



۱ تابع  $f(x) = mx^2 - nx - k$  در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعه زیر، تابع باشد، مقدار  $f(\sqrt{5})$  کدام است؟

$$\{(m, n-1), (0, k), (n-1, m^2 + 2m-1), (3k+2, 2k+1)\}$$

$$-\sqrt{5} \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

$$\sqrt{5} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ تابع  $f$  روی  $\mathbb{R}$  اکیداً نزولی است. اگر  $f(3) = 0$  باشد، دامنه  $g(x) = \sqrt{x^2 f(x)}$  شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

$$2 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳

فاصله نقطه تقاطع تابع  $y = x^3 + 3x - 12$  با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

(۲)  $\sqrt{3}$

(۱)  $2\sqrt{3}$

(۴)  $\sqrt{2}$

(۳)  $2\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۴

تابع  $f(x) = (-9 + k^2)x^3 + 5$  اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح  $k$ ، چقدر است؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۶

(۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵

در بازه‌ای که تابع با ضابطه  $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$  اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع  $g(x) = 2x^2 - x - 10$  در چند نقطه مشترک هستند؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) فاقد نقطه مشترک

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

تابع با ضابطه  $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$  در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

- (۱)  $(-\infty, 2)$  (۲)  $(-1, +\infty)$   
(۳)  $(-1, 2)$  (۴)  $(2, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

تابع با ضابطه  $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$  در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

- (۱)  $(-\infty, -2)$  (۲)  $(-\infty, 1)$   
(۳)  $(-2, 1)$  (۴)  $(1, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

فرض کنید برد تابع  $f(x) = 2\sqrt[3]{4\cos^2(x)-1} - 2\sqrt[3]{1-4\cos^2(x)}$  به صورت  $[a, b]$  باشد. مقدار  $b - a$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{9}{4}$  (۲)  $\frac{15}{4}$   
(۳)  $\frac{9}{2}$  (۴)  $\frac{21}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

اگر  $f(x) = [x] - x$  و  $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$  باشند، برد تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱)  $[-1, 1)$  (۲)  $(-1, 1]$   
(۳)  $[1, +\infty)$  (۴)  $(-\infty, 1]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

فرض کنید  $g(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$  و  $f(x) = 1 - x^2$ . تعداد نقاط ناپیوستگی تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱  
(۳) ۲ (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

اگر  $f(x) = x^2 + x - 2$  و  $g(x) = \frac{1}{4}(x - 3)$ ، آنگاه مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع  $f \circ g$  که در زیر محور  $x$  ها قرار می‌گیرند برابر کدام بازه است؟

- (۱)  $(-5, 1)$  (۲)  $(-1, 5)$   
(۳)  $(-2, 1)$  (۴)  $(1, 5)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

اگر  $f(x) = x^2 + 3x$  و  $g(x) = -\frac{1}{4}x + 2$ ، آنگاه مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع  $g \circ f$  که در بالای محور  $x$  ها قرار می‌گیرند برابر کدام بازه است؟

- (۱)  $(-4, 1)$  (۲)  $(-3, 2)$   
(۳)  $(-2, 1)$  (۴)  $(-1, 4)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۳

اگر  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$  و  $g(x) = \left(\frac{1}{f}\right)^x$  باشند، دامنه تابع fog، کدام است؟

(۲)  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

(۱)  $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

(۴)  $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

(۳)  $(-2, 0)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۴

اگر  $f(x) = \sqrt{3-x}$  و  $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$  باشند، دامنه تابع fog، کدام است؟

(۲)  $[-2, 0]$

(۱)  $[-4, 2]$

(۴)  $[-4, -2] \cup (0, 2]$

(۳)  $[-4, -1] \cup (1, 2]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۵

اگر  $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$  آنگاه  $f(1-x)$  کدام است؟

(۲)  $x^2 + 3$

(۱)  $x^2 + 1$

(۴)  $x^2 - 4x + 5$

(۳)  $x^2 + 4x + 5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

اگر  $f(x) = x^2 - x - 2$  و  $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آنگاه  $(f + g)(x)$  کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- (۱)  $x^2 - 1$  (۲)  $x^2 + 1$   
(۳)  $x^2 - 2x$  (۴)  $x^2 + 2x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

اگر  $f(x) = x + \sqrt{x}$ ،  $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$  و  $g(f(a)) = 5$ ، آنگاه عدد  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲  
(۳) ۳ (۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

اگر  $f(x) = |x|$  و  $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، آنگاه حاصل  $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$ ، کدام است؟

- (۱)  $4(1 - \sqrt{2})$  (۲)  $4(\sqrt{2} - 1)$   
(۳) ۴ (۴)  $4\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

اگر  $f(x) = \sqrt{x + |x|}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$ ، دامنه تابع  $g \circ f$  کدام است؟

(۲)  $\mathbb{R} - \{0, 4\}$

(۱)  $(0, 4) \cup (4, +\infty)$

(۴)  $(0, \infty)$

(۳)  $\mathbb{R} - \{0\}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$  و  $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$ ، تابع  $g \circ f^{-1}$  کدام است؟

(۲)  $\{(2, 4), (3, 5)\}$

(۱)  $\{(1, 3), (0, 0)\}$

(۴)  $\{(5, 3), (-1, 1)\}$

(۳)  $\{(2, 0), (-1, 4)\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

اگر  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  و  $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ ، مقدار  $g(1)$  کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۵

(۳) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۲۲

اگر  $f(x) = 2x^2 + 4$  و  $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$  مقدار  $g(-2)$  کدام است؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۲

(۳) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۳

نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = 4x - x^2$  را در امتداد محور  $x$  ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $f$ ، از مبدأ مختصات کدام است؟

(۲) ۲

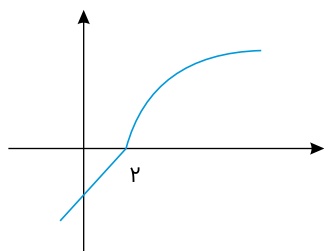
(۱) ۱

(۴)  $\sqrt{10}$ (۳)  $2\sqrt{5}$ 

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۴

اگر  $f(x) = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right|$  و شکل زیر نمودار تابع  $g(x)$  باشد، معادله  $g(f(g(x+2))) = 0$  چند ریشه دارد؟



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \log_f(|x^2 - 2| - x)$  کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$   
 (۲)  $(-\infty, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$   
 (۳)  $[-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$   
 (۴)  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

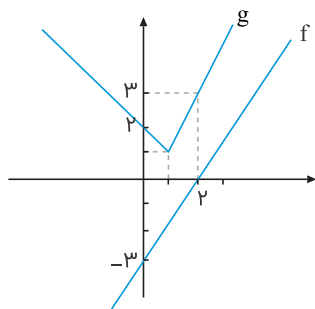
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

نمودار منحنی  $y = \sqrt{\sqrt{x} + 3}$  را  $k$  واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم، که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور  $x$  ها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار منحنی به دست آمده قرار دارد؟

- (۱)  $(1 - \sqrt{5}, 0)$   
 (۲)  $(-\sqrt{5}, 0)$   
 (۳)  $(0, 1 - \sqrt{5})$   
 (۴)  $(0, -\sqrt{5})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

باتوجه به نمودارهای  $f$  و  $g$  در شکل زیر، حاصل  $\text{gof}^{-1}(-2) \times \text{gog}(0)$  کدام است؟



(۱) ۶

(۲) ۴

(۳) -۴

(۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

با فرض  $x \geq 2$ ؛  $f(x) = x^2 - 4x + 9$  و  $g(x) = \frac{3-x}{2}$ ، حاصل  $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ ، کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۹

اگر  $f(x) = x + \sqrt{x}$  و  $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$  باشند، مقدار  $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$  کدام است؟

(۲)  $\frac{3}{5}$   
(۴)  $\frac{3}{4}$

(۱)  $\frac{2}{5}$   
(۳)  $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۳۰

اگر مجموعه جواب نامعادله  $|x+1| - 1 < |x^2 - 2|$  بازه  $(a, b)$  باشد، طول وسط این بازه کدام است؟

(۲) ۱

(۱) ۰/۵

(۴) ۲

(۳) ۱/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۱

اگر  $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$  و  $g(x) = x^3 + x$  باشند، مقدار  $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$  کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱/۵

(۴) ۳

(۳) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

تابع با ضابطه  $g(x) = x - \sqrt{x}$  مفروض است. اگر نمودار تابع  $f$  محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول های ۶ و  $-\frac{1}{4}$  قطع کند، آنگاه نمودار تابع  $f \circ g$  محور  $x$  ها را با کدام طول قطع می کند؟

(۱)  $\frac{1}{9}$  و ۴

(۲)  $\frac{1}{4}$  و ۹

(۳)  $\frac{1}{4}$  و ۴

(۴) ۹ و ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

نمودار تابع  $y = x^2 - x - 3$  را ۲ واحد به طرف  $x$  های منفی، سپس ۹ واحد به طرف  $y$  های منفی انتقال می دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور  $x$  ها است؟

(۱)  $(-5, 2)$

(۲)  $(-5, 3)$

(۳)  $(-2, 3)$

(۴)  $(-2, 5)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

نمودار تابع  $y = -x^2 + 2x + 5$  را ۳ واحد به طرف  $x$  های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف  $y$  های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

(۲, ۵) (۲)

(۳, ۴) (۱)

(۲, ۶) (۴)

(۳, ۵) (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

اگر  $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-x^2}$  باشند، دامنه تابع  $g \circ f$  کدام است؟

$\{0\}$  (۲)

$[0, 1)$  (۱)

$\mathbb{R} - \{1, -1\}$  (۴)

$(-1, 1)$  (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۳۶

نمودار منحنی  $y = \sqrt{4-x}$  را  $k$  واحد در راستای قائم و  $k - 2$  واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را یک واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد منحنی به دست‌آمده با محور  $x$ ها، کدام است؟

(۲) -۳

(۱) -۴

(۴) ۲

(۳) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۳۷

در تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & ; x > 3 \\ 2x + 3 & ; x \leq 3 \end{cases}$  مقدار  $f(f(5)) + f(f(1))$  کدام است؟

(۲) ۷

(۱) ۶

(۴) ۹

(۳) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۳۸

اگر  $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}}$  باشد، حاصل  $f \circ f \circ f(\sqrt{2})$  کدام است؟

(۲)  $\sqrt{2}$ (۱)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴)  $\frac{1}{2}$ 

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۳۹

اگر  $gof(x) = 5x^2 + 11$  و  $f(x) = 2x$  باشد، کمترین مقدار  $g(x - 7)$  چقدر است؟

(۱) ۳

(۲) ۷

(۳) ۹

(۴) ۱۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴۰

نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در امتداد محور  $x$  ها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور  $x$  ها را در امتداد محور  $y$  ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $f$ ، از مبدأ مختصات کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (۴)  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

اگر  $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2} & ; x < 0 \\ 2x & ; x \geq 0 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} -2x & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$ ، کدام تابع در  $x = 0$  پیوسته است؟

(۲)  $f \circ f$

(۱)  $f + g$

(۴)  $f \circ g$

(۳)  $g \circ f$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

تابع  $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$  و  $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$  مفروض‌اند. اگر  $(4, 2) \in f \circ g$  و  $(4, 1) \in g \circ f$  باشند، دوتایی  $(a, b)$  کدام است؟

(۲)  $(4, 3)$

(۱)  $(3, 4)$

(۴)  $(5, 4)$

(۳)  $(4, 5)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

تابع  $y = 2^{x+|x|}$  را ۳ واحد در امتداد محور  $x$  ها در جهت منفی و سپس در امتداد محور  $y$  ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور  $x$  ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۱)  $-\frac{5}{2}$

(۳)  $\frac{5}{2}$

(۲)  $-\frac{3}{2}$

(۴)  $\frac{7}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$  و  $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$  باشند، تابع  $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ ، کدام است؟

(۱)  $\{(4, 2), (5, 2)\}$

(۳)  $\{(5, 2), (2, 4)\}$

(۲)  $\{(4, 2), (3, 5)\}$

(۴)  $\{(3, 5), (2, 4)\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} -1 & ; x < -1 \\ x & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases}$  و  $g(x) = 1 - x^2$ ، ماکزیمم مقدار تابع  $g \circ f - f \circ g$ ، کدام است؟

(۲) صفر

(۱) -۱

(۴) ۱

(۳)  $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع  $y = |x| - x$  و  $y = 2 - \frac{3}{4}x$ ، کدام است؟

(۲) ۴

(۱)  $\frac{8}{3}$

(۴) ۶

(۳)  $\frac{16}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۴۷

اگر  $f(x) = \sqrt{2-x}$  و  $g(x) = \log(x^2 - 15x)$  باشند، دامنه تابع  $f \circ g$ ، کدام است؟

(۲)  $[-5, 0) \cup (15, 20]$

(۱)  $(0, 5] \cup [20, 25)$

(۴)  $[-5, 0)$

(۳)  $(15, 20]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۴۸

اگر  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  و  $g(x) = x+4$  باشند، جواب معادله  $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$  کدام است؟

(۲)  $1$  و  $-7$

(۱)  $-1$  و  $-7$

(۴)  $1$  و  $7$

(۳)  $-1$  و  $7$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۴۹

اگر  $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$  باشد، ضابطه  $f(x)$  برابر با کدام است؟

(۲)  $x^2 - 2x - 1$

(۱)  $x^2 - x + 3$

(۴)  $x^2 - x + 1$

(۳)  $x^2 - 2x + 1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

نمودار تابع  $y = 2|\sin x|$  را ابتدا به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  در امتداد محور  $x$  ها در جهت مثبت و سپس  $\frac{\pi}{2}$  در امتداد محور  $y$  ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم، تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور  $x$  ها در فاصله  $[0, \pi]$  کدام است؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۴

(۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 - 2x$  ;  $(x > 1)$  مفروض است. قرینه نمودار آن نسبت به محور  $x$  ها را ۱۶ واحد در امتداد محور  $y$  ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $f$ ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

(۲)  $6\sqrt{2}$ (۱)  $4\sqrt{5}$ (۴)  $2\sqrt{5}$ (۳)  $5\sqrt{2}$ 

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع  $y = 5 - |x - 1|$  و  $y = |x|$ ، کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

اگر  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$ ، آنگاه  $f(x) + \frac{1}{3}f(0) + f(2x + 1)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{x^2 + x}$ (۲)  $\frac{1}{x^2 - x}$ (۳)  $\frac{2}{x^2 + x}$ (۴)  $\frac{2}{x^2 - x}$ 

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۹

اگر خروجی از ماشین شکل زیر  $\frac{4}{3}$  باشد، مقدار ورودی کدام است؟

$$\text{خروجی} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+1} \rightarrow 2x-2 \rightarrow \text{ورودی}$$

$$\frac{7}{2} \quad (2)$$

$$4 \quad (4)$$

$$\frac{11}{9} \quad (1)$$

$$3 \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

اگر  $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$  و  $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$  دو تابع باشند، برد تابع  $(g^{-1} \circ f) - f$  کدام است؟

$$\{2, 3\} \quad (2)$$

$$\{2, -1\} \quad (4)$$

$$\{-1, 4\} \quad (1)$$

$$\{3, 4\} \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۶

دو تابع با ضابطه های  $g = \{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$  و  $f(x) = 2x - 5$  مفروض اند. اگر  $(f^{-1} \circ g)(a) = 6$  باشد،  $a$  کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۵۷

اگر  $f(x) = (2x - 3)^2$  و  $g(x) = x + 2$  نمودارهای دو تابع  $f$  و  $f \circ g$  با کدام طول متقاطع اند؟

(۲)  $\frac{1}{2}$ 

(۱) -۱

(۴)  $\frac{3}{2}$ 

(۳) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۵۸

فرض کنید  $f(x) = x(1 - x^2)$  و  $g(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$ . تعداد نقاط ناپیوستگی تابع  $(f \circ g) \circ g$ ، کدام است؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۳

(۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$  را در امتداد محور  $x$  ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور  $y$  ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $f$ ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

(۲)  $6\sqrt{7}$

(۱)  $4\sqrt{15}$

(۴)  $6\sqrt{10}$

(۳)  $4\sqrt{17}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

نمودارهای دو تابع  $y = |x - 2| + |x + 1|$  و  $y = x + 7$ ، در دو نقطه  $A$  و  $B$  متقاطع هستند. اندازه پاره خط  $AB$ ، کدام است؟

(۲) ۱۲

(۱)  $8\sqrt{2}$

(۴)  $10\sqrt{2}$

(۳) ۱۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

اگر  $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$  و  $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$  باشند، ضابطه تابع  $g(f(x))$  کدام است؟

(۲)  $-x$

(۱)  $x$

(۴)  $x+1$

(۳)  $-x-1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۲

اگر  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  و  $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$  باشند، ضابطه تابع  $g(f(x))$  کدام است؟

(۱)  $x-1$

(۲)  $x+1$

(۳)  $x$

(۴)  $2x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۶۳

اگر  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-x^2}$  باشند، دامنه تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟

(۱)  $[0, 1]$

(۲)  $[-1, 1]$

(۳)  $\mathbb{R}$

(۴)  $\mathbb{R} - (-1, 1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۴

دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بیان شده‌اند، در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

(۱)  $f \cup g$

(۲)  $f \cap g$

(۳)  $f - g$

(۴)  $f \circ g$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

قرینه نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$ ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف  $x$ های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱)  $-۲$  (۲)  $۵/۰$   
(۳)  $۱$  (۴)  $۵/۱$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

ابتدا قرینه نمودار تابع  $f(x) = (x - 1)^2$  را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

- (۱)  $۰, ۲$  (۲)  $-۱, ۱$   
(۳)  $-۱, ۲$  (۴)  $-۲, ۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

قرینه نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$ ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

- (۱)  $x = ۱$  (۲)  $x = ۵/۱$   
(۳)  $x = ۲$  (۴)  $x = ۵/۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

اگر  $f(x) = 2x - [2x]$  و  $g(x) = -x^2 + 4x$  باشند، برد تابع  $g \circ f$  کدام است؟

(۲)  $[0, 3)$

(۱)  $[0, 2)$

(۴)  $[1, 4)$

(۳)  $[0, 4)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

اگر  $f(x) = x - [x]$  و  $g(x) = \frac{1-x}{x}$ ، برد تابع  $g \circ f$  کدام بازه است؟

(۲)  $[0, +\infty)$

(۱)  $(0, +\infty)$

(۴)  $[1, +\infty)$

(۳)  $(1, +\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

اگر  $f(x) = -x + [x]$  و  $g(x) = 2^x$ ، انگاه برد تابع  $g \circ f$  کدام است؟

(۲)  $[\frac{1}{2}, 1)$

(۱)  $(\frac{1}{2}, 1]$

(۴)  $[1, 2)$

(۳)  $(1, 2]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۷۱

اگر  $g(x) = 2x - 1$  و  $(fog)(x) = \frac{x}{x-3}$ ، مقدار  $f(3)$  کدام است؟

(۲) -۲

(۱) -۴

(۴) ۴

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۷۲

اگر  $f(x) = x^2 + x$  و  $g(x) = \sqrt{4x+1}$  باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع  $g \circ f$  و خط به معادله  $y = 3$  کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۴/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷۳

اگر توابع  $f$  و  $g$  به عنوان ماشین به صورت زیر باشد:

$$\xrightarrow{x} \underline{f} \longrightarrow \underline{g} \longrightarrow 2x, \quad g(x) = 3x + 4$$

آنگاه مقدار  $f(5)$  کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷۴

اگر  $g(x) = 2x + 1$  و  $(fog)(x) = \lambda x^2 + 6x + 5$  باشند، تابع  $f(x)$  برابر کدام است؟

$$2x^2 - 2x + 3 \quad (2)$$

$$2x^2 + 3x + 1 \quad (1)$$

$$2x^2 + x + 3 \quad (4)$$

$$2x^2 - x + 4 \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۷۵

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع  $y = x + |x|$  و  $y = 2 - |x|$ ، کدام است؟

$$\frac{7}{3} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$3 \quad (4)$$

$$\frac{8}{3} \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷۶

اگر  $f(x) = 2x + 3$  و  $g(f(x)) = \lambda x^2 + 22x + 20$  باشند، ضابطه تابع  $fog$ ، کدام است؟

$$2x^2 - 3x + 7 \quad (2)$$

$$2x^2 - 7x + 3 \quad (1)$$

$$4x^2 - 4x + 11 \quad (4)$$

$$4x^2 - 2x + 13 \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۷۷ اگر  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ، دامنه تابع  $f(3 - x)$  کدام است؟

(۱)  $[0, 2]$

(۲)  $[0, 3]$

(۳)  $[1, 2]$

(۴)  $[1, 3]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۷۸ اگر  $f(x) = 2 - |x - 2|$ ، ضابطه تابع  $f(f(x))$  برابر کدام است؟

(۱)  $x$

(۲)  $4 - x$

(۳)  $f(x)$

(۴)  $2 - f(x)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۷۹ دو تابع با ضابطه‌های  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$  و  $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$  مفروض‌اند. اگر  $g^{-1}(f(a)) = 3$  باشد،  $a$  کدام است؟

(۱)  $-4$

(۲)  $-1$

(۳)  $2$

(۴)  $4$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

سطح محدود به نمودار تابع  $f(x) = ||x| - 2| - 2$  و محور  $x$  ها کدام است؟

(۲) ۶

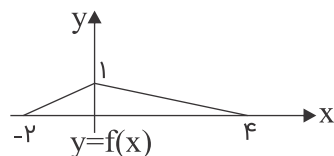
(۱) ۴

(۴) ۱۲

(۳) ۸

آزمایشی سنجش ریاضی و فیزیک چهارم مرحله دوم ۱۳۹۳

اگر تابع  $f(x)$  به صورت شکل زیر باشد، دامنهٔ تابع  $g(x) = 3 - f(2x - 1)$  کدام است؟



(۱)  $[-5, 7]$

(۲)  $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$

(۳)  $[-3, 3]$

(۴)  $[-1, 5]$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۱

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۱

معادلهٔ  $\frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{\sqrt{x-1}} = 1$  چند ریشه دارد؟

(۲) ۱

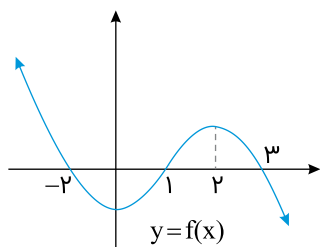
(۱) صفر

(۴) ۳

(۳) ۲

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۱

تابع  $f(x)$  به صورت زیر است. در چند بازه تابع  $|f(x)|$  صعودی اکید است؟



(۱) ۱

(۲) ۲

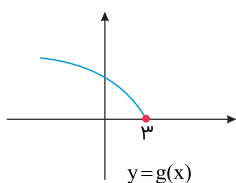
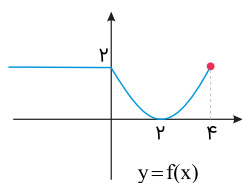
(۳) ۳

(۴) ۴

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱ ۲

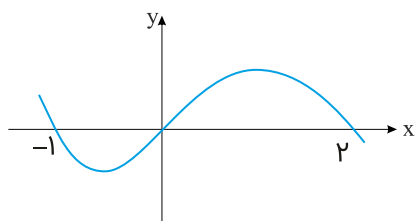
علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱ ۲

نمودار دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  داده شده است. دامنه تابع  $y = \frac{f(x+1)}{2g(x)}$  کدام می باشد؟

(۱)  $(-\infty, 3]$ (۲)  $(-\infty, 3)$ (۳)  $[3, +\infty)$ (۴)  $(-\infty, 5] - \{3\}$ 

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۰ ۱

شکل زیر، نمودار  $f(x-2)$  را نشان می دهد. دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{\frac{f(1-x)}{f(x+1)}}$  شامل چند عدد صحیح است؟



(۱) ۴

(۲) ۲

(۳) صفر

(۴) بیش از ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & ; 2x - 5 \geq 0 \\ -2x^2 + ax - 21 & ; 2x - 5 < 0 \end{cases}$  روی دامنه تعریف خود، وارون پذیر است. اگر  $f^{-1}$  وارون تابع  $f$  به ازای بزرگترین مقدار صحیح  $a$  باشد، مقدار  $f^{-1}(-3)$  کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

اگر  $f(x) = x + [x]$  و  $g(x) = f([x - f(x)])$  باشد،  $\log(-\frac{1}{3})$  کدام است؟

- (۱) -۲  
(۲) ۲  
(۳) -۴  
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

تابع  $f$  اکیداً صعودی و دامنه آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. اگر  $f(m^2 - 4m + 4) < f(2m^2 - 9m - 2)$  باشد،  $m$  دارای چند مقدار صحیح است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۶

(۳) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

وارون تابع  $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{mx-1}$  در دامنه محدود، خط  $5y - 10x = 12$  را در نقطه‌ای به عرض  $7/2$  قطع می‌کند. مقدار  $f(\frac{4}{m})$  کدام است؟

(۲)  $4\sqrt{3}$

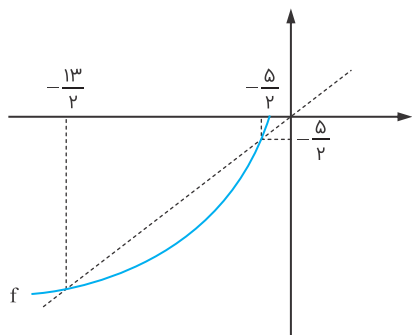
(۱)  $2\sqrt{3}$

(۴)  $2\sqrt{15}$

(۳)  $4\sqrt{15}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

شکل زیر، نمودار تابع  $f$  را نشان می‌دهد. دامنه تابع  $y = \sqrt{\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)}}$ ، شامل چند عدد صحیح است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

دامنه تابع  $y = f(x)$  و  $y = f(kx)$ ، برابر  $[b, c]$  است. اگر  $k = 2a^2 - a - 5$  باشد، حاصل ضرب مقادیر  $a$  کدام است؟

-۳ (۱)

۳ (۲)

-۲/۵ (۳)

۲/۵ (۴)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

اگر نقطه  $(-\frac{1}{\lambda}, -\frac{3}{5})$  روی تابع وارون تابع  $y = \frac{x}{a + a|x|}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

 $\frac{5}{27}$  (۱)

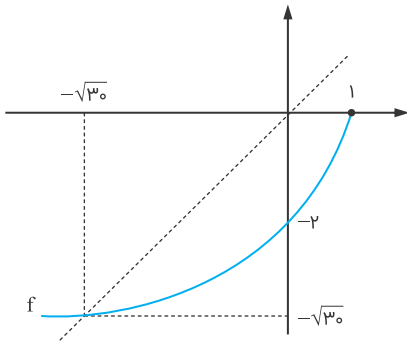
۵ (۲)

۳ (۳)

۳/۵ (۴)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

شکل زیر، نمودار تابع  $f$  را نشان می‌دهد. دامنه تابع  $y = \sqrt{\frac{f(x)}{-x + f^{-1}(x)}}$  شامل چند عدد صحیح است؟



(۱) ۷

(۲) بیش از ۷

(۳) ۴

(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

برد تابع  $y = f(x)$  و  $y = kf(x)$  برابر  $[b, c]$  است. اگر  $k = a^2 - 3a + 3$  باشد، حاصل ضرب مقادیر  $a$  کدام است؟

(۲) -۲

(۱) ۲

(۴) -۳

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

اگر نقطه  $(-\frac{1}{4}, -1)$  روی تابع وارون تابع  $y = \frac{ax}{1 + |x|}$  باشد، مقدار  $a$ ، کدام است؟

(۲)  $\frac{1}{3}$ 

(۱) -۳

(۴) ۲

(۳)  $-\frac{1}{2}$ 

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

اگر بزرگترین بازه‌ای که نمودار تابع  $y = ax^2 + 7x - 1$  در آن اکیداً صعودی است، بازه  $(-\infty, 7/5]$  باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

(۲)  $-4/55$

(۱)  $-3/45$

(۴)  $-6/35$

(۳)  $-5/25$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$  در چند نقطه، تابع وارون خود را قطع می‌کند؟

(۲) ۳

(۱) ۴

(۴) ۱

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

اگر  $y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}$  ضابطه تابع وارون  $y = ax + a\sqrt{x}$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۹

(۳) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

تابع  $y = (x - 1)|x|$  در بازه  $(a, b)$  اکیداً نزولی است. مقدار  $a + b$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}$

(۳)  $\frac{3}{2}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۴)  $\frac{3}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

اگر  $f = \{(\frac{1}{9}, -1), (\frac{1}{3}, 1), (-\frac{1}{4}, 3), (\frac{1}{4}, -3)\}$  و  $g(x) = -|x|\sqrt{x}$  و  $\log^{-1}(a) = -3$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{9}$

(۳)  $-\frac{1}{8}$

(۲)  $\frac{1}{9}$

(۴)  $\frac{1}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳



گزینه ۳

۱

منظور سؤال این است که  $f(x)$  تابع ثابت است، پس  $m = n = 0$  است. حال تابع داده شده را مرتب می‌کنیم:

$$g = \{(0, -1), (0, k), (-1, -1), (3k + 2, 2k + 1)\}$$

زوج مرتب‌های  $(0, -1)$  و  $(0, k)$  مولفه اول برابر دارند، برای تابع بودن باید مولفه دوم نیز برابر باشد. بنابراین برای آنکه  $g$  تابع باشد باید  $k = -1$  باشد. تابع  $g$  به صورت زیر در می‌آید:

$$g = \{(0, -1), (-1, -1)\}$$

$$f(x) = -k = 1 \text{ خواهد بود و در نتیجه } f(\sqrt{5}) = 1 \text{ می‌باشد.}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۴

۲

جدول تعیین علامت  $g$  به صورت زیر است.

| $x$               | $0$ | $3$ |   |
|-------------------|-----|-----|---|
| $x^2$             | +   | +   | + |
| $f(x)$            | +   | +   | - |
| $\sqrt{x^2 f(x)}$ | +   | +   | - |

$$\Rightarrow D_{\sqrt{x^2 f(x)}} = (-\infty, 3]$$

$$x = 0, 1, 2, 3$$

اعداد  $0, 1, 2$  و  $3$  پذیرفته هستند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

تابع داده شده اکیداً صعودی است و وارون خود را روی خط  $y = x$  ملاقات می‌کند. بنابراین:

$$x^3 + 3x - 12 = x \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

حقیقتاً ریشه  $x = 2$  را حدس زدیم!

$$x^3 + 3x - 12 = (x - 2)(x^2 + 2x + 6)$$

نقطه  $(2, 2)$  محل تقاطع است. فاصله تا مبدأ برابر است با:

$$\sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

تابع  $f$  اکیداً نزولی می‌باشد، بنابراین کافی است ضریب  $x^3$  منفی باشد:

$$-9 + k^2 < 0 \Rightarrow k^2 < 9 \Rightarrow -3 < k < 3$$

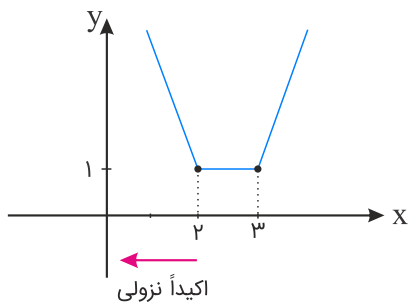
$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0, \pm 1, \pm 2 \Rightarrow k \text{ مجموع مقادیر } k = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$x \leq 2 \Rightarrow f(x) = -(x - 2) - (x - 3) = -2x + 5$$

$$2 < x < 3 \Rightarrow f(x) = (x - 2) - (x - 3) = 1$$

$$x \geq 3 \Rightarrow f(x) = x - 2 + x - 3 = 2x - 5$$



بنابراین:

$$x \leq 2 \Rightarrow -2x + 5 = 2x^2 - x - 10 \Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0$$

$$(2x - 5)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 & \checkmark \\ x = \frac{5}{2} & \times \end{cases}$$

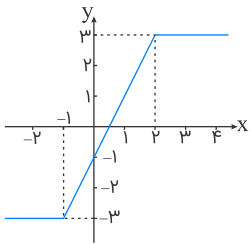
| X   | -۱ | ۲ |
|-----|----|---|
| X+۱ | -  | + |
| X-۲ | -  | + |

$$x \leq -1 : f(x) = -x - 1 + x - 2 = -3$$

$$-1 < x \leq 2 : f(x) = x + 1 + x - 2 = 2x - 1$$

$$x > 2 : f(x) = x + 1 - x + 2 = 3$$

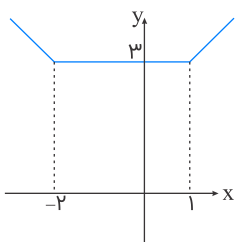
نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل در فاصله  $(-1, 2)$  اکیداً صعودی است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$f(x) = |x + 2| + |x - 1| = \begin{cases} 2x + 1 & ; x > 1 \\ 3 & ; -2 \leq x \leq 1 \\ -2x - 1 & ; x < -2 \end{cases}$$



باتوجه به نمودار تابع گلدانی  $y = |x + 2| + |x - 1|$  در فاصله  $(-\infty, -2)$  تابع نزولی اکید است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

فرض می‌کنیم  $\sqrt[3]{9\cos^2(x) - 1} = A$  باشد.

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 9\cos^2(x) - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq A \leq 2$$

تابع موردنظر به صورت  $g(A) = 2^A - 2^{-A}$  است. هر دو تابع  $2^A$  و  $2^{-A}$  صعودی اکیدند، پس مجموع آن‌ها صعودی اکید خواهد بود.

$$b = g(2) = 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$a = g(-1) = 2^{-1} - 2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow b - a = \frac{15}{4} + \frac{3}{2} = \frac{21}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

نکته:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

ابتدا  $g(x)$  را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{1-2x}{x+1} = \frac{1-2x+2-2}{x+1} = \frac{-2x-2}{x+1} + \frac{1+2}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$$

اکنون تابع  $g \circ f$  را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -2 + \frac{3}{[x] - x + 1}$$

طبق نکته داریم:

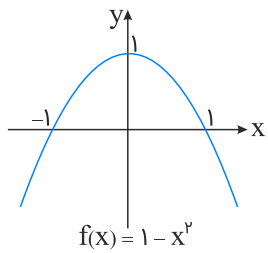
$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\text{در } (-1) \text{ ضرب می‌کنیم}} -1 < [x] - x \leq 0$$

$$\xrightarrow{+1} 0 < [x] - x + 1 \leq 1 \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} 1 \leq \frac{1}{[x] - x + 1}$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3 \leq \frac{3}{[x] - x + 1} \xrightarrow{-2} 1 \leq \frac{3}{[x] - x + 1} - 2$$

$$\Rightarrow g(f(x)) \geq 1 \Rightarrow R_{g \circ f} = [1, +\infty)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

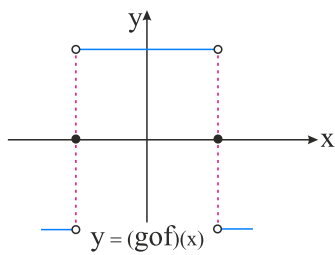


$$-1 < x < 1 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow g(f(x)) = 1$$

$$|x| > 1 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow g(f(x)) = -1$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = 0$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| < 1 \\ -1 & ; |x| > 1 \\ 0 & ; |x| = 1 \end{cases}$$



$g \circ f$  در دو نقطه  $x = 1$  و  $x = -1$  ناپیوسته است.

## گام اول

الف) ضابطه تابع  $f \circ g(x)$  یعنی  $f(g(x))$ ، با جایگذاری ضابطه  $g(x)$  در تابع  $f(x)$  به دست می‌آید.  
 ب) می‌خواهیم نمودار تابع  $f \circ g(x)$  زیر محور  $x$  قرار بگیرد پس باید مجموعه جواب نامعادله  $f \circ g(x) < 0$  را به دست آوریم.

## گام دوم

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = \left(\frac{1}{4}(x-3)\right)^2 + \frac{1}{4}(x-3) - 2 = \frac{1}{4}(x-3)^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} - 2 \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

حالا مجموعه جواب نامعادله  $f \circ g(x) < 0$  را تعیین می‌کنیم:

$$f \circ g(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4} < 0 \xrightarrow{\times 4} x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 5)$$

## گام اول

برای پاسخگویی به این تست داشتن ضابطه تابع  $g \circ f(x)$  الزامی است. برای رسیدن به این منظور کافی است در ضابطه تابع  $g(x)$  به جای متغیر  $x$ ، ضابطه تابع  $f(x)$  را قرار دهیم. حالا ببینیم منظور تابع از جمله "مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع  $g \circ f$  که در بالای محور  $x$ ها قرار می‌گیرند" چیست؟ اگر قرار باشد تابع  $g \circ f$  بالای محور  $x$ ها قرار بگیرد باید مقدار  $y$  تابع بزرگتر از صفر باشد. بنابراین باید مجموعه جواب نامعادله  $g \circ f(x) > 0$  را تعیین کنیم.

## گام دوم

تعیین ضابطه  $g \circ f(x)$  و حل نامعادله  $g \circ f(x) > 0$ :

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{4}x + 2, \quad f(x) = x^2 + 3x \\ g \circ f(x) &= g(f(x)) = -\frac{1}{4}(x^2 + 3x) + 2 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 2 \\ g \circ f(x) &> 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 2 > 0 \xrightarrow{\times (-4)} x^2 + 3x - 8 < 0 \\ &\Rightarrow (x+4)(x-1) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1 \end{aligned}$$

بنابراین در بازه  $(-4, 1)$  مقادیر تابع  $g \circ f(x)$  بزرگتر از صفر بوده و در نتیجه نمودار این تابع روی این بازه بالای محور  $x$ ها قرار می‌گیرد.

## گام اول

دامنه تابع fog از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

## گام دوم

دامنه دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  را تعیین کرده و با استفاده از رابطه گفته شده در گام اول،  $D_{fog}$  را مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$$

$$-x^2 + x + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-1)} x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 2 \Rightarrow D_f = (-1, 2)$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \left(\frac{1}{e}\right)^x < 2\}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{1}{e}\right)^x > 0} \left(\frac{1}{e}\right)^x < 2 \Rightarrow (e^{-1})^x < 2 \Rightarrow e^{-x} < 2 \Rightarrow -x < \ln 2$$

$$\xrightarrow{\div(-1)} x > -\frac{1}{e} \Rightarrow D_{fog} = \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

برای به دست آوردن  $D_{fog}$  اول از همه باید  $D_f$  و  $D_g$  تعیین شود. سپس با استفاده از رابطه  $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$  دامنه تابع fog را تعیین کنیم.

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

$$g(x) = \log_2(x^2 + 2x) \Rightarrow x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ یا } x < -2$$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

حالا سراغ تعیین  $D_{fog}$  می‌رویم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{fog} = \{x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \mid \log_2(x^2 + 2x) \leq 3\}$$

$$\log_2(x^2 + 2x) \leq 3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 2^3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 8 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{fog} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

روش اول:

با استفاده از تغییر متغیر  $t = x - 3$ ،  $x$  را برحسب  $t$  به دست آورده و ضابطه  $f(x)$  را به صورت مستقل تعیین می‌کنیم.

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{x-3=t} f(t) = (t+3)^2 - 4(t+3) + 5 \\ = t^2 + 6t + 9 - 4t - 12 + 5 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 2$$

ضابطه  $f(x)$  به صورت مستقل تعیین شد. حالا ضابطه  $f(1-x)$  را مشخص می‌کنیم:

$$f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) + 2 = 1 - 2x + x^2 + 2 - 2x + 2 \\ = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f(1-x) = x^2 - 4x + 5$$

روش دوم: روش دیگر برای به دست آوردن  $f(1-x)$  از روی ضابطه  $f(x-3)$  این است که به جای  $x$  متغیر  $4-x$  را جایگذاری کنیم.

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{x \rightarrow 4-x} f(4-x-3) = (4-x)^2 - 4(4-x) + 5 \\ \Rightarrow f(1-x) = 16 - 8x + x^2 - 16 + 4x + 5 = x^2 - 4x + 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

ضابطه  $f(x)$  و  $f(g(x))$  برای ما مشخص شده است. ابتدا با توجه به این دو ضابطه، ضابطه تابع  $g(x)$  را به صورت مستقل تعیین می‌کنیم، سپس ضابطه تابع  $(f+g)(x)$  را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = x^2 - x - 2, f(g(x)) = x^2 + x - 2 \\ \Rightarrow (g(x))^2 - g(x) - 2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow (g(x))^2 - g(x) = x^2 + x$$

برای این که بتوانیم راحت‌تر ضابطه  $g(x)$  را تعیین کنیم، سعی می‌کنیم دو طرف را به دو عبارت مربع کامل تبدیل کنیم:

$$(g(x))^2 - g(x) = x^2 + x \xrightarrow{\text{به دو طرف } \frac{1}{4} \text{ اضافه می‌کنیم}} (g(x))^2 - g(x) + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (g(x) - \frac{1}{4})^2 = (x + \frac{1}{4})^2 \Rightarrow g(x) - \frac{1}{4} = \pm(x + \frac{1}{4})$$

پس برای ضابطه  $g(x)$  دو حالت ممکن است رخ دهد:

$$1) g(x) - \frac{1}{4} = x + \frac{1}{4} \Rightarrow g(x) = x + 1 \\ \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 + x + 1 = x^2 - 1$$

$$2) g(x) - \frac{1}{4} = -x - \frac{1}{4} \Rightarrow g(x) = -x \\ \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 - x = x^2 - 2x - 2$$

با توجه به گزینه‌های موجود، گزینه ۱ قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

## گام اول

وقتی تست اشاره کرده  $g(f(a)) = 5$  است، یعنی این که باید از تابع  $g$  زوج مرتبی را انتخاب کنیم که در آن مؤلفه دوم برابر ۵ است. در این صورت مؤلفه اول برابر  $f(a)$  بوده و با داشتن ضابطه تابع  $f(x)$  مقدار  $a$  به راحتی محاسبه می‌شود.

## گام دوم

$g(f(a)) = 5$  است. در بین زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده تابع  $g$ ، زوج مرتب  $(6, 5)$  دارای مؤلفه دوم ۵ است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:  $f(a) = 6$ . حال با داشتن ضابطه  $f(x)$ ، مقدار  $a$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} \xrightarrow{f(a)=6} a + \sqrt{a} = 6$$

برای حل این معادله می‌توانیم با تغییر متغیر  $t = \sqrt{a}$ ، معادله را به یک معادله درجه دو تبدیل کرده و آن را حل کنیم. (فقط حواستان باشد  $t$  باید نامنفی شود.)

$$a + \sqrt{a} = 6 \xrightarrow{\sqrt{a}=t} t^2 + t = 6 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t + 3)(t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -3 & \text{غ ق ق} \\ t = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

اما راه سریع‌تر و راحت‌تر برای رسیدن به جواب امتحان گزینه‌هاست. در این صورت هم،  $a = 4$  جواب تست می‌شود.

## گزینه ۱

در تست حاصل مقادیری از دو تابع  $f \circ g$  و  $g \circ f$  از ما خواسته شده است. بنابراین با توجه به دو ضابطه  $f(x)$  و  $g(x)$ ، ابتدا ضابطه توابع  $f \circ g(x)$  و  $g \circ f(x)$  را تعیین کرده، سپس حاصل عبارت داده شده را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = |(x + 1)^2| \xrightarrow{(x+1)^2 \geq 0} (f \circ g)(x) = (x + 1)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (|x| + 1)^2$$

$$(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2} + 1)^2 - (|1 - \sqrt{2}| + 1)^2 =$$

$$(2 - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 - (\sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

طبق تعریف، دامنه تابع  $\text{gof}$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

بنابراین لازم است برای حل تست دامنه تعریف دو تابع  $f(x)$  و  $g(x)$  تعیین شود، سپس با استفاده از تعریف گفته شده  $D_{\text{gof}}$  را مشخص کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x + |x|} = \begin{cases} x \geq 0 : |x| = x \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x} \\ x < 0 : |x| = -x \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - x} = 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x} = \frac{1}{x(x - 4)} \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \\ \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

حالا دامنه تعریف تابع  $\text{gof}$  را به دست می‌آوریم:

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x + |x|} \in \mathbb{R} - \{0, 4\}\}$$

$$\sqrt{x + |x|} = 4 \xrightarrow{x \geq 0} \sqrt{2x} = 4 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

$$\sqrt{x + |x|} = 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$$

پس دامنه  $\text{gof}$  برابر است با:  $D_{\text{gof}} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$

## گام اول

دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها به ما داده شده و تابع  $g \circ f^{-1}$  را می‌خواهند، پس ابتدا باید تابع  $f^{-1}$  را با زوج مرتب‌هایش تشکیل دهیم. برای این کار کافی است در تمامی زوج مرتب‌های تابع  $f$ ، جای مؤلفه‌های اول و دوم را باهم عوض کنیم. پس با توجه به دامنه تعریف تابع  $f^{-1}$  و زوج مرتب‌های تابع  $g$ ، تابع  $g \circ f^{-1}$  را به دست می‌آوریم.

## گام دوم

برای حل تست اول باید  $f^{-1}$  را مشخص کنیم:

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (3, 0), (-1, 4)\} \\ \Rightarrow D_{f^{-1}} = \{2, 5, 3, -1\}$$

حالا بررسی می‌کنیم برای هریک از اعضای  $D_{f^{-1}}$ ، تابع  $g \circ f^{-1}$  تعریف می‌شود یا خیر:

$$x = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \Rightarrow g(f^{-1}(2)) = g(1) \rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

$$x = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 2 \Rightarrow g(f^{-1}(5)) = g(2) = 3 \Rightarrow (5, 3) \in g \circ f^{-1}$$

$$x = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 0 \Rightarrow g(f^{-1}(3)) = g(0) \rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

$$x = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = 4 \Rightarrow g(f^{-1}(-1)) = g(4) = 1 \Rightarrow (-1, 1) \in g \circ f^{-1}$$

بنابراین تابع  $g \circ f^{-1}$  به صورت  $\{(5, 3), (-1, 1)\}$  درمی‌آید.

اصلاً نیازی به تعیین ضابطه  $g(x)$  نداریم. با داشتن ضابطه دو تابع  $f(x)$  و  $f(g(x))$ ، ضابطه تابع  $f(g(x))$  را برحسب  $g(x)$  تشکیل می‌دهیم. سپس  $x$  را برابر ۱ قرار داده و مقدار  $g(1)$  را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{x^2+2}{x^2+1} \Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1} \\ \xrightarrow{x=1} \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{1+2}{1+1} \Rightarrow \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2g(1)+2 = 3g(1)-3 \\ \Rightarrow g(1) = 3+2 = 5 \Rightarrow g(1) = 5$$

باتوجه به ضابطه‌های  $f(x)$  و  $f(g(x))$ ، تابع  $f(g(x))$  را برحسب تابع  $g(x)$  تشکیل می‌دهیم. سپس بدون این که ضابطه تابع  $g(x)$  را به صورت مستقل تعیین کنیم،  $x$  را برابر  $-۲$  در نظر گرفته و مقدار  $g(-۲)$  را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = ۲x^۲ + ۴, \quad f(g(x)) = ۴x^۲ + ۶x \Rightarrow ۲(g(x))^۲ + ۴ = ۴x^۲ + ۶x$$

$$\xrightarrow{x=-۲} ۲(g(-۲))^۲ + ۴ = ۴(-۲)^۲ + ۶(-۲) = ۴(۴) + ۶(-۲) = ۱۶ - ۱۲ = ۴$$

$$\Rightarrow ۲(g(-۲))^۲ + ۴ = ۴ \Rightarrow ۲(g(-۲))^۲ = ۰ \Rightarrow (g(-۲))^۲ = ۰ \Rightarrow g(-۲) = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

$$f(x) = ۴x - x^۲$$

$$\xrightarrow[\text{منفی انتقال می‌دهیم}]{\text{واحد در جهت}} f(x+۲) = ۴(x+۲) - (x+۲)^۲ = -x^۲ + ۴$$

$$f(x) = f(x+۲) \Rightarrow ۴x - x^۲ = -x^۲ + ۴ \Rightarrow x = ۱$$

$$f(x) = ۴x - x^۲ \xrightarrow{x=۱} f(۱) = ۳ \Rightarrow A(۱, ۳)$$

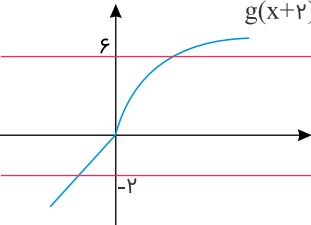
نقطه برخورد

$$OA = \sqrt{۱^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$g(x+۲)f(g(x+۲)) = ۲ \Rightarrow \left| \frac{1}{۲}g(x+۲) - ۱ \right| = ۲$$

$$\frac{1}{۲}g(x+۲) - ۱ = ۲ \Rightarrow g(x+۲) = ۶$$

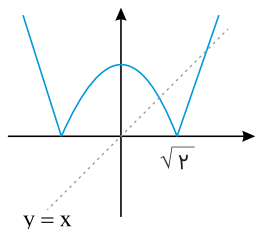
$$\frac{1}{۲}g(x+۲) - ۱ = -۲ \Rightarrow g(x+۲) = -۲$$


دو ریشه دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

$$|x^2 - 2| - x > 0 \Rightarrow |x^2 - 2| > x \quad (1)$$

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که یک برخورد در بازه  $(0, \sqrt{2})$  و یک برخورد در بازه  $(\sqrt{2}, +\infty)$  است:

$$\begin{aligned} 0 < x < \sqrt{2} : |x^2 - 2| &= 2 - x^2 \\ \Rightarrow 2 - x^2 &= x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{0 < x < \sqrt{2}} x = 1 \\ x > \sqrt{2} : |x^2 - 2| &= x^2 - 2 \\ \Rightarrow x^2 - 2 &= x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \xrightarrow{x > \sqrt{2}} x = 2 \end{aligned}$$

پس جواب نامعادله (۱) که همان دامنه تابع است به صورت زیر خواهد بود:

$$D = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$g(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 3} + k \xrightarrow{g(1)=1} \sqrt{1+3} + k = 1 \Rightarrow k = -1$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{\sqrt{x} + 3} - 1 \Rightarrow -g(x) = 1 - \sqrt{\sqrt{x} + 3} \Rightarrow -g(x+4) = 1 - \sqrt{\sqrt{x+4} + 3} \\ \xrightarrow{x=0} y &= 1 - \sqrt{2+3} = 1 - \sqrt{5} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

$$\begin{aligned} \text{gog}(\circ) &= g(g(\circ)) = g(۲) = ۳ \\ \text{gof}^{-1}(-۲) &= g(f^{-1}(-۲)) \end{aligned}$$

برای پیدا کردن  $f^{-1}(-۲)$  ابتدا باید ضابطه تابع  $f$  را بیابیم:

$$\begin{cases} f(\circ) = -۳ \\ f(۲) = \circ \end{cases} \Rightarrow m = \frac{\circ - (-۳)}{۲ - \circ} = \frac{۳}{۲}$$

$$y - \circ = \frac{۳}{۲}(x - ۲) \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - ۳$$

$$f^{-1}(-۲) = a \Rightarrow f(a) = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a - ۳ = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow g(f^{-1}(-۲)) = g\left(\frac{۲}{۳}\right) \quad (*)$$

حال به بررسی ضابطه  $g$  برای  $x \leq ۱$  می‌پردازیم:

$$g(\circ) = ۲, g(۱) = ۱ \Rightarrow m = \frac{۱ - ۲}{۱ - \circ} = -۱$$

$$y - ۱ = -۱(x - ۱) \Rightarrow y - ۱ = -x + ۱ \Rightarrow y = -x + ۲; x \leq ۱$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{۲}{۳}\right) = -\frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۴}{۳} \quad (**)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(*),(**)} \text{gof}^{-1}(-۲) = g(f^{-1}(-۲)) = g\left(\frac{۲}{۳}\right) = \frac{۴}{۳}$$

$$\text{gof}^{-1}(-۲) \times \text{gog}(\circ) = \frac{۴}{۳} \times ۳ = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

داریم  $(f^{-1} \circ g^{-1})(-۹) = f^{-1}(g^{-1}(-۹))$ . ابتدا  $g^{-1}(-۹)$  را می‌یابیم. فرض می‌کنیم  $g^{-1}(-۹) = a$  باشد، پس  $g(a) = -۹$  و داریم:

$$g(x) = \frac{۳ - x}{۲} \Rightarrow g(a) = \frac{۳ - a}{۲} = -۹ \Rightarrow ۳ - a = -۱۸ \Rightarrow a = ۲۱$$

پس کافی است  $f^{-1}(۲۱)$  را حساب کنیم. فرض می‌کنیم  $f^{-1}(۲۱) = b$  باشد، پس  $f(b) = ۲۱$  است و داریم:

$$f(x) = x^۲ - ۴x + ۹ \Rightarrow f(b) = b^۲ - ۴b + ۹ = ۲۱ \Rightarrow b^۲ - ۴b - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (b - ۶)(b + ۲) = ۰ \xrightarrow{b \geq ۲} b = ۶$$

پس  $(f^{-1} \circ g^{-1})(-۹) = ۶$  است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

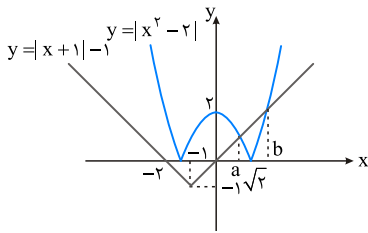
داریم:  $(g^{-1} \circ f^{-1})(20) = g^{-1}(f^{-1}(20))$ ، پس کافی است  $f^{-1}(20)$  را یافته و در تابع  $g^{-1}$  قرار دهیم.  
فرض کنیم  $f^{-1}(20) = a$  باشد، پس  $f(a) = 20$  است و داریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} = 20 \Rightarrow a = 16 \\ \Rightarrow f^{-1}(20) = 16$$

بنابراین  $g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16)$ . حال فرض می‌کنیم  $g^{-1}(16) = b$ ، پس  $g(b) = 16$  است. در نتیجه:

$$g(x) = \frac{9x + 6}{1 - x} \Rightarrow g(b) = \frac{9b + 6}{1 - b} = 16 \Rightarrow 9b + 6 = 16 - 16b \\ \Rightarrow 25b = 10 \Rightarrow b = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \\ \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(16) = \frac{2}{5}$$

دو منحنی  $y_1 = |x + 1| - 1$  و  $y_2 = |x^2 - 2|$  را رسم می‌کنیم.



مجموعه جواب نامعادله  $(a, b)$  است. برای یافتن  $a$ ,  $0 < x < \sqrt{2}$  را در نظر می‌گیریم:

$$|x^2 - 2| = |x + 1| - 1 \Rightarrow -(x^2 - 2) = x + 1 - 1 \Rightarrow -x^2 + 2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \xrightarrow{0 < x < \sqrt{2}} x = a = 1$$

برای یافتن  $b$ ,  $x > \sqrt{2}$  را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 - 2 = x + 1 - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{x > \sqrt{2}} x = b = 2$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = (a, b) = (1, 2) \Rightarrow \frac{a + b}{2} = \frac{2 + 1}{2} = 1.5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

$$g(x) = x^3 + x, \quad f(x) = \frac{2}{5}x - 4$$

اول  $f^{-1}(\lambda)$  را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \lambda \Rightarrow \frac{2}{5}x - 4 = \lambda \Rightarrow \frac{2}{5}x = 12 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow f^{-1}(\lambda) = 30$$

حال داریم:

$$g^{-1}(f^{-1}(\lambda)) = g^{-1}(30)$$

$$g(x) = 30 \Rightarrow x^3 + x = 30 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g^{-1}(30) = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

$$f(6) = f(-\frac{1}{4}) = 0$$

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 6 \\ g(x) = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} = 6 \\ x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

حال هریک از معادلات بالا را حل می‌کنیم:

$$x - \sqrt{x} - 6 = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{x}>0} t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) = 0 \xrightarrow{t>0} t = 3 \xrightarrow{x=t^2} x = 9$$

$$x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{x}>0} t^2 - t + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow (t - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \xrightarrow{x=t^2} x = \frac{1}{4}$$

بنابراین نمودار تابع  $f \circ g$ ، محور  $x$ ها را در نقاطی به طول ۹ و  $\frac{1}{4}$  قطع می‌کند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

اگر نمودار  $y = x^2 - x - 3$  را ۲ واحد به طرف  $x$ های منفی انتقال دهیم،  $f(x) = (x+2)^2 - (x+2) - 3$  به دست می‌آید. حال  $f(x)$  را ۹ واحد به طرف  $y$ های منفی منتقل می‌کنیم،  $g(x) = f(x) - 9$  به دست می‌آید.

$$g(x) = x^2 + 4x + 4 - x - 2 - 3 - 9 = x^2 + 3x - 10$$

حال  $g(x)$  را کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+5) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

راهحل اول:

اگر تابع  $y = -x^2 + 2x + 5$  را ۳ واحد به طرف های مثبت انتقال دهیم، تابع به فرم  $f(x) = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5$  تبدیل می‌شود و اگر تابع  $f(x)$  را دو واحد به سمت های منفی انتقال دهیم، نمودار جدید با ضابطه  $g(x) = f(x) - 2$  خواهد بود.

$$g(x) = f(x) - 2 = -(x-3)^2 + 2(x-3) + 5 - 2 = -(x^2 - 6x + 9) + 2x - 6 + 5 - 2 \\ \Rightarrow g(x) = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 3 = -x^2 + 8x - 12$$

حال باید  $g(x)$  بالای نیمساز ربع اول و سوم، یعنی  $y = x$  قرار گیرد.

$$g(x) > x \Rightarrow -x^2 + 8x - 12 > x$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0 \Rightarrow \underbrace{(x-3)(x-4)}_{h(x)} < 0 \quad (*)$$

| x    | $-\infty$ | ۳ | ۴ | $+\infty$ |
|------|-----------|---|---|-----------|
| h(x) | +         | • | • | +         |
|      |           | - | - |           |

$$h(x) < 0 \Rightarrow x \in (3, 4)$$

راهحل دوم: (عدد گذاری)

در صورتی که در (\*) قرار دهیم  $x = 4$ ، داریم:  $0 < 0$  که غیرقابل قبول است، بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نادرست است.

## گام اول

دامنه تابع  $\text{gof}$  از رابطه  $D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$  به دست می‌آید.

## گام دوم

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_g = [0, 1]$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \mid \frac{1+x^2}{1-x^2} \in [0, 1]\}$$

$$0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 & (1) \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow 1-x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \\ \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) : x \in \{0\}$$

$$g(x) = \sqrt{4 - (x - k + 2)} + k = \sqrt{-x + k + 2} + k$$

تابع  $g(x)$  وارون خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند و همچنین با فرض اینکه نقطه برخورد تابع و وارونش بر روی خط  $y = x$  قرار دارد، بنابراین  $g(1) = 1$  حال داریم:

$$A(1, 1) \in g(x) \Rightarrow \sqrt{1+k} + k = 1 \Rightarrow k = 0$$

$$h(x) = y - 1 \Rightarrow \sqrt{-x+2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

تابع دوضابطه‌ای است. برای محاسبه  $f(۱)$  از ضابطه پایین و برای محاسبه  $f(۵)$  از ضابطه بالا استفاده می‌کنیم.

گام دوم

$$x > ۳ : f(x) = x - \sqrt{x+۴} \Rightarrow f(۵) = ۵ - \sqrt{۵+۴} = ۵ - \sqrt{۹} = ۵ - ۳ = ۲$$

$$x \leq ۳ : f(x) = ۲x + ۳ \Rightarrow f(۱) = ۲(۱) + ۳ = ۲ + ۳ = ۵$$

پس مقدار  $f(f(۵)) + f(f(۱))$  برابر است با:

$$f(f(۵)) + f(f(۱)) = f(۲) + f(۵) = ۲(۲) + ۳ + ۲ = ۴ + ۳ + ۲ = ۹$$

از داخلی‌ترین تابع شروع می‌کنیم:

$$fofof(\sqrt{۲}) = f(f(f(\sqrt{۲})))$$

$$f(\sqrt{۲}) = \frac{(\sqrt{۲})(\sqrt{۲})}{۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲}} = \frac{۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$f\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) = \frac{(\sqrt{۲})\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)}{۳\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) - \sqrt{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = \sqrt{۲}$$

$$f(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow fofof(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

راه حل اول:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(۲x) = ۵x^۲ + ۱۱$$

$$\Rightarrow g(x) = ۵\left(\frac{x}{۲}\right)^۲ + ۱۱ = \frac{۵}{۴}x^۲ + ۱۱$$

$$\Rightarrow g(x-۷) = \frac{۵}{۴}(x-۷)^۲ + ۱۱ \Rightarrow g(x-۷) \text{ حداقل} = ۱۱$$

راه حل دوم: برای رسیدن از ضابطه  $g(۲x)$  به  $g(x-۷)$ ، تنها دامنه تغییر می‌کند و برد ثابت می‌ماند. بنابراین کمترین مقدار  $g(x-۷)$  برابر با کمترین مقدار  $g(۲x) = ۵x^۲ + ۱۱$  است. پس برابر با ۱۱ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[\text{راست}]{\text{۱ واحد به سمت}} \frac{1}{x-1} \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} \frac{-1}{x-1} \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۲ واحد رو به}} \frac{-1}{x-1} - 2$$

$$\text{حالا : } \frac{1}{x} = \frac{-1}{x-1} - 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = -2 \Rightarrow \frac{x-1+x}{x^2-x} = -2$$

$$-2x^2 + 2x = 2x - 1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه برخورد}} \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}) \\ (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 + (\sqrt{2} - 0)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

هریک از توابع  $f+g$ ,  $f \circ f$ ,  $g \circ f$  و  $f \circ g$  را تعیین کرده و در مورد پیوستگی آن در  $x = 0$  بحث می‌کنیم.  
بررسی گزینه اول:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} - 2x & ; x < 0 \\ 1 + 2x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f+g)(x) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (f+g)(x) = 1$$

بنابراین تابع  $f+g$  در  $x = 0$  ناپیوسته است.  
بررسی گزینه دوم:

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & ; f(x) < 0 \\ 2f(x) & ; f(x) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & ; x < 0 \\ 2x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ f(x) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ f(x) = 0$$

بنابراین تابع  $f \circ f$  در  $x = 0$  ناپیوسته است.  
بررسی گزینه سوم:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = \begin{cases} -2f(x) & ; f(x) < 0 \\ 1 & ; f(x) \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2(-\frac{1}{2}) & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g \circ f(x) = g \circ f(0) = 1$$

پس تابع  $g \circ f$  در  $x = 0$  پیوسته است.  
بررسی گزینه چهارم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & ; g(x) < 0 \\ 2g(x) & ; g(x) \geq 0 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه تابع  $g(x)$  این تابع همواره نامنفی است، پس تابع  $f \circ g$  برای ضابطه بالا تشکیل نشده و داریم:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} -2x & ; x < 0 \\ 2 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ g(x) = 2$$

بنابراین تابع  $f \circ g$  در  $x = 0$  ناپیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰  
 علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

گام اول

دو فرض در مسئله در نظر گرفته شده است، یعنی اینکه  $(۴, ۲) \in fog$  و  $(۴, ۱) \in gof$  است.  $(۴, ۲) \in fog$  است، یعنی  $f(g(۴)) = ۲$  و  $(۴, ۱) \in gof$  است. یعنی  $g(f(۴)) = ۱$ . حال این دو شرط را بررسی می کنیم.

گام دوم

تعیین  $a$  و  $b$  با استفاده از دو شرط  $f(g(۴)) = ۲$  و  $g(f(۴)) = ۱$ :

$$\begin{aligned} f(g(۴)) = ۲ &\xrightarrow{f(۳)=۲} g(۴) = ۳ \xrightarrow{(a, ۳) \in g} a = ۴ \\ g(f(۴)) = ۱ &\xrightarrow{f(۴)=۵} g(۵) = ۱ \xrightarrow{(b, ۱) \in g} b = ۵ \end{aligned}$$

پس دوتایی مرتب  $(a, b)$  به صورت  $(۴, ۵)$  درمی آید.

گزینه ۱

$$\begin{aligned} ۲^{x+۳+|x+۳|} - ۲ &= ۰ \Rightarrow ۲^{x+۳+|x+۳|} = ۲ \\ \Rightarrow x + ۳ + |x + ۳| &= ۱ \Rightarrow |x + ۳| = -x - ۲ \\ \Rightarrow \begin{cases} x + ۳ = -x - ۲ \Rightarrow x = \frac{-۵}{۲} \\ x + ۳ = x + ۲ \Rightarrow \text{فاقد جواب} \end{cases} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$f^{-1} = \{(۲, ۱), (\omega, ۲), (۴, ۳), (۶, ۴)\}$$

$$g = \{(۲, ۳), (۴, ۲), (\omega, ۶), (۳, ۱)\}$$

$$\left. \begin{array}{l} ۲ \xrightarrow{f^{-1}} ۱ \xrightarrow{g} \times \\ \omega \xrightarrow{f^{-1}} ۲ \xrightarrow{g} ۳ \\ ۴ \xrightarrow{f^{-1}} ۳ \xrightarrow{g} ۱ \\ ۶ \xrightarrow{f^{-1}} ۴ \xrightarrow{g} ۲ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{gof}^{-1} = \{(\omega, ۳), (۴, ۱), (۶, ۲)\}$$

حال اگر فرض کنیم  $h = \text{gof}^{-1}$  باشد، خواسته مسئله  $\frac{g}{h}$  است که باید دامنه‌های مشترک را در نظر بگیریم و بردها را بر هم تقسیم کنیم:

$$D_h \cap D_g = \{\omega, ۴\}$$

$$\frac{g}{h} = \left\{ \left( \omega, \frac{۶}{۳} \right), \left( ۴, \frac{۲}{۱} \right) \right\} = \{(\omega, ۲), (۴, ۲)\}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

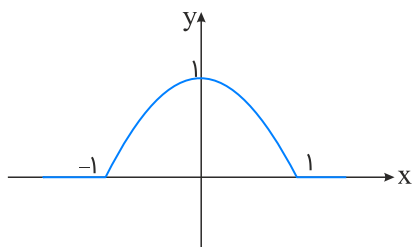
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$x < -1 \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(-1) = 0$$

$$-1 < x \leq 1 \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(x) = 1 - x^2$$

$$x > 1 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(1) = 0$$

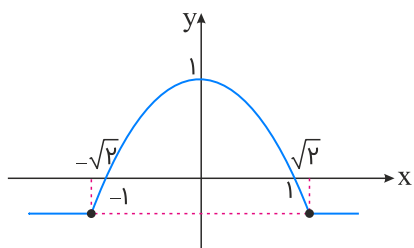
نمودار  $g \circ f$  به صورت زیر است:



$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - x^2) = \begin{cases} -1; & 1 - x^2 < -1 \\ 1 - x^2; & -1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \\ 1; & 1 - x^2 > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} -1; & |x| > \sqrt{2} \\ 1 - x^2; & |x| \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

نمودار  $f \circ g$  به صورت زیر است:



ماکزیمم در نقطه‌ای به طول  $\sqrt{2}$  رخ می‌دهد:

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow \max(g \circ f - f \circ g) = 0 - (-1) = 1$$

## گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم:

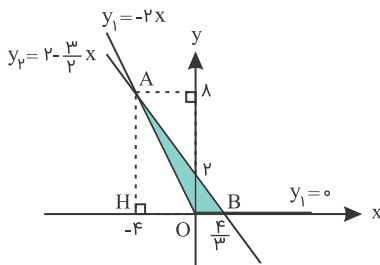
$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

## گام دوم

ابتدا ضابطه تابع  $y = |x| - x$  را برای مقادیر  $x \geq 0$  و  $x < 0$  به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = 0 & ; x \geq 0 \\ -x - x = -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع  $y = |x| - x$  و  $y = 2 - \frac{3}{4}x$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



برای محاسبه مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطه A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

$$2 - \frac{3}{4}x = -2x \Rightarrow -2x + \frac{3}{4}x = 2 \Rightarrow -\frac{1}{4}x = 2 \Rightarrow x = -4$$

$$\xrightarrow{y = -2x} y = 8 \Rightarrow A(-4, 8)$$

بنابراین ارتفاع مثلث  $\triangle ABO$  برابر ۸ است و مساحتش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

$$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x(x - 15) > 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0) \cup (15, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$= \left\{ x \mid \underbrace{x \in (-\infty, 0) \cup (15, +\infty)}_{(*)}, \log(x^2 - 15x) \leq 2 \right\}$$

$$\log(x^2 - 15x) \leq \log 100 \Rightarrow x^2 - 15x \leq 100 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 20)(x + 5) \leq 0 \Rightarrow x \in [-5, 20] (**)$$

باید از (\*) و (\*\*) اشتراک گرفت؛ بنابراین مجموعهٔ جواب برابر است با:

$$\xrightarrow{(**), (*)} x \in [-5, 0) \cup (15, 20]$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

توابع  $f \circ g(x)$  و  $g \circ f(x)$  را تشکیل می‌دهیم و آن‌ها را برابر می‌گذاریم:

$$f \circ g(x) = f(x + 4) = \frac{2(x + 4) - 1}{(x + 4) + 2} = \frac{2x + 7}{x + 6}$$

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{2x - 1}{x + 2}\right) = \frac{2x - 1}{x + 2} + 4 = \frac{2x - 1 + 4x + 8}{x + 2} = \frac{6x + 7}{x + 2}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی}} \frac{2x + 7}{x + 6} = \frac{6x + 7}{x + 2} \Rightarrow (2x + 7)(x + 2) = (6x + 7)(x + 6)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 7x + 14 = 6x^2 + 36x + 7x + 42$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 7)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = -1 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

راهحل اول:

$$f(2x - 3) = 4x^2 - 14x + 13$$

$$x = 1 : f(-1) = 4 - 14 + 13 = 3$$

فقط در گزینه "۴"،  $f(-1) = 3$  است.

راهحل دوم:

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t + 3}{2}$$

$$f(t) = 4\left(\frac{t + 3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t + 3}{2}\right) + 13$$

$$= t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

$$y = 2^{|\sin x|} \xrightarrow[\frac{\pi}{2}]{\text{سمت راست}} y = 2^{|\sin(x - \frac{\pi}{2})|} = 2^{|\cos x|} \xrightarrow[\frac{\pi}{2}]{\text{به پایین}} y = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2}$$

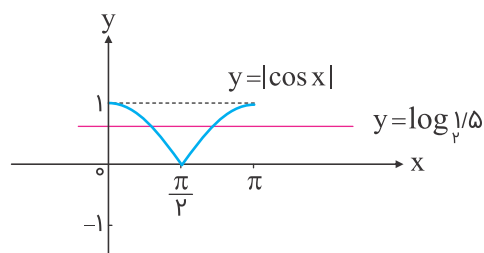
تعداد محل تقاطع نمودار با محور xها را می‌خواهیم، بنابراین تابع حاصل را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$y = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2^{|\cos x|} = \frac{3}{2}$$

حال از دو طرف  $\log_2$  می‌گیریم، در نتیجه:

$$|\cos x| = \log_2 \frac{3}{2}$$

تابع  $\log_2 x$  صعودی است و  $\log_2 2 = 1$  می‌باشد، بنابراین  $0 < \log_2(1/5) < 1$  است. حال نمودار  $|\cos x|$  و  $\log_2(1/5)$  را رسم می‌کنیم:



پس معادله  $|\cos x| = \log_2 \frac{3}{2}$  در فاصله  $[0, \pi]$  دو جواب دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$y = x^2 - 2x \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت محور } y \text{ ها}]{\text{۱۶ واحد انتقال در جهت}} y_1 = -x^2 + 2x + 16$$

حال معادله جدید را با معادله قبلی مساوی قرار می‌دهیم تا نقطه برخورد را به دست آوریم:

$$y = y_1 \Rightarrow x^2 - 2x = -x^2 + 2x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & \text{ق.ق} \\ x = -2 & \text{(غ.ق.ق زیرا } x > 1) \end{cases}$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A(4, 8)$$

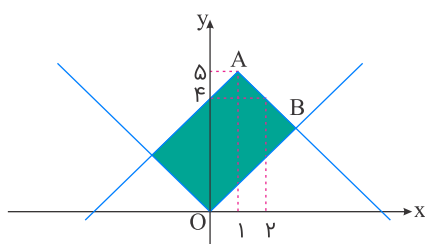
فاصله نقطه A از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{16(1 + 4)} = 4\sqrt{5}$$

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.

|                   |   |   |   |
|-------------------|---|---|---|
| $x$               | ۰ | ۱ | ۲ |
| $y = ۵ -  x - ۱ $ | ۴ | ۵ | ۴ |

|           |    |   |   |
|-----------|----|---|---|
| $x$       | -۱ | ۰ | ۱ |
| $y =  x $ | ۱  | ۰ | ۱ |



نقاط برخورد دو تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$۵ - |x - ۱| = |x| \Rightarrow |x| + |x - ۱| = ۵ \Rightarrow \begin{cases} x + x - ۱ = ۵ \Rightarrow x = ۳ \\ -x - x + ۱ = ۵ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

خطوط بر هم عمودند، پس شکل موردنظر یک مستطیل است. فقط مختصات یکی از نقاط برخورد (مانند  $B(۳, ۳)$ ) را لازم داریم تا مساحت مستطیل به دست آید. طول و عرض برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(۳ - ۱)^2 + (۳ - ۵)^2} = \sqrt{۴ + ۴} = ۲\sqrt{۲}$$

$$|BO| = \sqrt{۳^2 + ۳^2} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$S = |AB| \times |BO| = ۳\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۱۲$$

در سه مرحله مقدار  $f(x+1) + \frac{1}{3}f(x)$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 + 3}{x^3 - 1} = \frac{3}{-1} = -3 \\ f(x+1) &= \frac{(x+1)^3 + 3}{(x+1)^3 - 1} = \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 3}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 1} \\ &= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 4}{x^3 + 3x^2 + 3x} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x} \\ f(x+1) + \frac{1}{3}f(x) &= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x} + \frac{1}{3}(-3) \\ &= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x} - 1 = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 + 3x^2 + 3x)}{x^3 + 3x^2 + 3x} = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۹

## گام اول

به شکل ماشین داده شده خوب دقت کنید:

$$\text{ورودی} \rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1} \rightarrow \text{خروجی}$$

متغیر ورودی را  $x$  در نظر می گیریم. وارد دستگاهی می شود که این متغیر را دو برابر کرده و از آن دو واحد کم می کند. ما این دستگاه را  $f(x)$  فرض می کنیم. دستگاه بعدی را هم  $g(x)$  در نظر می گیریم. بنابراین شکل دستگاه را به صورت زیر تکمیل می کنیم:

$$\underbrace{\text{ورودی}}_x \rightarrow \underbrace{2x - 2}_{f(x)} \rightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x} + 1}}_{g(x)} \rightarrow \underbrace{\text{خروجی}}_{g(f(x))}$$

خروجی به ازای متغیر ورودی  $x$  برابر  $\frac{4}{3}$  شده است، یعنی  $g(f(x)) = \frac{4}{3}$  است.

## گام دوم

حالا با داشتن  $f(x)$  و  $g(x)$  می توانیم  $g(f(x))$  را تعیین کرده و در نهایت مقدار  $x$  را محاسبه کنیم:

$$f(x) = 2x - 2, \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)} + 1} = \frac{2x - 2}{\sqrt{2x - 2} + 1} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3(2x - 2) = 4\sqrt{2x - 2} + 4$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2x-2}=t} 3t^2 = 4t + 4 \Rightarrow 3t^2 - 4t - 4 = 0 \Rightarrow (3t + 2)(t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \sqrt{2x - 2} = 2 \Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \\ t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{2x - 2} = -\frac{2}{3} \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین ورودی این ماشین  $x = 3$  به دست آمد.

$$g^{-1} = \{(۳, ۲), (۲, ۴), (۶, ۵), (۱, ۳)\}$$

$$f = \{(۱, ۲), (۲, ۵), (۳, ۴), (۴, ۶)\}$$

حال  $g^{-1}$  of  $g$  را حساب می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} ۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g^{-1}} ۴ \\ ۲ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ ۳ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ ۴ \xrightarrow{f} ۶ \xrightarrow{g^{-1}} ۵ \end{array} \right\} \Rightarrow g^{-1} \text{ of } f = \{(۱, ۴), (۴, ۵)\}$$

فرض می‌کنیم که  $h = g^{-1}$  of  $h$  باشد. خواسته مسئله  $h - f$  است که باید در دامنه مشترک، عرض‌ها را از هم کم کنیم.

$$D_{h-f} = D_h \cap D_f = \{۱, ۴\}$$

$$h - f = \{(۱, ۴ - ۲), (۴, ۵ - ۶)\} = \{(۱, ۲), (۴, -۱)\}$$

پس برد تابع  $h - f$  برابر  $\{۲, -۱\}$  است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

با استفاده از ضابطه تابع  $f(x)$ ، ضابطه تابع  $f^{-1}(x)$  را به دست می‌آوریم ( $x$  را بر حسب  $y$  به دست آورده و در نهایت جای  $x$  و  $y$  را عوض می‌کنیم). سپس معادله  $f^{-1}(g(a)) = ۶$  را حل کرده و مقدار  $a$  را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = ۲x - ۵ \Rightarrow y = ۲x - ۵ \Rightarrow y + ۵ = ۲x \Rightarrow x = \frac{y+۵}{۲} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+۵}{۲}$$

$$f^{-1}(g(a)) = ۶ \Rightarrow \frac{g(a)+۵}{۲} = ۶ \Rightarrow g(a) + ۵ = ۱۲ \Rightarrow g(a) = ۷ \xrightarrow{(۴,۷) \in g} a = ۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

برای تعیین نقطه تلاقی دو تابع  $f$  و  $\text{fog}$  باید اول ضابطه  $\text{fog}$  مشخص شود. سپس معادله  $f(x) = \text{fog}(x)$  را حل کرده و نقطه تلاقی دو تابع که در واقع ریشه همین معادله است را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = (2x - 3)^2, \quad g(x) = x + 2 \Rightarrow \text{fog}(x) = f(g(x)) = (2g(x) - 3)^2 \\ = (2(x + 2) - 3)^2 = (2x + 4 - 3)^2 = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

معادله  $f(x) = \text{fog}(x)$  را حل می‌کنیم:

$$f(x) = \text{fog}(x) \Rightarrow (2x - 3)^2 = (2x + 1)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 16x = 8 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

بنابراین نمودار دو تابع  $f$  و  $\text{fog}$  در نقطه‌ای به طول  $x = \frac{1}{2}$  باهم متقاطع‌اند.  
دقت کنید که:

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_{\text{fog}} = \mathbb{R}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

به راحتی می‌توانیم  $(\text{fof})\text{og}$  را بسازیم، کافی است ورودی و خروجی‌ها را کنترل کنیم.

$$\begin{aligned} (x > 0) &\xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0 \\ (x = 0) &\xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0 \\ (x < 0) &\xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0 \end{aligned}$$

در واقع  $(\text{fof})\text{og}(x) = 0$  است و همواره پیوسته خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{مثبت محور } x \text{ ها}]{12 \text{ واحد در جهت}} y = \sqrt{x-12} \xrightarrow[\text{مثبت محور } y \text{ ها}]{2 \text{ واحد در جهت}} y = \sqrt{x-12} + 2$$

حال منحنی حاصل را با  $f(x) = \sqrt{x}$  برابر قرار می‌دهیم تا محل برخورد به دست آید.

$$\sqrt{x-12} + 2 = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x-12} = \sqrt{x} - 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x - 12 = x + 4 - 4\sqrt{x} \Rightarrow 4\sqrt{x} = 16 \Rightarrow x = 16$$

$x = 16$  را در  $f(x) = \sqrt{x}$  جایگذاری می‌کنیم تا عرض محل برخورد نیز به دست آید:

$$f(16) = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow A(16, 4)$$

فاصله نقطه A از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{16(16+1)} = 4\sqrt{17}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

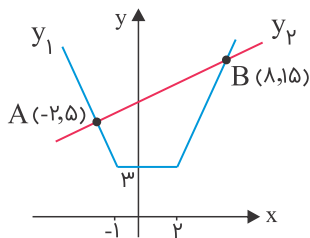
$$y_1 = |x-2| + |x+1|, \quad y_2 = x+7$$

$$y_1 = \begin{cases} -x+2-x-1 & ; x \leq -1 \\ -x+2+x+1 & ; -1 < x \leq 2 \\ x-2+x+1 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \begin{cases} -2x+1 & ; x \leq -1 \\ 3 & ; -1 < x \leq 2 \\ 2x-1 & ; x > 2 \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع  $y_1$  و  $y_2$  را رسم می‌کنیم:

$$x > 2 : 2x-1 = x+7 \Rightarrow x = 8$$

$$x < -1 : -2x+1 = x+7 \Rightarrow x = -2$$



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8 - (-2))^2 + (15 - 5)^2} \\ = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$g(x) = \frac{1-3x}{x+2}, \quad f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$$

$$g(f(x)) = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)+2} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{1-\frac{6x+9}{2-x}}{\frac{2x+3}{2-x}+2}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{\frac{2-x-6x-9}{2-x}}{\frac{2x+3+4-2x}{2-x}} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{-7x-7}{7} \Rightarrow g(f(x)) = -x-1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

در ضابطه  $g(x)$ ، به جای  $x$  ضابطه  $f(x)$  را جایگذاری می‌کنیم.

گام دوم

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{2 \times \frac{2x-1}{x+1} + 2}{2 - \frac{2x-1}{x+1}}$$

$$= \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{6x}{3} = 2x \Rightarrow g(f(x)) = 2x$$

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow 1+x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \quad \text{غ.ق.ق} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g : [0, 1]$$

$$D_{g \circ f} : \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\}$$

همواره داریم  $1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ، در نتیجه:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0 \xrightarrow{1+x^2 > 0} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

اگر دو تابع  $f$  و  $g$  که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها بیان شده‌اند را داشته باشیم، پس  $f \cap g$  زیرمجموعه‌ای از این توابع خواهد بود، بنابراین تابع است. همچنین  $f - g$  نیز تابع خواهد بود. ترکیب دو تابع  $f$  و  $g$  یعنی  $f \circ g$  نیز تابع است. رابطه  $f \cup g$  ممکن است تابع نباشد. به مثال زیر دقت کنید:

تابع است  $f = \{(2, 3)\}$

تابع است  $g = \{(2, 4)\}$

تابع نیست  $f \cup g = \{(2, 3), (2, 4)\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور } y]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع  $y = x$  و  $y = \sqrt{-x+2}$  (نیمساز ناحیه اول و سوم)، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{-x+2} = x \quad (*) \xrightarrow{\text{به توان } 2} -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \quad \text{غ.ق.ق}$$

$x = -2$  غیرقابل قبول است، زیرا در معادله (\*) صدق نمی‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

$$f(x) = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -(-x-1)^2 = -(x+1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به بالا}} -(x+1)^2 + 4$$

حال باید طول نقطه تلاقی این دو منحنی را به دست آوریم؛ پس داریم:

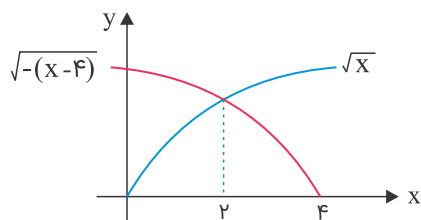
$$(x-1)^2 = -(x+1)^2 + 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -(x^2 + 2x + 1) + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{واحد به راست}} \sqrt{-(x-4)}$$

حال دو نمودار را رسم می‌کنیم:



$$\sqrt{x} = \sqrt{-(x-4)} \xrightarrow{\text{به توان } 2} |x| = |-(x-4)| = |x-4|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x-4 \Rightarrow 0 = -4 & \times \\ x = -x+4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین  $x = 2$  محور تقارن دو نمودار است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

نکته:  $0 \leq x - [x] < 1$   
ابتدا تابع  $g(x)$  را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= -x^2 + 4x = -x^2 + 4x - 4 + 4 \\ &= -(x^2 - 4x + 4) + 4 = -(x - 2)^2 + 4 \end{aligned}$$

اکنون تابع  $g \circ f$  را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -(2x - [2x] - 2)^2 + 4$$

طبق نکته داریم:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2x - [2x] < 1 \xrightarrow{-2} -2 \leq 2x - [2x] - 2 < -1 \\ \xrightarrow{+4} 1 &< (2x - [2x] - 2)^2 \leq 4 \\ \xrightarrow{\times(-1)} -4 &\leq -(2x - [2x] - 2)^2 < -1 \\ \xrightarrow{+4} 0 &\leq -(2x - [2x] - 2)^2 + 4 < 3 \\ \Rightarrow 0 &\leq g \circ f(x) < 3 \Rightarrow R_{g \circ f} = [0, 3) \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

برای به دست آوردن برد تابع  $g \circ f$  ابتدا باید ضابطه آن را تشکیل دهیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= x - [x], \quad g(x) = \frac{1-x}{x} \Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1-f(x)}{f(x)} \\ &= \frac{1-x+[x]}{x-[x]} = \frac{1}{x-[x]} - 1 \end{aligned}$$

می‌دانیم  $0 \leq x - [x] < 1$ ، ازطرفی  $x - [x]$  نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا مخرج کسر تعریف نمی‌شود، لذا: .

$$\begin{aligned} 0 &< x - [x] < 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} - 1 > 0 \\ \Rightarrow (g \circ f)(x) &> 0 \Rightarrow R_{g \circ f} &= (0, +\infty) \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

ابتدا ضابطه تابع  $\text{gof}$  را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از آن برد تابع  $\text{gof}$  را تعیین می‌کنیم.

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = 2^{-x+[x]}$$

می‌دانیم به ازای هر  $x$ ،  $0 \leq x - [x] < 1$  است، بنابراین:

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow -1 < -x + [x] \leq 0$$

برد تابع  $\text{gof}$  برابر است با:

$$\begin{aligned} -x + [x] = -1 &\Rightarrow 2^{-x+[x]} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \\ -x + [x] = 0 &\Rightarrow 2^{-x+[x]} = 2^0 = 1 \Rightarrow R_{\text{gof}} = \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

### گام اول

برای حل این تست اصلاً نیازی نیست ضابطه تابع  $f(x)$  را به صورت مستقل به دست آورده و بعد مقدار  $f(3)$  را حساب کنید. (البته این کار را هم انجام دهید درست است ولی زمان حل مسئله طولانی‌تر می‌شود.) ضابطه  $g(x)$  و  $f(g(x))$  به ما داده شده است. حال ما مقدار  $f(3)$  را می‌خواهیم. کافی است  $g(x)$  را برابر ۳ قرار داده و معادله را حل کنیم. به ازای  $x$  به دست آمده، مقدار  $f(3)$  محاسبه می‌شود.

### گام دوم

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x - 1, \quad f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \Rightarrow f(2x-1) = \frac{x}{x-3} \\ 2x - 1 &= 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow[x=2]{f(2x-1) = \frac{x}{x-3}} f(3) = \frac{2}{2-3} = \frac{2}{-1} = -2 \end{aligned}$$

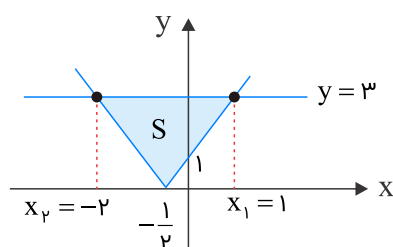
ابتدا تابع  $gof$  را به دست می‌آوریم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} \Rightarrow (gof)(x) = |2x + 1|$$

$$|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & ; x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

نقاط برخورد تابع  $|2x + 1|$  و خط  $y = 3$  را می‌یابیم.

$$2x_1 + 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 1, \quad -2x_2 - 1 = 3 \Rightarrow x_2 = -2$$



$$S = \frac{(|x_1| + |x_2|) \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

گاهی اوقات تابع مرکب را به صورت یک ماشین نمایش می‌دهند. به شکل رسم‌شده در این تست خوب دقت کنید:

$$\underset{x}{\longrightarrow} \underline{f} \xrightarrow{f(x)} \underline{g} \xrightarrow{g(f(x))} 2x$$

متغیر  $x$  به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شود. ابتدا وارد ضابطه  $f$  می‌شود که خروجی آن  $f(x)$  است. در مرحله دوم  $f(x)$  وارد ضابطه  $g$  می‌شود که در این صورت خروجی آن  $g(f(x))$  است. بنابراین در این تست  $g(f(x)) = 2x$  است.

گام دوم

ضابطه  $g(f(x))$  و  $g(x)$  مشخص است. اول ضابطه  $f(x)$  را تعیین کرده، سپس با استفاده از آن مقدار  $f(5)$  را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x) = 3x + 4, \quad g(f(x)) = 2x \Rightarrow 3f(x) + 4 = 2x \Rightarrow 3f(x) = 2x - 4$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow f(5) = \frac{2}{3}(5) - \frac{4}{3} = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

دو تابع  $g(x)$  و  $(fog)(x)$  را داریم. می‌دانیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \lambda x^2 + \epsilon x + \omega \Rightarrow f(2x+1) = \lambda x^2 + \epsilon x + \omega \quad (I)$$

با استفاده از تغییر متغیر، ضابطه تابع  $f(x)$  را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم  $2x+1=t$  باشد،  $x$  را بر حسب  $t$  به دست آورده و در ضابطه (I) جایگذاری می‌کنیم؛ داریم:

$$2x+1=t \Rightarrow 2x=t-1 \Rightarrow x=\frac{t-1}{2}$$

$$f(2x+1) = \lambda x^2 + \epsilon x + \omega \Rightarrow f(t) = \lambda \left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + \epsilon \left(\frac{t-1}{2}\right) + \omega$$

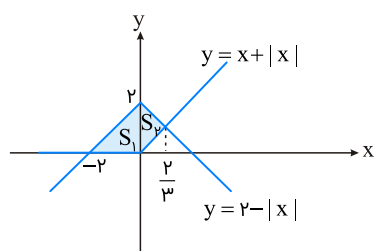
$$= 2(t-1)^2 + 3t - 3 + \omega$$

$$\Rightarrow f(t) = 2(t^2 - 2t + 1) + 3t + 2 = 2t^2 - 4t + 2 + 3t + 2 = 2t^2 - t + 4$$

بنابراین ضابطه  $f(x) = 2x^2 - x + 4$  به صورت  $f(x) = 2x^2 - x + 4$  است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}, \quad y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x & ; x \geq 0 \\ x + 2 & ; x < 0 \end{cases}$$



$$2 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

در صورت مسئله ضابطه دو تابع  $f(x)$  و  $g(f(x))$  به ما داده شده است. ابتدا با استفاده از تغییر متغیر، ضابطه تابع  $g(x)$  را به دست می آوریم. برای به دست آوردن ضابطه تابع  $f \circ g$  کافی است در ضابطه تابع  $f(x)$  به جای متغیر  $x$ ، ضابطه  $g(x)$  را قرار دهیم.

$$f(x) = 2x + 3, \quad g(f(x)) = \lambda x^2 + 22x + 20 \Rightarrow g(2x + 3) = \lambda x^2 + 22x + 20$$

$$2x + 3 = t \Rightarrow 2x = t - 3 \Rightarrow x = \frac{t - 3}{2}$$

$$g(t) = \lambda \left( \frac{t - 3}{2} \right)^2 + 22 \left( \frac{t - 3}{2} \right) + 20 \Rightarrow g(t) = \lambda \left( \frac{t^2 - 6t + 9}{4} \right) + 11(t - 3) + 20$$

$$\Rightarrow g(t) = 2t^2 - 12t + 18 + 11t - 33 + 20 = 2t^2 - t + 5 \Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$$

حالا ضابطه تابع  $f \circ g(x)$  یا همان  $f(g(x))$  را تعیین می کنیم:

$$f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = 2x^2 - x + 5 \Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = 2(2x^2 - x + 5) + 3$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = 4x^2 - 2x + 10 + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

روش اول:

ابتدا دامنه تعریف تابع  $f(x)$  را به دست می آوریم. سپس باتوجه به محدوده قابل قبول برای  $x$ ، بازه ای که در آن تابع  $f(3 - x)$  تعریف شده است را مشخص می کنیم.

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2 - x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

پس باید داشته باشیم:  $0 \leq 3 - x \leq 2$ ، بنابراین:

$$0 \leq 3 - x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1, 3]$$

روش دوم:

ابتدا ضابطه  $f(3 - x)$  را تعیین کرده و از روی آن دامنه تعریف را به دست می آوریم.

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow f(3 - x) = \sqrt{2(3 - x) - (3 - x)^2}$$

$$= \sqrt{6 - 2x - 9 + 6x - x^2} = \sqrt{-x^2 + 4x - 3} \Rightarrow -x^2 + 4x - 3 \geq 0$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [1, 3]$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

تست ضابطه  $f(f(x))$  یا همان  $f \circ f(x)$  را از ما می خواهد. برای به دست آوردن ضابطه  $f(f(x))$ ، ابتدا باید ضابطه  $f(x)$  را به صورت مشخص و دقیق داشته باشیم، سپس باتوجه به آن، ضابطه  $f \circ f(x)$  را تعیین کنیم. ضابطه  $f(x)$  را به دست می آوریم:

$$f(x) = 2 - |x - 2| = \begin{cases} x \geq 2 : x - 2 \geq 0 \Rightarrow f(x) = 2 - x + 2 = 4 - x \\ x < 2 : x - 2 < 0 \Rightarrow f(x) = 2 + x - 2 = x \end{cases}$$

ضابطه  $f(f(x))$  را در هریک از این حالات مشخص می کنیم:

$$x \geq 2 : f(f(x)) = 2 - |4 - x - 2| = 2 - |2 - x|$$

$$\xrightarrow{x \geq 2} f(f(x)) = 2 + 2 - x = 4 - x = f(x)$$

$$x < 2 : f(f(x)) = 2 - |x - 2| \xrightarrow{x < 2} 2 + x - 2 = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x)$$

در هر دو حالت ضابطه  $f(f(x))$  برابر ضابطه  $f(x)$  شد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

وارون تابع  $g$  عبارت است از:

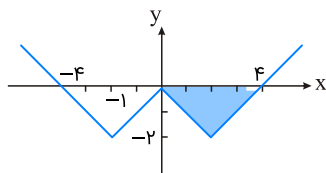
$$g^{-1} = \{(-1, 2), (4, -1), (-2, 3), (-3, -4)\}$$

تابع  $f(x)$  به ازای مقادیر  $x > 0$ ، مثبت و به ازای مقادیر  $x < 0$ ، منفی است، پس  $a$  قطعاً عددی منفی است.

$$f(a) = -\sqrt{-a} = -2 \Rightarrow \sqrt{-a} = 2 \Rightarrow a = -4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

اگر  $x \geq 0$  باشد آنگاه  $f(x) = |x - 2| - 2$  است. نمودار تابع را برای  $x \geq 0$  رسم می کنیم سپس برای  $x < 0$ ، کافی است قرینه منحنی نسبت به محور  $y$ ها رسم شود. سطح موردنظر دو برابر مساحت مثلثی به قاعده ۴ و ارتفاع ۲ است.



$$S = 2 \left( \frac{2 \times 4}{2} \right) = 8$$

آزمایشی سنجش ریاضی و فیزیک چهارم مرحله دوم ۱۳۹۳

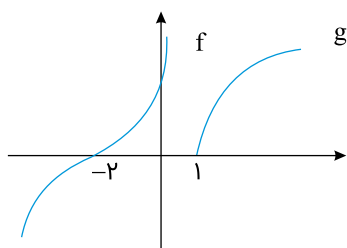
$$-2 \leq 2x - 1 \leq 4 \xrightarrow{+1} -1 \leq 2x \leq 5 \xrightarrow{\div 2} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \Rightarrow D_g = \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۹

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۹

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = \sqrt{x-1} \Rightarrow (x+2)^3 = \sqrt{x-1}$$

حال دو تابع  $f(x) = (x+2)^3$  و  $g(x) = \sqrt{x-1}$  را رسم می‌کنیم.

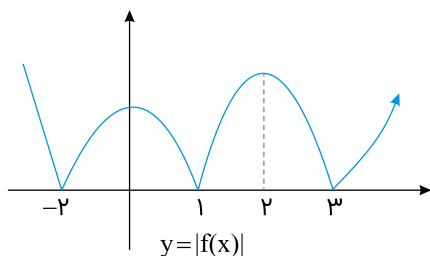


دو تابع برخوردی ندارند، پس معادله فوق ریشه حقیقی ندارد.

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

قسمت‌های زیر محور  $x$ ها را به بالای محور  $x$ ها متقارن می‌کنیم:

باتوجه به نمودار  $|f(x)|$  در بازه‌های  $[-2, 0]$ ،  $[1, 2]$  و  $[3, +\infty)$  صعودی اکید است.



علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

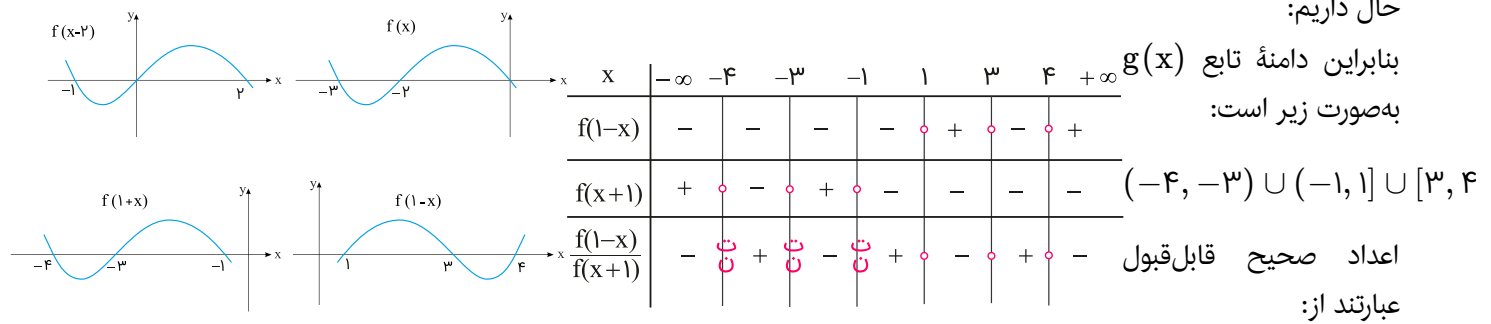
دامنه تابع  $f(x)$  برابر  $(-\infty, 4]$  است، پس دامنه تابع  $f(x+1)$  برابر  $(-\infty, 3]$  خواهد بود. دامنه  $g(x)$  و  $2g(x)$  برابر  $(-\infty, 3]$  است.

$$D_{\frac{f(x+1)}{2g(x)}} = D_{f(x+1)} \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = (-\infty, 3)$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۰۱

$$g(x) = \sqrt{\frac{f(1-x)}{f(x+1)}} \Rightarrow \frac{f(1-x)}{f(x+1)} \geq 0$$

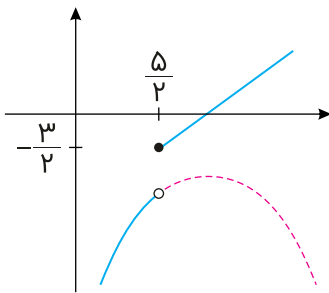
باتوجه به نمودار  $f(x-2)$ ، توابع  $f(1-x)$  و  $f(x+1)$  را رسم می‌کنیم:



$$x = 0, x = 1, x = 3, x = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

توابع یک به یک، وارون پذیرند. طول رأس تابع درجه دوم باید از  $x = \frac{5}{2}$  کمتر نباشد تا یک به یک شود.



$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b'}{2a'} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{-a}{-4} = \frac{a}{4} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow a \geq 10$$

مقدار تابع درجه دوم را در  $x = \frac{5}{2}$  محاسبه می کنیم که عرض رأس سهمی و بیشترین مقدار سهمی است:

$$-2\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}a - 21 < \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}a < 32 + \frac{5}{4} \Rightarrow a < 13/3$$

پس بزرگترین مقدار صحیح  $a$ , ۱۳ است.

$$f^{-1}(-3) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -3$$

باتوجه به شکل،  $f(\alpha) = -3$  در ضابطه پایینی اتفاق می افتد، بنابراین:

$$-2\alpha^2 + 13\alpha - 21 = -3 \Rightarrow 2\alpha^2 - 13\alpha + 18 = 0 \Rightarrow \alpha = 4/5, \alpha = 2$$

$\alpha$  باید از  $\frac{5}{2} = 2/5$  کمتر باشد، پس  $\alpha = 2$  مورد قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

$$f \circ g\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} - f\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right]\right) = f\left(\left[\frac{3}{3}\right]\right) = f(1) = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} + (-1) = -\frac{4}{3}$$

$$f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = f(2) = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

تابع  $f$  اکیداً صعودی است و دامنه آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است، بنابراین داریم:

$$2m^2 - 9m - 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > \frac{9 + \sqrt{97}}{4} \\ m < \frac{9 - \sqrt{97}}{4} \end{cases} \quad (1)$$

$$m^2 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow (m - 2)^2 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{2\} \quad (2)$$

$$f(2m^2 - 9m - 2) < f(m^2 - 4m + 4)$$

$$\xrightarrow{\text{صعودی اکید}} 2m^2 - 9m - 2 < m^2 - 4m + 4$$

$$\Rightarrow m^2 - 5m - 6 < 0 \Rightarrow (m + 1)(m - 6) < 0 \Rightarrow m \in (-1, 6) \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow m \in (-1, \frac{9 - \sqrt{97}}{4}) \cup (\frac{9 + \sqrt{97}}{4}, 6) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 5$$

در بازه به دست آمده، فقط یک عدد صحیح ۵ وجود دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

$$5y - 10x = 12 \xrightarrow{y=7/2} 5(7/2) - 10x = 12$$

$$\Rightarrow x = 2/5 \Rightarrow A'(2/5, 7/2) \in f^{-1}(x) \Rightarrow (7/2, 2/5) \in f(x)$$

$$\Rightarrow f(7/2) = 2/5 \Rightarrow \sqrt{7/2} \sqrt{m(7/2) - 1} = 2/5$$

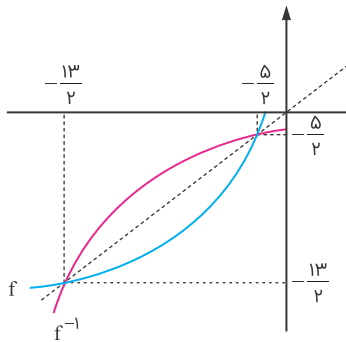
$$\xrightarrow{\text{به توان دو}} (7/2)(7/2m - 1) = (2/5)(2/5)$$

$$\Rightarrow 7/2m - 1 = 0/8 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

$$f(\frac{4}{m}) = f(16) = \sqrt{16} \sqrt{(16)(\frac{1}{4}) - 1} = 4\sqrt{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

معادله خط داده شده،  $y = x$  است؛ بنابراین نمودار تابع  $f^{-1}$ ، به صورت زیر است.  
تابع  $f^{-1}(x)$ ، همواره زیر محور  $x$  ها است؛ بنابراین  $f^{-1}(x)$  همواره منفی است.



$$\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)} \geq 0 \xrightarrow{f^{-1}(x) < 0} x - f^{-1}(x) < 0 \Rightarrow f^{-1}(x) > x$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\frac{13}{2}, -\frac{5}{2}\right) \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{-6, -5, -4, -3\}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

از برابری دامنه  $f(x)$  و  $f(kx)$ ،  $k = 1$  نتیجه می شود.

$$1 = 2a^2 - a - 5 \Rightarrow 2a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a_1 a_2 = \frac{-6}{2} = -3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

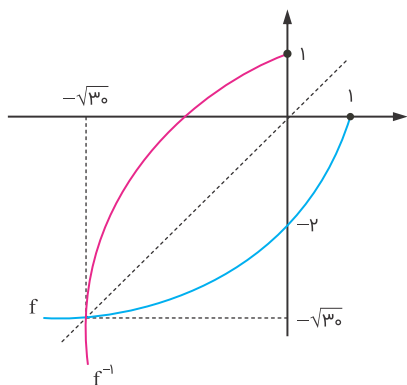
نقطه  $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{8}\right)$  روی تابع  $y = \frac{x}{a + a|x|}$  قرار می گیرد. بنابراین:

$$\frac{-\frac{3}{5}}{a + a\left(\frac{3}{5}\right)} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{-3}{5a + 3a} = -\frac{1}{8} \Rightarrow 8a = 24$$

$$\Rightarrow a = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

نمودار  $f^{-1}$  را رسم می‌کنیم.



دامنه تابع، جواب نامعادله  $\frac{f(x)}{f^{-1}(x) - x} \geq 0$  است.  $f(x) \leq 0$  است و  $f$  تنها در یک نقطه برابر صفر است ( $f(1) = 0$ ). پس کافی است که:

$$f^{-1}(x) - x < 0 \Rightarrow f^{-1}(x) < x \Rightarrow x < -\sqrt{30}$$

$$D_y = (-\infty, -\sqrt{30}) \cup \{1\}$$

بنابراین بی‌شمار عدد صحیح در دامنه تابع صدق می‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

اگر  $k = 1$  باشد، برد دو تابع باهم برابر خواهند بود.

$$k = a^2 - 3a + 3 \xrightarrow{k=1} a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a_1 a_2 = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

اگر نقطه  $(-\frac{1}{4}, -1)$  روی وارون تابع قرار گیرد، آنگاه نقطه  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  روی خود تابع قرار می‌گیرد.

$$\frac{1}{4} = \frac{-a}{1+a} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-7}{10} \Rightarrow 10b = 14a \Rightarrow 70 = 14a \Rightarrow a = 5$$

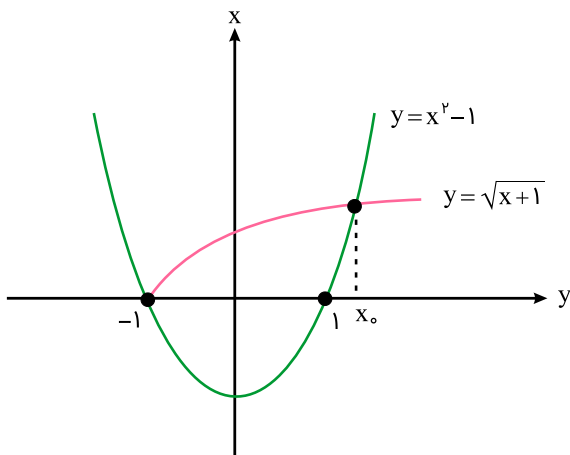
$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(49+20)}{4 \times 5} = \frac{-69}{20} = -3\frac{9}{20}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

تابع  $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x+1}}$  اکیداً صعودی است بنابراین نقاط برخورد  $f$  و  $f^{-1}$  روی خط  $y = x$  قرار می‌گیرد.

$$\sqrt{1 + \sqrt{x+1}} = x \xrightarrow[x > 0]{\text{به توان ۲}} 1 + \sqrt{x+1} = x^2 \\ \Rightarrow x^2 - 1 = \sqrt{x+1}$$

تعداد نقاط برخورد دو تابع  $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$  با طول مثبت جواب معادله خواهد بود.



دو تابع یکدیگر را در نقطه‌ای به طول  $x_0$  قطع کرده‌اند ( $x_0 > 1$ )، بنابراین  $f$  و  $f^{-1}$  در یک نقطه متقاطع‌اند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

چون دو تابع وارون یکدیگرند، بنابراین با یک نقطه می‌توانیم  $a$  را حساب کنیم.

$$y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2} \xrightarrow{x=3} y = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow (3, \frac{1}{4})$$

بنابراین نقطه  $(\frac{1}{4}, 3)$  روی تابع  $y = ax + a\sqrt{x}$  قرار دارد.

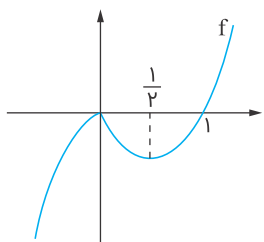
$$3 = \frac{a}{4} + \frac{a}{2} \Rightarrow a = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

(تذکر: صورت سوال ایراد دارد. باتوجه به اینکه کلید سنجش گزینه "۲" است، شکل درست آن به این صورت باید باشد:  
تابع  $y = (x - 1)|x|$  در بزرگترین بازه  $[a, b]$  اکیداً نزولی است. مقدار  $a + b$  کدام است؟)

$$y = (x - 1)|x| = \begin{cases} x^2 - x & ; x \geq 0 \\ -x^2 + x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



تابع  $f$  در بزرگترین بازه  $[0, \frac{1}{2}]$  اکیداً نزولی است، بنابراین:

$$a + b = \frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$(f \circ g^{-1})(a) = -3 \Rightarrow f(g^{-1}(a)) = -3 \Rightarrow g^{-1}(a) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a = g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳