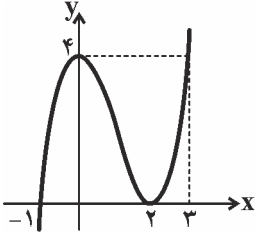


اردیبهشت ماه ۱۴۰۴		آزمون تشریحی شماره ۴		شرکت آموزشی فرهنگی متکران	
مدت آزمون: ۹۰ دقیقه		حسابان ۲			
ردیف	دوازدهم ریاضی				
بارم					
۱.	درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.				
۱	الف) تابع $f(x) = x^2 - 4x$ روی بازه $[2, +\infty)$ صعودی اکید است.				
	درست ☐	نادرست ☐			
	ب) تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است.				
	درست ☐	نادرست ☐			
۱	پ) تابع f روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر است، هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.				
	درست ☐	نادرست ☐			
۱	ت) در نقطه عطف، علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.				
	درست ☐	نادرست ☐			
۲.	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.				
۲	الف) اگر برد تابع $y = \sqrt{x}$ برابر با بازه $[0, 2]$ باشد، برد تابع $y = 2 + \sqrt{x-2}$ برابر ... است.				
	ب) دوره تناوب تابع $y = \sin(-\frac{\pi}{4}x) + 2$ برابر ... است.				
	پ) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x}$ برابر ... است.				
	ت) اگر $f'(3) = 2$ و $g(1) = 3$ و $g'(1) = -3$ باشد، حاصل $(f \circ g)'(1)$ برابر ... است.				
۳.	مقدار a, b را چنان بیابید که عبارت $p(x) = x^3 - ax + b$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x+1$ برابر ۳ شود.				
۴.	الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی و a, b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a) \leq f(b)$ نشان دهید که $a \leq b$.				
۱/۲۵	ب) اگر $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ ، آنگاه حدود x را به‌دست آورید.				
۵.	مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را تعیین کنید.				
۱	$f(x) = 7 + 24 \sin x \cos^3 x - 12 \sin x \cos x$				
۶.	جواب‌های کلی معادله $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{4} \sin 2x$ را پیدا کنید.				
۷.	نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{2x^2 + 1} + 3$ بر مجانب افقی خودش منطبق است. مقادیر a, b, c را به‌دست آورده و سپس معادله مجانب افقی را بنویسید.				
۱					
۸.	حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.				
۱/۵	الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x + 1)$				
	ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + 3x^2}{x^2}$				
۹.	اگر $f(2) = 7$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{2x - 4} = 5$ باشد. مشتق تابع $g(x) = xf(x)$ را در نقطه $x = 2$ به‌دست آورید.				
۱/۵					
۱۰.	مشتق تابع زیر را به‌دست آورید. (ساده‌کردن لازم نیست.)				
۱/۵	$f(x) = 3 \cos^4(\sqrt{x}) + 2 \tan x + \pi$				

 شرکت آموزشی فرهنگی مبتکران		آزمون تشریحی شماره ۴	اردیبهشت ماه ۱۴۰۴	
		حسابان ۲	مدت آزمون: ۹۰ دقیقه	
بارم	دوازدهم ریاضی			ردیف
۱/۵	مشتق مرتبه دوّم تابع $y = 3x + \sin x$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ به دست آورید.			۱۱
۱	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+5}$ را وقتی متغیر x از $x = -1$ به $x = 4$ تغییر می کند، به دست آورید.			۱۲
۱/۵	اگر $A(-1,1)$ نقطه عطف با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ باشد، مقادیر a, b را به دست آورید.			۱۳
۱/۵	محل تقاطع مجانب های تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ نقطه $(2,1)$ است. اگر نمودار این تابع از نقطه $(-1,0)$ بگذرد. ضابطه تابع را به دست آورید.			۱۴
۱/۷۵	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = (x+1)(x-2)^2$ را رسم کنید.			۱۵
موفق باشید.				

 شرکت آموزشی فرهنگی مبتکران	پاسخنامه آزمون تشریحی شماره ۴	اردیبهشت ماه ۱۴۰۴
	حسابان ۲ / دوازدهم ریاضی	مدت آزمون: ۹۰ دقیقه
ردیف: طراح: جابر عامری		
۱. الف) درست، ب) نادرست پ) درست ت) درست (هر مورد ۰/۲۵ نمره)	۲. الف) [۲, ۴] ب) ۴ پ) ۰ ت) ۶- (هر مورد ۰/۵ نمره)	
۳. $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ $p(x) = x^3 - ax + b \xrightarrow{x=2} p(2) = (2)^3 - a(2) + b$ $\xrightarrow{p(2)=0} 8 - 2a + b = 0 \Rightarrow -2a + b = -8 \quad (1) \quad (0/25)$ $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ $p(x) = x^3 - ax + b \xrightarrow{x=-1} p(-1) = (-1)^3 - a(-1) + b$ $\xrightarrow{p(-1)=3} -1 + a + b = 3 \Rightarrow a + b = 4 \quad (2) \quad (0/25)$ $\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} -2a + b = -8 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow -3a = -12 \Rightarrow a = 4 \quad (0/25), b = 0 \quad (0/25)$	۴. الف) فرض کنید که $a \leq b$ نباشد، پس $a > b$. بنابر این که تابع f صعودی اکید است، پس $f(a) > f(b)$. و این با فرض مسأله تناقض دارد. لذا باید $a \leq b$ باشد. (۰/۵) ب) تابع $f(x) = \log x$ ، یک تابع (۰/۲۵) صعودی اکید است (۰/۲۵). لذا از نامساوی $\log(x+1) \leq \log(2x-3)$ نتیجه می‌شود که $x+1 \leq 2x-3$ پس $x \geq 4$. (۰/۵)	
۵. $f(x) = 7 + 12 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1)$ $= 7 + 6(2 \sin x \cos x)(2 \cos^2 x - 1)$ $= 7 + 6(\sin 2x)(\cos 2x)$ $= 7 + 3(2 \sin 2x \cos 2x) = 7 + 3 \sin 4x \quad (0/5)$ $\min = - a + c = -3 + 7 = 4$ کم‌ترین مقدار (۰/۲۵) $\max = a + c = 3 + 7 = 10$ بیشترین مقدار (۰/۲۵)	۶. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{4} \sin 2x$ $\Rightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = 1 - \frac{1}{4} \sin 2x$ $\Rightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \frac{1}{4} \sin 2x) = 1 - \frac{1}{4} \sin 2x$ $\Rightarrow (1 - \frac{1}{4} \sin 2x)(\sin x + \cos x - 1) = 0 \quad (0/25)$ $\begin{cases} 1 - \frac{1}{4} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 4 \text{ غیرممکن} & (0/25) \\ \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 2k\pi, x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} & (0/25) \end{cases}$ یا به روش دیگر دو طرف را به توان دو می‌رسانیم: $1 + 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \text{ یا } \cos x = 0$ $\Rightarrow x = k\pi \text{ یا } x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ از به توان ۲ رساندن دو جواب اضافی داریم، پس باید مضرب‌های زوج π را در نظر بگیریم.	

 شرکت آموزشی فرهنگی مبتکران	پاسخنامه آزمون تشریحی شماره ۴	اردیبهشت ماه ۱۴۰۴
	حسابان ۲ / دوازدهم ریاضی	مدت آزمون: ۹۰ دقیقه
طراح: جابر عامری		ردیف
۷. بنا به صورت مسأله تابع f باید تابع ثابت باشد. باید $b = 0$ و $\frac{a}{2} = \frac{c}{1}$ (۰ / ۲۵) پس $a = 2c$ و تبدیل به تابع ثابت $f(x) = c + 3$ (۰ / ۵) می شود و مجانب خودش است.		۷.
۸. الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3) = +\infty$ (۰ / ۷۵) ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x + 3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2} = 1 + 3 = 4$ (۰ / ۷۵)		۸.
۹. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{2x - 4} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \Delta \xrightarrow{\times 2} f'(2) = 10$ (۰ / ۵) $g(x) = xf(x) \Rightarrow g'(x) = f(x) + xf'(x) \xrightarrow{x=2} g'(2) = f(2) + 2f'(2) = 7 + 2(10) = 27$ (۰ / ۵)		۹.
(۰ / ۷۵) (۰ / ۷۵) $f'(x) = -12\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cos^2(\sqrt{x}) \sin(\sqrt{x}) + 2(1 + \tan^2 x)$		۱۰.
$y = 3x + \sin x \Rightarrow y' = 3 + \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x$ (۱) $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ (۰ / ۵)		۱۱.
$f(-1) = 2, f(4) = 3$ (۱) آهنگ متوسط تغییر $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{3 - 2}{4 + 1} = \frac{1}{5}$		۱۲.
۱۳. $f(-1) = 1 \Rightarrow -a + b + 2 = 1 \Rightarrow a - b = 1$ (۰ / ۵) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$ $f''(x) = 6ax + 2b \xrightarrow{A(-1,1)} f''(-1) = 6a(-1) + 2b$ (۰ / ۲۵) $\xrightarrow{f''(-1)=0} -6a + 2b = 0 \Rightarrow -3a + b = 0$ (۰ / ۲۵) $\Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ -3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$ (۰ / ۲۵) (۰ / ۲۵)		۱۳.
$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ (۰ / ۲۵) (۰ / ۲۵) $x = 2 \xrightarrow{cx+d=0} 2c + d = 0 \Rightarrow d = -2c$ (۰ / ۲۵) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a}{c} \xrightarrow{y=1} \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c$ (۰ / ۲۵)		۱۴. مرکز تقارن محل تقاطع مجانب های تابع است.
		نقطه $(-1, 0)$ روی نمودار تابع قرار دارد. پس:
$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \xrightarrow{(-1,0)} \frac{-a + b}{-c + d} = 0 \Rightarrow a = b$		
		در نهایت داریم:
$f(x) = \frac{cx + c}{cx - 2c} \Rightarrow f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$ (۰ / ۵)		

 شرکت آموزشی فرهنگی مبتکران	پاسخنامه آزمون تشریحی شماره ۴	اردیبهشت ماه ۱۴۰۴
	حسابان ۲ / دوازدهم ریاضی	مدت آزمون: ۹۰ دقیقه
طراح: جابر عامری		
$f(x) = (x+1)(x-2)^2$ $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = (x-2)(3x)$ $\xrightarrow{f'(x)=0} x=0, x=2$ (۰ / ۲۵) (۰ / ۲۵) (۰ / ۲۵) x y ۳ ۴ ۱ ۲ -۱ ۰  رسم شکل (۰ / ۷۵) (۰ / ۲۵) x y -∞ ↗ ۴ ↘ ۰ ↗ +∞ max min y + ۰ - ۰ + + ۰ - ۰ + x -∞ ۰ ۲ +∞ y' + ۰ - ۰ + ۱۵.		