_B} = \frac{1000}{10000} = \frac{1}{10} = 0.1$$

لاستیک نوع B بهتر است؛ چون ضریب تغییرات کمتری دارد.

۴۰ الف) نادرست

ب) نادرست

پ) نادرست، زیرا انحراف معیار $\left|\frac{1}{c}\right|$ برابر می‌شود.

