



۱ نمودار تابع با ضابطه $y = 2 \left[\frac{x}{2} \right] + 1, x \in [-2, 6)$ حداقل از چند پاره خط مساوی هم، تشکیل شده است؟ (با تغییر)

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۲ در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار $f(-\frac{1}{4}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

(۲) ۲/۲۵

(۱) ۱/۷۵

(۴) ۲/۷۵

(۳) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۳ اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ ، عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

(۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$

(۱) $[\frac{2}{3}, 2]$

(۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

(۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴

اگر $f(x) = \sqrt{x+2|x|}$ ، مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟

(۱) تعریف نشده

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۵

اگر $0 < \frac{1-3x}{x+1} < 2$ باشد، مجموعه مقادیر $\left[\frac{x}{y}\right]$ چند عضو دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۶

اگر $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۷

اگر $f(x) = [1 - 3x]$ باشد، مقدار $f(-\frac{1}{7}) - f(-\frac{1}{7})$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۶

(۳) ۲

(۴) ۱

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۸

اگر $f(x) = [1 - \frac{x}{3}]$ باشد، مقدار $f(\frac{1}{7}) + 2f(\pi)$ کدام است؟ ([] جزء صحیح است)

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹

در تابع $f(x) = [x + \frac{3}{4}] - [-x]$ ، مقدار $f(\frac{9}{4}) + f(-\frac{1}{4})$ کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۱۰

در تابع $f(x) = 2[x] + [-x]$ مقدار $f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) صفر
(۴) ۱

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۱

اگر $f(x) = \left[1 - \frac{x}{2}\right]$ باشد، مقدار $f(\sqrt{2}) + f(-\frac{3}{2})$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۲
(۳) -۱
(۴) ۱

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲

اگر $f(x) = [2x - 1]$ باشد، مقدار $f(-\frac{3}{4}) + f(\frac{\sqrt{5}}{2})$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) -۱
(۴) -۲

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

(۲) $\frac{2x}{x^2-1}$

(۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

(۱) $\frac{1}{1-x^2}$

(۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

اگر $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ، تابع $g(x) = (f(\sqrt{x}))^2 - f(x)$ چگونه است؟

(۲) همانی

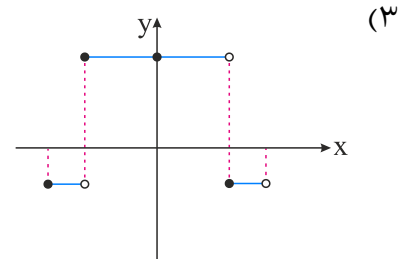
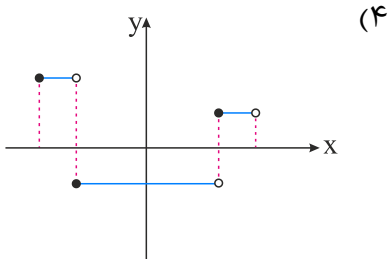
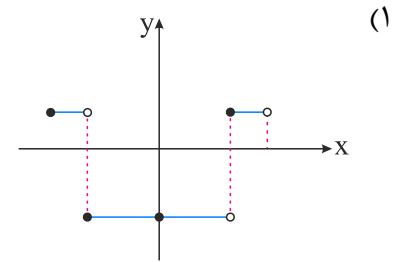
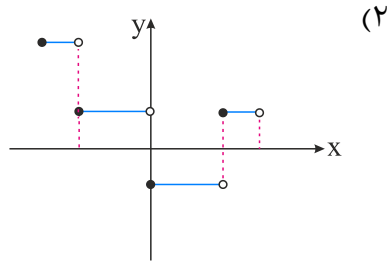
(۴) یک به یک

(۱) ثابت

(۳) چندجمله‌ای

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

نمودار تابع $y = 2| [3x] | - 1$ به ازای $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3}$ ، کدام است؟



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

اگر $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$ ، مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟

(۲) صفر

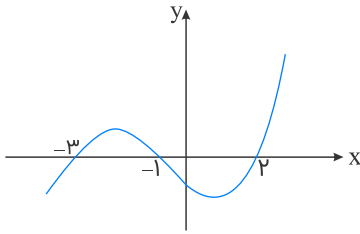
(۱) تعریف نشده

(۴) $\sqrt{2}$

(۳) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x)$ است. دامنه تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟



(۱) $[-3, 2]$

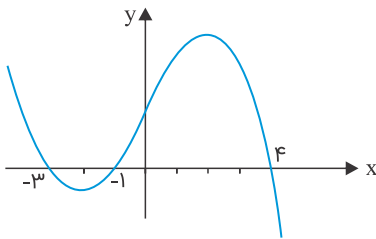
(۲) $[-1, +\infty)$

(۳) $(-\infty, -1]$

(۴) $\mathbb{R} - (-3, 2)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x - 2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟



(۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$

(۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$

(۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

(۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

رابطه $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, 2x + y \leq 7\}$ دارای چند زوج مرتب است؟

۶ (۲)

۵ (۱)

۹ (۴)

۸ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

نمودار تابع $y = [x^2]$ ، روی بازه $(-2, 2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است)

۵ (۲)

۴ (۱)

۷ (۴)

۶ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

دو تابع با ضابطه های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض اند. اگر $g(f(x)) = -2$ آنگاه مجموعه مقادیر x کدام است؟

$\mathbb{Z}$ (۲)

$\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۱)

$\emptyset$ (۴)

$\mathbb{R}$ (۳)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۲۲ اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x}$ آنگاه $f(8)$ کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) ۳
(۳) ۷
(۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

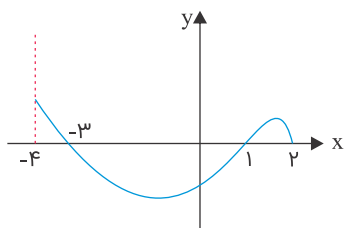
۲۳ اگر $x^2 + x < 0$ باشد، حاصل $[x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$ کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) صفر
(۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۲۴ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$
(۲) $[-3, 2]$
(۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$
(۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $[\sqrt{n^2 - 2n}] - 2[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}]$ کدام است؟ (نماد $[\]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

به ازای کدام مجموعه مقادیر k ، بازه $(k - 2, 3k + 2)$ زیرمجموعه‌ای از دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 1}$ است؟

(۲) $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

(۱) $(\frac{1}{3}, 3]$

(۴) $[-1, -\frac{1}{3})$

(۳) $[-1, \frac{1}{3})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۷

اگر $[x - 2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) فاقد نقطه مشترک

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۸

رابطه $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$ ، چند عضو زوج مرتب دارد؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۷

(۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۲۹

نمودار تابع با ضابطه $y = x - [x]; x \in [-2, 3]$ از n پاره‌خط مساوی به اندازه L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n, L) کدام است؟

(۱) $(4, 1)$ (۲) $(4, \sqrt{2})$ (۳) $(5, 1)$ (۴) $(5, \sqrt{2})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۳۰ اگر $f(x) = \sqrt{x + |x + 2|}$ ، دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

(۲) $x \geq -1$

(۱) $x \leq -1$

(۴) $x \geq 1$

(۳) $x \leq 1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۱ اگر جزء صحیح $(x^2 + x)$ برابر (-1) باشد، آنگاه $[x^{20}]$ کدام است؟ $([] : \text{جزء صحیح})$

(۲) صفر

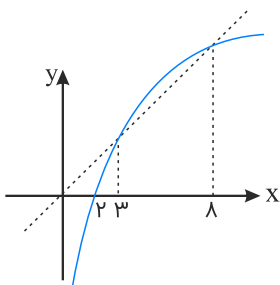
(۱) -1

(۴) ۲

(۳) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۳۲ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



(۱) $[0, 2]$

(۲) $[2, 3]$

(۳) $[2, \lambda]$

(۴) $[3, \lambda]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳۳

فرض کنید M نقطه تلاقی منحنی $y = \sqrt{x+3} - 1$ با تابع وارون خود باشد. فاصله نقطه M از مبدأ مختصات، کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) ۳

(۴) $2\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۴

نمودار $f(x) = 2 + 2^{b-ax}$ نمودار تابع $g(x) = -x^2 - 3x + 8$ را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. اگر $f^{-1}(10) = -1$ باشد، مقدار $2b - a$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) -۳

(۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۳۵

تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱) $-\frac{3}{2}$

(۲) $-\frac{3}{4}$

(۳) -۱

(۴) $-\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

(۲) $(-1, 3)$

(۱) $(-1, 1)$

(۴) $(2, 3)$

(۳) $(2, 1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

(۲) -5

(۱) -8

(۴) تعریف نشده

(۳) -2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۲) 1

(۱) $\frac{3}{4}$

(۴) 2

(۳) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳۹

تابع $f(x) = |2x - 2|$ و $g(x) = [x]$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ است. اگر مجموعه A بُرد تابع $f.g$ باشد، کدام عدد عضو A است؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) -۳

(۳) -۲

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۴۰

اگر $f(x) = 2 - |x + 1|$ و $g(x) = x + |x|$ ، آنگاه بُرد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

(۲) $(-1, +\infty)$ (۱) $(-\infty, \frac{1}{2})$ (۴) $(0, +\infty)$ (۳) $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۴۱

دو تابع $f(x) = b - 3ax$ و $g(x) = c - (3b - 3)x$ ثابت هستند. اگر $f + g = 5$ باشد، حاصل bc چقدر است؟

(۲) -۴

(۱) -۶

(۴) ۶

(۳) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴۲

دو تابع $f(x) = a + 3(b^2 - 1)x^2$ و $g(x) = bx^2 - 2a + x^2$ ثابت هستند. اگر $f \times g = -8$ باشد، حاصل $|ab|$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴۳

اگر $f(x) = (|a| - |b|)x$ تابع همانی، $g(x) = (b^2 - 1)x + (a^2 + 1)c$ تابعی ثابت و $(f - g)(x) = x + 5$ باشند، چند مقدار برای ac وجود دارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۴۴

اگر $f = \{(2, 5), (3, 4), (4, 6), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 3), (2, 6), (5, 2), (4, 9)\}$ باشند، برد تابع $g - f$ ، کدام است؟

- (۱) $\{-4, 1, 3\}$
(۲) $\{-4, 2, 3\}$
(۳) $\{-4, 1, 2, 3\}$
(۴) $\{1, 2, 3, 4\}$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

اگر $f = \{(1, 2), (2, 4), (4, 5), (3, 3)\}$ و $g = \{(3, 2), (2, 3), (6, 1), (1, 8)\}$ باشند، برد تابع $g \times f$ کدام است؟

(۲) $\{3, 6, 12, 16\}$

(۱) $\{6, 8, 12\}$

(۴) $\{6, 8, 12, 16\}$

(۳) $\{6, 12, 16\}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

اگر $f = \{(5, 3), (1, 5), (3, 4), (6, 2)\}$ و $g = \{(3, 2), (5, 6), (1, 2), (2, 1)\}$ باشند، برد تابع $\frac{f+g}{f}$ ، کدام است؟

(۲) $\{1/5, 1/8, 3\}$

(۱) $\{1/4, 1/5, 3\}$

(۴) $\{1, 2/5, 4\}$

(۳) $\{1, 1/4, 4\}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

اگر $f = \{(۳, ۴), (۲, ۶), (۵, ۳), (۱, ۵)\}$ و $g = \{(۵, ۶), (۱, ۲), (۳, ۲), (۴, ۱)\}$ باشند، برد تابع $\frac{f+g}{f-g}$ ، کدام است؟

$$\left\{ \frac{۷}{۳}, ۳, -۳ \right\} \quad (۲)$$

$$\left\{ \frac{۷}{۳}, ۳, -۲ \right\} \quad (۴)$$

$$\left\{ \frac{۵}{۳}, ۲, -۳ \right\} \quad (۱)$$

$$\left\{ \frac{۵}{۳}, ۴, -۲ \right\} \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

فرض کنید $f = \{(x, x^۲) | x = \pm ۵, \pm ۴, \dots, \pm ۱, ۰\}$ و $g = \{(x, x^۳) | x = \pm ۵, \pm ۴, \dots, \pm ۱, ۰\}$ دو تابع در صفحه مختصات باشند. تعداد عناصر برد تابع $y = \frac{g}{f}(x)$ ، کدام است؟

$$۱۰ \quad (۲)$$

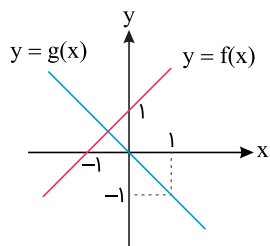
$$۵ \quad (۴)$$

$$۱۱ \quad (۱)$$

$$۶ \quad (۳)$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

فرض کنید نمودار تابع‌های خط راست $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در صفحه مختصات مطابق شکل زیر داده شده باشند. قدرمطلق اختلاف جواب‌های معادله $\frac{f^2(x)}{g(x)} = 2$ ، کدام است؟



(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) $3\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

اگر $f(x) = |x^2 - 5|$ و $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ، مقدار $\frac{1+f(-2)}{g(2)}$ کدام است؟

(۲) ۳

(۴) ۵

(۱) $\frac{5}{2}$

(۳) ۴

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۷

۵۱

اگر $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = |x + 1| + 1$ ؛ آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 1)$ (۲) $[0, 2)$
(۳) $[0, +\infty)$ (۴) $[1, +\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۵۲

اگر $f = \{(-1, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{3x - x^2}$ دو تابع باشند، مجموع دامنه و برد تابع $h = \frac{g^2 + f}{2 - f}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵
(۳) ۷ (۴) ۳

مدارس علوم تجربی البرز

۵۳

اگر f یک تابع خطی باشد به طوری که $f(3) = 4$ و $f(4) = 3$ ، تعداد نقاط تلاقی نمودارهای دو تابع f و f^{-1} کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱
(۳) ۲ (۴) بی شمار

آزمایشی سنجش ریاضی و فیزیک چهارم مرحله دوم ۱۳۹۳

۵۴

در تابع خطی f داریم $f(2) = 5$ و $f(7) = 12$ ، مقدار $f^{-1}(19)$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳
(۳) ۱۴ (۴) ۱۵

آزمایشی سنجش ریاضی و فیزیک چهارم مرحله دوم ۱۳۹۳

۵۵

اگر $f(x) = x + \sqrt{x+1}$ ، حاصل $f^{-1}(5) + f^{-1}(11)$ کدام است؟

(۲) ۱۱

(۱) ۸

(۴) ۱۲

(۳) ۵

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۱

۵۶

اگر $f = \{(2, 1), (-3, 2), (-1, -1), (0, -3)\}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ برد تابع $g \circ f + 2f$ کدام است؟

(۲) $\{-2, -5, 5\}$

(۱) $\{-2, 5, 3\}$

(۴) $\{2, -3, 3\}$

(۳) $\{3, -5, 5\}$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۱

۵۷

اگر $f = \{(2, 5), (1, -3), (-4, 2)\}$ و $g = \{(2, -3), (-4, -5), (3, -2)\}$ باشد، آنگاه برد تابع $\frac{f+2g}{f-g}$ کدام است؟

(۲) $\{\frac{-8}{7}, \frac{1}{8}\}$

(۱) $\{\frac{-8}{7}, \frac{-1}{8}\}$

(۴) $\{\frac{-3}{7}, \frac{-2}{5}\}$

(۳) $\{\frac{5}{7}, \frac{7}{2}\}$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

۵۸

دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$ دارای چند عدد صحیح است؟

(۲) ۴

(۱) ۳

(۴) ۶

(۳) ۵

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

۵۹

اگر $f = \{(1, 2), (3, -2), (4, 1), (2, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (1, 1), (3, 2)\}$ حاصل $f^{-1}(-1) + f^{-1}(1) + g^{-1}(2)$ کدام است؟

(۲) ۷

(۱) ۱۱

(۴) ۹

(۳) ۱۰

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۶۰

قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

(۲) -۱

(۱) -۲

(۴) ۲

(۳) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} & ; x \geq 1 \\ \frac{x-1}{2} & ; x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

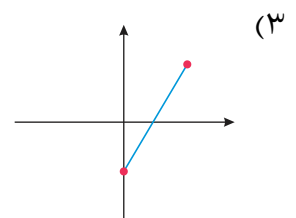
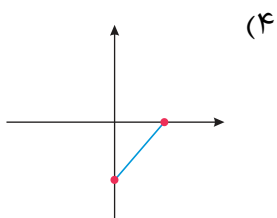
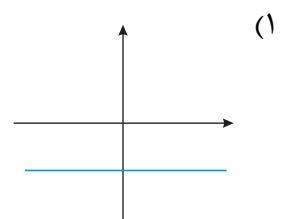
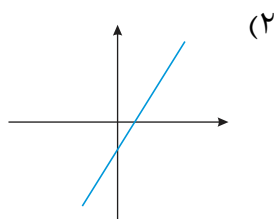
$$\begin{cases} x-1 & ; x \geq 1 \\ \frac{x-1}{3} & ; x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} & ; x \geq 1 \\ x+1 & ; x < 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} & ; x \geq 1 \\ x-1 & ; x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱

۶۲ اگر $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4-x}$ و $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ باشد، نمودار تابع $h(x) = (fg)(x)$ کدام اسآ؟



علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۰

۶۳

اگر $f = \{(1, 2), (2, 0), (3, -1), (-1, 4)\}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ باشد، مجموع عضوهای دامنه تابع $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)-1}$

کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۲

(۴) ۶

(۳) ۵

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۰

۶۴

اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x} + 1$ باشد، $g(3) + g(7)$ کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۲

(۴) ۵

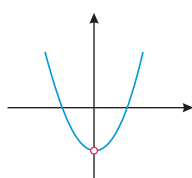
(۳) ۷

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۰

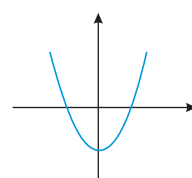
۶۵

اگر $f(x) = x^3 - 2x$ و $g(x)$ تابع همانی باشد، نمودار $\frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

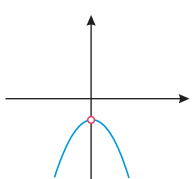
(۲)



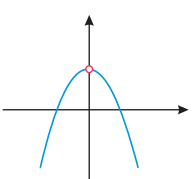
(۱)



(۴)

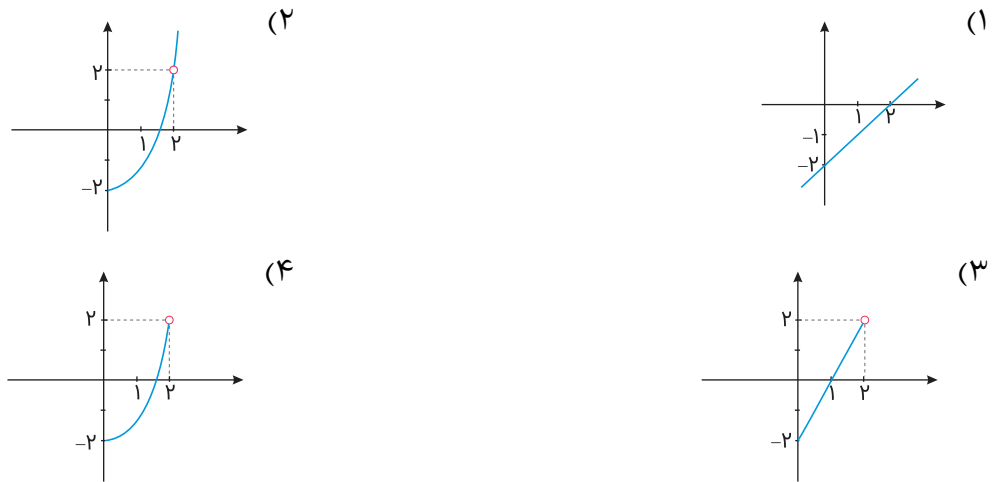


(۳)



علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۰

نمودار وارون تابع $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2-x}}$ کدام است؟



علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۹

نمایش هندسی تابع معکوس $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

- (۱) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2)$ (۲) $(1, 0)$
 (۳) $(0, 1)$ (۴) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$

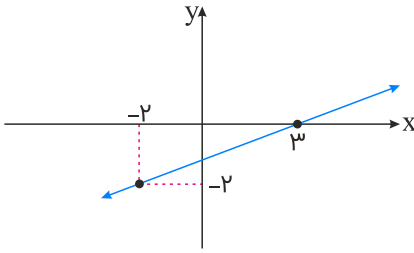
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۹

اگر $f = \{(-1, 1), (1, 2), (0, 4), (2, 0)\}$ و $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشد، آنگاه کدام عدد در برد تابع $2f - 3g$ نیست؟

- (۱) ۲ (۲) ۳
 (۳) ۴ (۴) ۵

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۰

اگر نمودار زیر مربوط به تابع $y = f^{-1}(x)$ باشد، در این صورت $f(2)$ کدام است؟



(۱) صفر

(۲) ۸

(۳) ۶

(۴) ۴

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۰

اگر $f = \{(2, 1), (3, 2), (-1, 0)\}$ و $g = \{(2, 0), (-1, 1), (4, 1)\}$ باشد، آنگاه قدر مطلق اختلاف تعداد اعضای دامنه $f + g$ از تعداد اعضای برد $f + g$ کدام است؟

(۲) -۱

(۱) ۱

(۴) -۲

(۳) ۲

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۰

اگر معکوس تابع $f = \{(4, 4), (k, 1), (2, 1), (2k, m)\}$ یک تابع باشد، m کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۴

(۴) ۲

(۳) ۱

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

۷۲

تابع $f(x) = 3x + \sqrt{x-2}$ و وارون آن در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۹

۷۳

اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، $a + b$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۳

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۰

۷۴

اگر $f(x) = \sqrt{5-x}$ و $g(x) = \frac{x-3}{x-4}$ باشد، آنگاه $D_{\frac{f}{g}}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

(۱) ۶

(۲) ۵

(۳) ۴

(۴) ۳

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۰

۷۵

اگر $f(x) = x + 3$ و $(f \times g)(x) = x^2 + 2x - 3$ باشد، آنگاه $(f - g)(2)$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) -۴
(۳) ۲
(۴) -۲

علوی علوم انسانی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۰

۷۶

اگر x, y, z دنباله‌ای هندسی با جملات نابرابر و $5z, 3y, x$ یک دنباله حسابی باشد، مقدار $\left[\frac{x}{z}\right]$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۵
(۳) ۹
(۴) ۲۵

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۷۷

جملات x, y, z سه جمله متوالی یک دنباله حسابی و مجموع آن‌ها برابر ۲۱ است. اگر $z + 2, y + 4, x + 6$ یک دنباله هندسی باشد، مقدار $\left[\frac{xy}{z}\right]$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۱۱
(۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

ریشه‌های معادله $2x^2 - ax + b = 0$ نیم‌واحد از ریشه‌های معادله $2ax^2 + ax - 6 = 0$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{4}\right]$ کدام است؟

(۲) -۳

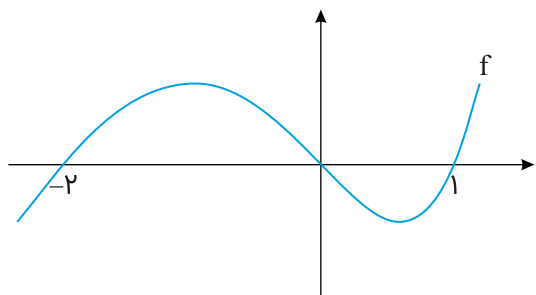
(۱) -۴

(۴) -۱

(۳) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(2+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۴

(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

تابع f همانی و $g(x) = [x] + [-x]$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ است. به ازای چند مقدار صحیح x ، اعضای مجموعه برد تابع $\frac{f}{g}$ مقداری صحیح است؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۳

(۳) ۲

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

تابع f ، تابع ثابت و برای $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $f(m) + f(n) = f(m)f(n)$. اگر دو زوج مرتب $(2n^2 - 7n + 1, -f(m))$ و $(m^2 - 4m + 6, nf(n))$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، مقدار $\left[\frac{mn}{5}\right]$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

تابع $f(x) = [x] + [-x]$ با دامنه $-3 \leq x \leq 3$ و g تابع ثابت است. مقدار تابع $\frac{g}{f}$ در چند نقطه صحیح در دامنه برابر ۳ است؟

- (۱) ۶
(۲) ۴
(۳) ۲
(۴) صفر

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^2}{2}\right]$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

به‌ازای چند مقدار طبیعی از دامنه تابع $y = -\frac{1}{3-x}$ ، نمودار این تابع بالای $y = -4$ و پایین $y = 0$ قرار دارد؟

(۲) ۳

(۱) ۴

(۴) ۱

(۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

اگر توابع f و g به‌صورت زیر باشد، مجموعه بُرد تابع $\frac{f}{f \times g}$ کدام است؟

$$f = \{(1, -1), (\sqrt{2}, -2), (\sqrt{3}, -3), (2, 2), (\sqrt{5}, 1)\}$$

$$g = \{(3, -1), (\sqrt{2}, -1), (-3, 4), (\sqrt{5}, -3), (\sqrt{3}, 2)\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -1\right\} \quad (2)$$

$$\{2, -3, -1\} \quad (1)$$

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -1\right\} \quad (4)$$

$$\{-3, 1, -2\} \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

ضابطه تابع قطعه‌ای f ، به‌صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 7 & ; x \geq 1 \\ 2x - 1 & ; x < 1 \end{cases}$ است. برای چند مقدار a ، $f(1 - |a|) = f(2 + |a|)$ است؟

(۲) ۳

(۱) ۴

(۴) ۱

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

ضابطه تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x) = \begin{cases} 7 - 3x & ; |x| > 1 \\ -2x & ; |x| < 1 \end{cases}$ است. اگر $f(1 + a^2) = f(\frac{-a^2}{1 + a^2})$ باشد، اختلاف مقادیر a کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} -5 \\ (\frac{m}{2} + 2)x - 1 \end{cases}$ یک تابع پلکانی (پله‌ای) باشد، آنگاه مقدار m کدام است؟

- (۱) -۴
(۲) -۵
(۳) -۱
(۴) -۲

اگر $[\frac{x}{2}] = -2$ باشد، آنگاه حاصل $[-\frac{1}{2}x - 1]$ کدام است؟

- (۱) صفر یا ۱
(۲) -۲ یا -۱
(۳) ۱
(۴) صفر

دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{[x]-4}$ کدام است؟

(۱) $\mathbb{R} - [4, 5)$

(۳) $[1, 4] \cup [6, +\infty)$

(۲) $[1, +\infty) - \{4\}$

(۴) $[1, 4) \cup [5, +\infty)$



گزینه ۲

۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

باتوجه به ضابطه تابع که به صورت $y = 2 \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil + 1$ است، محدوده اولیه x را به زیربازه‌های زیر تقسیم کرده و در هر زیربازه مقدار y را تعیین می‌کنیم.

$$-2 \leq x < 0, 0 \leq x < 2, 2 \leq x < 4, 4 \leq x < 6$$

گام دوم

برای پاسخ گویی به تست نیازی به رسم نمودار تابع نیست. به تعداد ضابطه‌های به‌دست‌آمده، پاره‌خط در نمودار تابع وجود دارد.

$$-2 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil = -1 \Rightarrow y = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$2 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$4 \leq x < 6 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

پس نمودار تابع حداقل از چهار پاره‌خط مساوی به طول ۲ تشکیل شده است.

گزینه ۲

۲

ابتدا توجه کنید که $\sqrt{3} \approx 1/7$ ، پس:

$$f(x) = x^2 - 2 \lceil x \rceil \Rightarrow f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2 \lceil \sqrt{3} \rceil = 3 - 2 \times 1 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} f(\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} \times 1 = -0/5$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2} f(\sqrt{3})\right) = (-0/5)^2 - 2 \lceil -0/5 \rceil = 0/25 - 2(-1) = 2/25$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

راه حل تستی:

می‌توانیم از روش رد گزینه استفاده نماییم:

$x = 0 \Leftarrow \text{غ.ق.ق} \Leftarrow$ گزینه (۲) حذف می‌شود.

$x = 1 \Leftarrow \text{غ.ق.ق} \Leftarrow$ گزینه (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

راه حل تشریحی:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \Rightarrow 4 - 9x^2 \geq 0 \xrightarrow{x \neq 0} x^2 \leq \frac{4}{9} \xrightarrow{x \neq 0} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

از طرفی چون $x \neq 0$ است، پس گزینه (۴) قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

باتوجه به ضابطه $f(x)$ ، ابتدا $f(-144)$ و سپس $f(f(-144))$ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x + 2|x|} \Rightarrow f(-144) = \sqrt{-144 + 2|-144|} \\ &= \sqrt{-144 + 288} = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow f(-144) = 12 \end{aligned}$$

حالا $f(12)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(f(-144)) = f(12) = \sqrt{12 + 2|12|} = \sqrt{12 + 24} = \sqrt{36} = 6$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

$$\frac{1-3x}{x+1} < 0$$

	-1	$\frac{1}{3}$	
-	+	-	

$$x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$$

$$-2 < \frac{1-3x}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{1-3x}{x+1} + 2 \Rightarrow 0 < \frac{1-3x+2x+2}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{-x+3}{x+1}$$

	-1	3	
-	+	-	

$$x \in (-1, 3)$$

از اشتراک جواب‌ها به $x \in (\frac{1}{3}, 3)$ می‌رسیم:

$$\frac{1}{3} < x < 3 \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{x}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow [\frac{x}{2}] = \{0, 1\}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

$$\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 4-2x=0 \Rightarrow x=2 \\ 3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

x	$-\frac{1}{3}$	2	
$4-2x$	+	+	-
$3x+1$	-	+	+
$\frac{4-2x}{3x+1}$	-	+	-

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} < x \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -1 < 3x \leq 6$$

$$\Rightarrow [3x] = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow 8 \text{ عضو}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

ابتدا $f(-\circ/\gamma)$ را می‌یابیم؛ به این منظور در تابع $f(x)$ ، به جای x ، $-\circ/\gamma$ را قرار می‌دهیم:

$$f(-\circ/\gamma) = [1 - 3(-\circ/\gamma)] = [1 + 2/\gamma] = [3/\gamma] = 3$$

به‌طورمشابه برای $f(-\circ/\circ\gamma)$ داریم:

$$f(-\circ/\circ\gamma) = [1 - 3(-\circ/\circ\gamma)] = [1 + \circ/2\gamma] = [1/2\gamma] = 1$$

پس داریم:

$$f(-\circ/\gamma) - f(-\circ/\circ\gamma) = 3 - 1 = 2$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

$$f(\circ/\gamma) = [1 - \frac{\circ/\gamma}{3}] = [1 - \frac{\gamma}{3\circ}] = [\frac{23}{3\circ}] = \circ$$

$$f(\pi) = [1 - \frac{\pi}{3}] = -1$$

$$f(\circ/\gamma) + 2f(\pi) = \circ + 2(-1) = -2$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

$$f(\frac{9}{f}) = [\frac{9}{f} + \frac{3}{2}] - [-\frac{9}{f}] = [\frac{15}{f}] - [-\frac{9}{f}] = 3 - (-3) = 6$$

$$f(-\frac{1}{f}) = [-\frac{1}{f} + \frac{3}{2}] - [+ \frac{1}{f}] = [1] - [\frac{1}{f}] = 1 - \circ = 1$$

$$\Rightarrow f(\frac{9}{f}) + f(-\frac{1}{f}) = 6 + 1 = 7$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

اعداد داده شده را در ضابطه تابع قرار می دهیم:

$$f(x) = 2[x] + [-x]$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = (2\left[-\frac{1}{2}\right] + [-(-\frac{1}{2})]) + (2\left[\frac{3}{2}\right] + [-\frac{3}{2}])$$

$$-1 < -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}\right] = -1, \quad 0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}\right] = 0$$

$$-2 < -\frac{3}{2} < -1 \Rightarrow \left[-\frac{3}{2}\right] = -2, \quad 1 < \frac{3}{2} < 2 \Rightarrow \left[\frac{3}{2}\right] = 1$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = (2 \times (-1) + 0) + (2 \times 1 + (-2)) = -2 + 0 = -2$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

مقدار تابع را به ازای مقادیر خواسته شده محاسبه کرده و سپس مجموع را به دست می آوریم:

$$f(x) = \left[1 - \frac{x}{2}\right] \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0$$

توجه کنید که:

$$1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow -1 < -\frac{\sqrt{2}}{2} < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left[1 - \frac{(-\frac{3}{2})}{2}\right] = \left[1 + \frac{3}{4}\right] = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}) + f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 + 1 = 1$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

مقدار تابع را به ازای مقادیر خواسته شده محاسبه کرده و حاصل را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = [2x - 1]$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \left[2\left(-\frac{3}{4}\right) - 1\right] = \left[-\frac{3}{2} - 1\right] = \left[-\frac{5}{2}\right] = -3$$

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \left[2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) - 1\right] = [\sqrt{5} - 1] = 1$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -3 + 1 = -2$$

نکته: برای محاسبه $[\sqrt{5} - 1]$ ، می‌دانیم $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$. بنابراین:

$$2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 1 < \sqrt{5} - 1 < 2 \Rightarrow [\sqrt{5} - 1] = 1$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

$$\begin{aligned} f(x^2) - 2f(x) + 1 &= \frac{x^2}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x - 1} + 1 \\ &= \frac{x^2 - 2x(x + 1) + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{-2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x + 1}{1 - x^2} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

اول ضابطه $f(\sqrt{x})$ را تعیین می‌کنیم. در تعیین ضابطه $f(\sqrt{x})$ حتماً به این نکته توجه داشته باشید که دامنه آن متفاوت با دامنه تابع $f(x)$ است.

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

حالا ضابطه تابع $g(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} g(x) &= (f(\sqrt{x}))^2 - f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{x^2} \\ &\Rightarrow g(x) = 2, \quad x \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

بنابراین تابع $g(x)$ یک تابع ثابت است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{3} &\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq 3x < -1 \Rightarrow [3x] = -2 \Rightarrow y = 3 \\
-\frac{1}{3} \leq x < 0 &\Rightarrow -1 \leq 3x < 0 \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1 \\
0 \leq x < \frac{1}{3} &\Rightarrow 0 \leq 3x < 1 \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1 \\
\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} &\Rightarrow 1 \leq 3x < \frac{3}{2} \Rightarrow [3x] = 1 \Rightarrow y = 1
\end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

ابتدا $f(-1)$ و سپس با داشتن مقدار آن $f(\sqrt{2})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt{2 - x - x^2} \Rightarrow f(-1) = \sqrt{2 - (-1) - (-1)^2} = \sqrt{2 + 1 - 1} = \sqrt{2}$$

برای رسیدن به جواب تست باید حاصل $f(\sqrt{2})$ را محاسبه کنیم:

$$f(f(-1)) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2} - 2} = \sqrt{-\sqrt{2}}$$

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد، پس حاصل $f(f(-1))$ تعریف نشده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

$$(x+1)f(x) \geq 0$$

$$(x+1)f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ f(x)=0 \Rightarrow x=-3, -1, 2 \end{cases}$$

دامنه تابع به صورت $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty) \cup \{-1\}$ است که طبق گفته مسئله،دامنه تابع غیرنقطه‌ای به صورت $\mathbb{R} - (-3, 2)$ خواهد بود.

x	$-\infty$	-3	-1	2	$+\infty$			
$(x+1)f(x)$		+	0	-	0	-	0	+

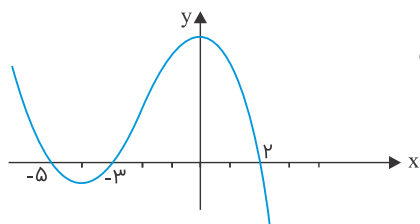
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است، پس باید $xf(x) \geq 0$ باشد، پس x و $f(x)$ باید هر دو هم‌علامت باشند.
 ب) برای به دست آوردن نمودار تابع $f(x)$ از روی نمودار تابع $f(x-2)$ ، کافی است نمودار تابع $f(x-2)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

گام دوم

باتوجه به نمودار تابع $f(x-2)$ و با انتقال دو واحدی آن به سمت چپ، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



طبق گام اول، محدوده‌ای که در آن x و $f(x)$ هم‌علامت باشند، قابل قبول است پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با: $[-5, -3] \cup [0, 2]$

گام اول

به شرط‌های اشاره شده در سؤال خوب دقت کنید. هر دو مقدار x و y باید عضو اعداد طبیعی باشند. حالت‌هایی که $2x + y \leq 7$ می‌شود را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

برای حل مرتب مسئله به x از یک مقدار می‌دهیم و مقادیر قابل قبول برای y را مشخص می‌کنیم.

$$1) \quad x = 1 \Rightarrow 2x = 2 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 2 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 5 \xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1, 2, 3, 4, 5$$

در این حالت ۵ زوج مرتب زیر ویژگی موردنظر را دارند:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$$

$$2) \quad x = 2 \Rightarrow 2x = 4 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 4 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 3$$

$$\xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1, 2, 3 \Rightarrow (2, 1), (2, 2), (2, 3) \in \mathbb{R}$$

$$3) \quad x = 3 \Rightarrow 2x = 6 \xrightarrow{2x+y \leq 7} 6 + y \leq 7 \Rightarrow y \leq 1 \xrightarrow{y \in \mathbb{N}} y = 1$$

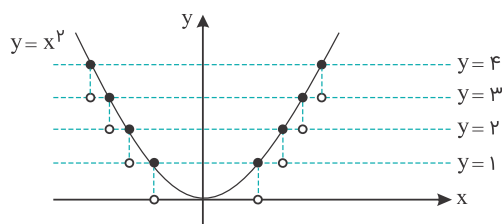
در این حالت تنها زوج مرتب $(3, 1)$ عضو رابطه R است.

به ازای مقادیر $x \geq 4$ ، هیچ مقدار طبیعی برای y یافت نمی‌شود. بنابراین رابطه R با زوج مرتب‌های تشکیل‌دهنده آن به صورت زیر درمی‌آید:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

پس مجموعه R دارای ۹ عضو به صورت زوج مرتب است.

اول نمودار تابع $y = x^2$ را در بازه $(-2, 2)$ رسم می کنیم. برای به دست آوردن نمودار تابع $y = [x^2]$ از روی نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(-2, 2)$ خطوطی به موازات محور x ها رسم کرده و قسمت هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) قرار می گیرند را بر روی خط $y = k$ تصویر می کنیم. در نهایت نقاط تلاقی خط و نمودار توپر خواهد شد.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y = [x^2]$ در بازه $x \in (-2, 2)$ از هفت پاره خط تشکیل شده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

مقدار $[x] + [-x]$ برای اعداد صحیح و غیرصحیح متفاوت است. بنابراین خواستار آن باشد که برای $f(x)$ دو مقدار به دست می آید، یک مقدار به ازای $x \in \mathbb{Z}$ است و مقدار دیگر به ازای $x \notin \mathbb{Z}$. یعنی:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ضابطه $g(f(x))$ را برای هر یک از این حالت ها تعیین می کنیم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = g(0) \xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(0) = 0 + 0 - 2 = -2$$

بنابراین به ازای $x \in \mathbb{Z}$ رابطه $g(f(x)) = -2$ برقرار است.

$$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow g(f(x)) = g(-1)$$

$$\xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = 1 - 1 - 2 = -2 \Rightarrow g(f(x)) = -2$$

پس رابطه $g(f(x)) = -2$ به ازای تمام x های صحیح و غیرصحیح یعنی به ازای $\mathbb{R}$ برقرار است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

ساده تر از این امکان ندارد. ضابطه $f(x)$ به ما داده شده است. برای محاسبه $f(8)$ کافی است در ضابطه داده شده به جای x عدد ۸ را قرار دهیم.

گام دوم

$$f(x) = 3 + \sqrt{2x} \Rightarrow f(8) = 3 + \sqrt{2 \times 8} = 3 + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \Rightarrow f(8) = 7$$

اگر $x^2 + x < 0$ باشد، $-1 < x < 0$ خواهد بود، بنابراین:

$$\begin{aligned} -1 < x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \\ -1 < x < 0 &\Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \\ -1 < x < 0 &\Rightarrow -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1 \\ -1 < x < 0 &\Rightarrow 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0 \\ \Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] &= -1 + 0 - 1 + 0 = -2 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد، پس داریم: $xf(x) \geq 0$

گام دوم

حالا با استفاده از جدول تعیین علامت، مشخص می‌کنیم در چه بازه‌هایی $xf(x) \geq 0$ برقرار است. داریم:

x	-۴	-۳	۰	۱	۲
x	-	-	۰	+	+
f(x)	+	۰	-	-	+
xf(x)	-	۰	+	-	+

دو بازه مشخص شده مقادیر قابل قبول برای دامنه تعریف تابع است، پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ به صورت $[1, 2] \cup [-3, 0]$ درمی‌آید.

بعضی از تست های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می کنیم.
روش اول:
به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2$$

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1$$

از طرف دیگر وقتی $n > 2$ باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 \Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2$$

پس حاصل عبارت داده شده به ازای $n > 2$ برابر است با:

$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = 2n-1 - 2(n-2) = 2n-1 - 2n+4 = 3$$

روش دوم (روش عددگذاری):

در صورت تست به این نکته اشاره شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است، کافی است یک عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت داده شده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان تر، n را ۳ در نظر می گیریم:

$$A = [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] \xrightarrow{n=3} A = [\sqrt{36 - 9 + 1}] - 2[\sqrt{9 - 6}]$$

$$= [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2(1) = 5 - 2 = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

دامنه تابع $\{1\} - [-3, 3]$ است. اگر $(k-2, 3k+2)$ زیرمجموعه دامنه تابع باشد، دو حالت رخ می دهد:

$$(1) : (k-2, 3k+2) \subseteq [-3, 1) \Rightarrow \begin{cases} 3k+2 < 1 \Rightarrow k < -\frac{1}{3} \\ k-2 \geq -3 \Rightarrow k \geq -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k \in [-1, -\frac{1}{3})$$

$$(2) : (k-2, 3k+2) \subseteq (1, 3] \Rightarrow \begin{cases} 3k+2 \leq 3 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3} \\ k-2 > 1 \Rightarrow k > 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

$$[x - 2] = 1 \Rightarrow 1 \leq x - 2 < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

اگر $3 \leq x < 4$ باشد، پس $x - 3 \geq 0$ و $x - 4 < 0$ خواهد بود.

$$f(x) = \underbrace{|x - 3|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|x - 4|}_{\text{منفی}} = x - 3 + (x - 4) = 2x - 7$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - 7 = 2x^2 + x - 17 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} & \times \\ x = -2 & \times \end{cases}$$

هیچ کدام از جواب‌های به دست آمده در فاصله $3 \leq x < 4$ نیستند؛ پس معادله $f(x) = g(x)$ هیچ جوابی ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

دقت کنید که x و y فقط باید مقادیر صحیح بپذیرند.

گام دوم

با توجه به این که $|x|$ و $|y|$ مقادیر نامنفی هستند، حالت‌های زیر برای $|x|$ و $|y|$ می‌تواند رخ دهد:

$$۱) |x| = 2, |y| = 0 \Rightarrow x = \pm 2, y = 0 \Rightarrow (2, 0), (-2, 0) \in R$$

$$۲) |x| = 0, |y| = 2 \Rightarrow x = 0, y = \pm 2 \Rightarrow (0, 2), (0, -2) \in R$$

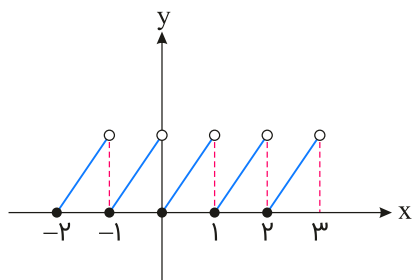
$$۳) |x| = 1, |y| = 1 \Rightarrow x = \pm 1, y = \pm 1 \Rightarrow (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1) \in R$$

بنابراین رابطه R با اعضایش به صورت زیر در می‌آید:

$$R = \{(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

پس رابطه R دارای ۸ عضو به صورت زوج مرتب است.

برای رسم نمودار تابع، محدوده اولیه x را به پنج زیربازه زیر تقسیم می کنیم:



$$-2 \leq x < -1, -1 \leq x < 0, 0 \leq x < 1, 1 \leq x < 2, 2 \leq x < 3$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x - (-2) = x + 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x - (-1) = x + 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - (1) = x - 1$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = x - (2) = x - 2$$

در این بازه تابع از پنج پاره خط به اندازه $\sqrt{2}$ تشکیل شده است. پس دوتایی مرتب (n, L) به صورت $(5, \sqrt{2})$ می شود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

وقتی دامنه تعریف تابع $f(-x)$ از ما خواسته شده است، پس ابتدا باید ضابطه $f(-x)$ را از روی تابع $f(x)$ تشکیل دهیم. تابع داده شده یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است، پس عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

گام دوم

تشکیل ضابطه $f(-x)$ و تعیین دامنه تعریف آن:

$$f(x) = \sqrt{x + |x + 2|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x + |-x + 2|} = \sqrt{|-x + 2| - x}$$

$$|-x + 2| - x \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2: -x + 2 < 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow x - 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \text{ غ.ق.ق} \\ x \leq 2: -x + 2 \geq 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow -x + 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2x + 2 \geq 0 \\ \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

با توجه به بازه اولیه دامنه تعریف تابع $f(-x)$ ، به صورت $x \leq 1$ در می آید.

گام اول

با توجه به صورت سؤال $[x^2 + x] = -1$ بوده و با توجه به ویژگی های جزء صحیح محدوده قابل قبول برای $x^2 + x$ به صورت $-1 \leq x^2 + x < 0$ است.

گام دوم

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0$$

هر یک از طرفین نامعادله را به صورت جداگانه بررسی می کنیم.

$$1) \quad x^2 + x \geq -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \\ \text{ضریب } x^2 = 1 > 0 \end{cases}$$

با توجه به این که $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت است، عبارت $x^2 + x + 1$ همواره مثبت و نامعادله همواره برقرار است.

$$2) \quad x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

پس $-1 < x < 0$ جواب نامعادله است و داریم:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^0 < 1 \Rightarrow [x^0] = 0$$

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

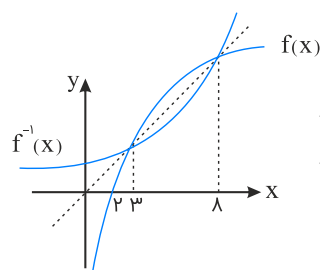
الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد.

ب) نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.

دامنه تابع $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ محدوده ای است که عبارت $x - f^{-1}(x)$ نامنفی می شود. پس:

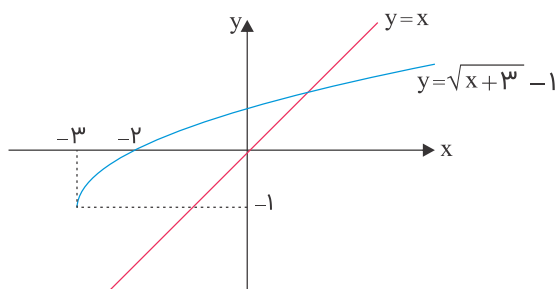
$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

چون دو نمودار $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (همان خط $y = x$) قرینه هم هستند، بنابراین در نقاطی که نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، نمودار $y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار می گیرد و برعکس.



در بازه $[3, 8]$ نمودار تابع $y = f(x)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد، بنابراین در همین بازه نمودار $y = f^{-1}(x)$ پایین خط $y = x$ قرار گرفته و در نتیجه $x - f^{-1}(x)$ مثبت می شود (به عبارت صحیح تر نامنفی می شود)، بنابراین بازه $[3, 8]$ دامنه تعریف تابع داده شده است.

نمودار تابع $y = \sqrt{x+3} - 1$ به صورت زیر است:



نقطه تقاطع تابع با وارونش روی خط $y = x$ قرار دارد، پس کافی است که تابع $y = \sqrt{x+3} - 1$ را با $y = x$ قطع دهیم:

$$\sqrt{x+3} - 1 = x \Rightarrow \sqrt{x+3} = x+1 \Rightarrow x+3 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in D \\ x = -2 \notin D \end{cases}$$

پس نقطه تلاقی f و f^{-1} نقطه $(1, 1)$ است و فاصله آن از مبدأ $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ خواهد شد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$\left. \begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow -1 - 3 + 8 = 2 + 2^{b-a} \Rightarrow 2^{b-a} = 2 \Rightarrow b - a = 1 \\ f(-1) = 10 &\Rightarrow 2 + 2^{b+a} = 10 \Rightarrow b + a = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} b &= 2 \\ a &= 1 \end{aligned} \Rightarrow 2^b - a = 3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

$y = -x$; $x < 0$: نیمساز ناحیه دوم

نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه دوم را قطع می‌کند، پس:

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$$

$$\Rightarrow -x + \frac{1}{2x} = x \Rightarrow \frac{1}{2x} = 2x \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{x < 0} x = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

یک تابع به صورت مجموعه ای از زوج مرتبها نمایش داده شده است، برای این که تابع یک به یک شود، باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه دوم برابر نداشته باشند. اگر مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب با هم برابر بود باید مؤلفه های اول آنها هم برابر باشد. هم چنین شرط تابع بودن در حل این گونه سؤال ها فراموش نشود. این که زوج مرتبها نباید مؤلفه اول تکراری داشته باشند و اگر تکراری بود باید مؤلفه های دوم هم برابر شود.

در رابطه داده شده دو زوج مرتب $(۳, ۲)$ و $(۳, a^۲ - a)$ مشاهده می شود. برای این که رابطه در وهله اول یک تابع باشد، باید مؤلفه های دوم با هم برابر باشند:

$$a^۲ - a = ۲ \Rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰ \Rightarrow (a - ۲)(a + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = -۱ \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام یک از این مقادیر تابع یک به یک می شود:

تابع یک به یک نیست $\Rightarrow (-۱, ۴) \in f, (-۱, ۵) \in f \Rightarrow a = -۱$

بنابراین فقط $a = ۲$ قابل قبول است. حالا مقدار b را به دست می آوریم:

$$(۳, ۲) \in f, (b, ۲) \in f \xrightarrow{\text{تابع } f \text{ یک به یک است}} b = ۳$$

پس دوتایی (a, b) به صورت $(۲, ۳)$ درمی آید.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

از ویژگی های تابع وارون (معکوس) برای حل تست استفاده می کنیم. اگر نقطه $A(\alpha, \beta)$ در ضابطه تابع f صدق کند، نقطه $B(\beta, \alpha)$ در ضابطه تابع معکوس یا همان f^{-1} صدق می کند. سؤال از ما $f^{-1}(۴)$ را می خواهد. فرض کنیم مقدار $f^{-1}(۴)$ برابر α شود، در این صورت $(۴, \alpha)$ در ضابطه f^{-1} صدق می کند پس نقطه ای به مختصات $(\alpha, ۴)$ باید در ضابطه تابع $f(x)$ صدق کند. این نقطه را در ضابطه تابع اصلی جای گذاری کرده و مقدار α را محاسبه می کنیم.

گام دوم

معادله $f(\alpha) = ۴$ را حل کرده و مقدار α را به دست می آوریم:

$$f(x) = -x + \sqrt{-۲x} \xrightarrow{f(\alpha)=۴} ۴ = -\alpha + \sqrt{-۲\alpha} \Rightarrow \sqrt{-۲\alpha} = \alpha + ۴$$

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد پس داریم:

$$-۲\alpha \geq ۰ \Rightarrow \alpha \leq ۰, \quad \alpha + ۴ \geq ۰ \Rightarrow \alpha \geq -۴$$

پس $\alpha \in [-۴, ۰]$. حالا طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می رسانیم:

$$\begin{aligned} -۲\alpha &= (\alpha + ۴)^۲ \Rightarrow -۲\alpha = \alpha^۲ + ۸\alpha + ۱۶ \Rightarrow \alpha^۲ + ۱۰\alpha + ۱۶ = ۰ \\ \Rightarrow (\alpha + ۸)(\alpha + ۲) &= ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -۲ \\ \alpha = -۸ \end{cases} \end{aligned}$$

باتوجه به اینکه $\alpha \in [-۴, ۰]$ است، فقط $\alpha = -۲$ قابل قبول خواهد بود.

نیمساز ناحیه چهارم: $y = -x$; $x > 0$

نمودار f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را قطع می‌کند، بنابراین:

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{2}{x} = x \Rightarrow 2x = \frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{x > 0} x = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

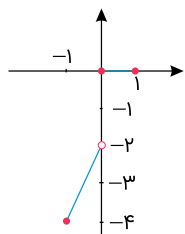
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f.g = (2 - 2x)(-1) = 2x - 2$$

x	-1	0
y	-4	-2

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f.g = (2 - 2x)(0) = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow f.g = 0 \times 1 = 0$$

حال تابع $f.g$ را رسم می‌کنیم. باتوجه به شکل $y = -3$ عضو برد این تابع خواهد بود.



کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

$$f(x) = 2 - |x + 1| = \begin{cases} x + 3 & ; x \leq -1 \\ -x + 1 & ; x > -1 \end{cases}$$

$$g(x) = x + |x| = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ 2x & ; x > 0 \end{cases}$$

$$y = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2 - |x + 1|}{x + |x|} = \begin{cases} \text{ت.ن.} & ; x \leq 0 \\ \frac{1-x}{2x} & ; x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \quad ; x > 0$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y > -\frac{1}{2} \Rightarrow R_y = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

$$\begin{cases} f(x) = b - 3ax \xrightarrow{\text{ثابت } f} 3a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ g(x) = c - (3b - 3)x \xrightarrow{\text{ثابت } g} 3b - 3 = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1, \quad g(x) = c$$

$$f + g = 5 \Rightarrow 1 + c = 5 \Rightarrow c = 4$$

$$bc = 1 \times 4 = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$\begin{cases} f(x) \text{ ثابت} \Rightarrow 3(b^2 - 1) = 0 \Rightarrow b = \pm 1 \\ g(x) \text{ ثابت} \Rightarrow (b + 1) = 0 \Rightarrow b = -1 \end{cases} \Rightarrow b = -1$$

توجه کنید که $g(x) = (b + 1)x^2 - 2a$ به صورت $g(x) = (b + 1)x^2 - 2a$ است.

$$\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = -2a \end{cases} \Rightarrow f \times g = -2a^2 = -8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$\Rightarrow |ab| = 2$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

تابع همانی به صورت $y = x$ است، پس داریم:

$$f(x) = (|a| - |b|)x = x \Rightarrow |a| - |b| = 1 \quad (I)$$

تابع ثابت به صورت $y = k$ است، پس داریم:

$$g(x) = (b^x - 1)x + (a^x + 1)c = k \Rightarrow b^x - 1 = 0 \Rightarrow b = \pm 1$$

از قرار دادن این مقدار در رابطه (I) داریم:

$$|a| - |b| = 1 \Rightarrow |a| - |\pm 1| = 1 \Rightarrow |a| - 1 = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

از $(f - g)(x) = x + 5$ نتیجه می‌گیریم:

$$f(x) - g(x) = x - (a^x + 1)c = x + 5 \Rightarrow -(a^x + 1)c = 5$$

$$\xrightarrow{a=\pm 2} -5c = 5 \Rightarrow c = -1$$

اما $a = 2$ و $a = -2$ هر دو پذیرفته هستند؛ پس داریم:

$$ac = -2(-1) = 2$$

$$ac = 2(-1) = -2$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

$$D_{g \rightarrow f} = D_g \cap D_f = \{1, 4, 2\}$$

$$g - f = \{(1, 3 - 7), (2, 6 - 5), (4, 9 - 6)\}$$

$$= \{(1, -4), (2, 1), (4, 3)\} \Rightarrow \text{برد} = \{-4, 1, 3\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

ابتدا دامنه تابع $g \times f$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{g \times f} = D_f \cap D_g = \{1, 2, 4, 3\} \cap \{3, 2, 6, 1\} = \{1, 2, 3\}$$

مقادیر تابع $g \times f$ را به ازای دامنه به دست آمده با توجه به رابطه $(g \times f)(x) = g(x) \times f(x)$ به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow g \times f = \{(1, 8 \times 2), (2, 3 \times 4), (3, 2 \times 3)\}$$

$$\Rightarrow g \times f = \{(1, 16), (2, 12), (3, 6)\}$$

$$\Rightarrow g \times f \text{ برد} = \{16, 12, 6\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

نکته: اعمال جمع و تفریق و تقسیم روی توابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

همچنین دامنه تعریف این توابع هم به صورت زیر است:

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g, \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

با استفاده از روابط بالا ابتدا دامنه تعریف توابع $f + g$ و $\frac{f+g}{f}$ را مشخص کرده، سپس برد تابع موردنظر را به دست می‌آوریم:

$$f = \{(\omega, 3), (1, \omega), (3, 4), (6, 2)\} \Rightarrow D_f = \{1, 3, \omega, 6\}$$

$$g = \{(3, 2), (\omega, 6), (1, 2), (2, 1)\} \Rightarrow D_g = \{1, 2, 3, \omega\}$$

$$\Rightarrow D_{f+g} = \{1, 3, \omega\}, \quad D_{\frac{f+g}{f}} = \{1, 3, \omega\}$$

$$f + g = \{(1, \omega + 2), (3, 4 + 2), (\omega, 3 + 6)\} = \{(1, 7), (3, 6), (\omega, 9)\}$$

$$\Rightarrow \frac{f+g}{f} = \left\{ \left(1, \frac{7}{\omega}\right), \left(3, \frac{6}{4}\right), \left(\omega, \frac{9}{3}\right) \right\} = \{(1, 1/4), (3, 1/5), (\omega, 3)\}$$

$$\Rightarrow R_{\frac{f+g}{f}} = \{1/4, 1/5, 3\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

نکته: عمل‌های جمع و تفریق و تقسیم روی دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

همچنین دامنه تعریف این توابع هم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

با استفاده از رابطه بالا ابتدا دامنه تعریف توابع $f + g$ ، $f - g$ و $\frac{f + g}{f - g}$ را به دست آورده و سپس برد تابع $\frac{f + g}{f - g}$ را به دست می‌آوریم.

$$f = \{(3, 4), (2, 6), (5, 3), (1, 5)\} \Rightarrow D_f = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$g = \{(5, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 1)\} \Rightarrow D_g = \{1, 3, 4, 5\}$$

$$\Rightarrow D_{f \pm g} = \{1, 3, 5\}$$

$$D_{\frac{f+g}{f-g}} = D_{f+g} \cap D_{f-g} - \{x | (f - g)(x) = 0\} = D_{f \pm g}$$

$$f + g = \{(1, 5 + 2), (3, 4 + 2), (5, 3 + 6)\}$$

$$= \{(1, 7), (3, 6), (5, 9)\}$$

$$f - g = \{(1, 5 - 2), (3, 4 - 2), (5, 3 - 6)\}$$

$$= \{(1, 3), (3, 2), (5, -3)\}$$

$$\frac{f + g}{f - g} = \left\{ \left(1, \frac{7}{3}\right), \left(3, \frac{6}{2}\right), \left(5, \frac{9}{-3}\right) \right\}$$

$$= \left\{ \left(1, \frac{7}{3}\right), (3, 3), (5, -3) \right\}$$

$$\Rightarrow R_{\frac{f+g}{f-g}} = \left\{ \frac{7}{3}, 3, -3 \right\}$$

ضابطه $\frac{g}{f}(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y = \frac{g}{f}(x) = \frac{x^3}{x^2}$$

به‌ازای $x = 0$ مخرج کسر تابع $\frac{g}{f}(x)$ صفر می‌شود، بنابراین $x = 0$ عضو دامنه تابع $\frac{g}{f}(x)$ نمی‌باشد، پس می‌توانیم x^2 را از صورت و مخرج کسر ساده کنیم.

$$\frac{g}{f}(x) = x, \quad (x \neq 0)$$

می‌دانیم عملیات روی توابع در دامنه مشترک انجام می‌شود. با شرط $x \neq 0$ تعداد عضوهای مشترک دامنه تابع f و g ده‌تا است.

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{0\} = \{\pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$$

از آنجایی که دامنه و برد تابع $y = x$ برابر است، پس تعداد اعضای مجموعه برد این تابع نیز ۱۰‌تا می‌باشد.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

نمودار تابع $g(x)$ نیمساز ناحیه دوم و چهارم یعنی $g(x) = -x$ است. اگر نمودار تابع $y = x$ را در یک واحد به سمت چپ در راستای محور x ‌ها منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)$ به دست می‌آید بنابراین ضابطه آن $f(x) = x + 1$ می‌باشد.

$$\frac{f^2(x)}{g(x)} = 2 \Rightarrow f^2(x) = 2g(x) \Rightarrow (x+1)^2 = 2(-x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = -2x \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4^2 - 4(1)(1)}}{1} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

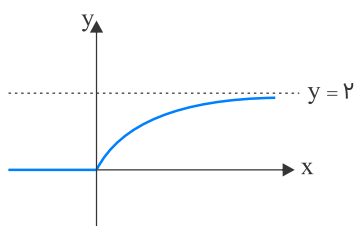
$$\begin{cases} f(-2) = |(-2)^2 - 5| = |4 - 5| = |-1| = 1 \\ g(2) = \frac{2}{1+2^2} = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1+f(-2)}{g(2)} = \frac{1+1}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{\frac{2}{5}} = 5$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۷

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x + |x|}{|x + 1| + 1} = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \frac{2x}{x + 2} & ; x > 0 \end{cases}$$

به کمک نمودار برد تابع راحت‌تر محاسبه می‌شود.



پس برد تابع $\frac{f}{g}(x)$ برابر $[0, 2)$ خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

$$D_f = \{-1, 1, 2\}, \quad D_{g^2} = D_g = [0, 3], \quad D_h = \{2\}$$

$$h(2) = \frac{g^2(2) + f(2)}{2 - f(2)} = \frac{2 + 1}{2 - 1} = 3$$

$$h = \{(2, 3)\} \Rightarrow 2 + 3 = 5$$

مدارس علوم تجربی البرز

تابع f از دو نقطه $(3, 4)$ و $(4, 3)$ گذشته است لذا تابع f^{-1} از دو نقطه $(4, 3)$ و $(3, 4)$ می‌گذرد. منحنی نمودار دو تابع خطی f و f^{-1} برهم منطبق‌اند لذا تعداد نقاط تلاقی آن‌ها بی‌شمار است.

آزمایشی سنجش ریاضی و فیزیک چهارم مرحله دوم ۱۳۹۳

هر تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ است. پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(2) = 2a + b \\ f(7) = 7a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ 7a + b = 12 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{7}{5}, \quad b = \frac{11}{5}$$

پس تابع خطی به صورت $f(x) = \frac{1}{5}(7x + 11)$ است.

$$f^{-1}(19) = x \Rightarrow f(x) = 19 \Rightarrow \frac{1}{5}(7x + 11) = 19 \Rightarrow x = 12$$

آزمایشی سنجش ریاضی و فیزیک چهارم مرحله دوم ۱۳۹۳

$$f^{-1}(\omega) : x + \sqrt{x+1} = \omega \Rightarrow x = 3 \Rightarrow f^{-1}(\omega) = 3$$

$$f^{-1}(11) : x + \sqrt{x+1} = 11 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow f^{-1}(11) = 8$$

$$f^{-1}(\omega) + f^{-1}(11) = 3 + 8 = 11$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۱

$$D_f = \{2, -3, -1, 0\}$$

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow D_g = [-1, +\infty) \Rightarrow D_{f+g^2} = D_f \cap D_g = \{-1, 0, 2\}$$

$$2f(-1) + g^2(-1) = -2 + 0 = -2 \quad 2f(2) + g^2(2) = 2(1) + 3 = 5$$

$$2f + g^2 = \left\{ (-1, \overset{\uparrow}{-2}), (0, \underset{\downarrow}{-5}), (2, \overset{\uparrow}{5}) \right\}$$

$$2f(0) + g^2(0) = -6 + 1 = -5$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۱

$$D_f \cap D_g = \{2, -4\}$$

$$\frac{f(2) + 2g(2)}{f(2) - g(2)} = \frac{5 + 2(-3)}{5 - (-3)} = \frac{-1}{8}$$

$$\frac{f(-4) + 2g(-4)}{f(-4) - g(-4)} = \frac{2 + 2(-5)}{2 - (-5)} = \frac{-8}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{f+2g}{f-g} = \left\{ \left(2, -\frac{1}{8} \right), \left(-4, -\frac{8}{7} \right) \right\}$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

می‌دانیم:

$$y = (f+g)(x) \Rightarrow D = D_f \cap D_g$$

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \quad \xrightarrow{\text{اشتراک}} \quad 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow D = [-1, 2]$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

$$f^{-1} = \{(2, 1), (-2, 3), (1, 4), (-1, 2)\}$$

$$g^{-1} = \{(3, 2), (1, 1), (2, 3)\}$$

$$\begin{cases} f^{-1}(-1) = 2 \\ f^{-1}(1) = 4 \\ g^{-1}(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(-1) + f^{-1}(1) + g^{-1}(2) = 2 + 4 + 3 = 9$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

اگر خط $3y - 2x = 4$ را به صورت یک تابع در نظر بگیریم، قرینه خط $3y - 2x = 4$ نسبت به خط $y = x$ همان وارون تابع است، بنابراین داریم:

$$3y - 4 = 2x \Rightarrow x = \frac{3y - 4}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x - 4}{2} = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

برای $x \geq 0$ داریم:

$$y = 3x + 1 \Rightarrow x = \frac{y - 1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3}, x \geq 1$$

برای $x < 0$ داریم:

$$y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1, x < 1$$

$$f^{-1} = \begin{cases} \frac{x - 1}{3} & ; x \geq 1 \\ x - 1 & ; x < 1 \end{cases}$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۴۰۱

ابتدا دامنه دو تابع f و g را حساب می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x} : x \geq 0 \\ \sqrt{4-x} : x \leq 4 \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = D_g = [0, 4]$$

$$h(x) = (fg)(x) = f(x)g(x) = (\sqrt{x} + \sqrt{4-x})(\sqrt{x} - \sqrt{4-x})$$

$$\Rightarrow h(x) = x - (4 - x) = 2x - 4$$

بنابراین گزینه "۳" صحیح است.

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۴۰۰

$$\left. \begin{array}{l} D_f = \{1, 2, 3, -1\} \\ D_g = [2, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{2, 3\}$$

$$D_h = \{2, 3\} - \underbrace{\{x | g(x) = 1\}}_{x=3} = \{2\} \xrightarrow{\text{مجموع عضوها}} 2$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۰

$$x + \sqrt{x} + 1 = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow g(3) = 1$$

$$x + \sqrt{x} + 1 = 7 \Rightarrow x + \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow g(7) = 4$$

$$g(3) + g(7) = 4 + 1 = 5$$

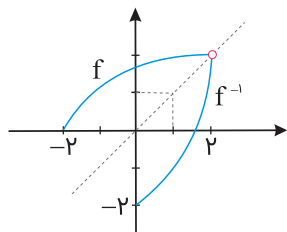
علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۰

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 - 2x}{x} = \frac{x(x^2 - 2)}{x} = x^2 - 2, \quad x \neq 0$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۰

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{2+x}$$

$$D_f = \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-2, 2)$$



علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۹

نیازی به محاسبه تابع وارون نیست. کافی است عکس نقاط داده شده را در تابع قرار دهید و ببینید کدام در آن صدق می کند.

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۹

$${}_2f = \{(-1, 2), (1, 4), (0, 8), (2, 0)\} \Rightarrow D_{{}_2f} = \{-1, 1, 0, 2\}$$

$${}_3g(x) = 3\sqrt{1-x^2} \Rightarrow D_{{}_3g} : 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_{{}_3g} = [-1, 1]$$

$$D_{{}_2f-{}_3g} = D_{{}_2f} \cap D_{{}_3g} = \{-1, 0, 1\} \Rightarrow {}_2f-{}_3g = \{(-1, 2), (0, 8), (1, 4)\}$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۰

دقت کنید که چون تابع f^{-1} خطی است، پس تابع f هم خطی خواهد بود.

$$(3, 0) \in f^{-1} \Rightarrow (0, 3) \in f$$

$$(-2, -2) \in f^{-1} \Rightarrow (-2, -2) \in f$$

$$f : y - 3 = \frac{-2 - 3}{-2 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{5}{2}x + 3 \Rightarrow f(2) = 8$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۰

$$D_f = \{۲, ۳, -۱\}$$

$$D_g = \{۲, -۱, ۴\} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{۲, -۱\}$$

$$\Rightarrow f + g = \{(۲, ۱), (-۱, ۱)\}$$

$$\Rightarrow R_{f+g} = \{۱\} \Rightarrow \begin{cases} n(D_{f+g}) = ۲ \\ n(R_{f+g}) = ۱ \end{cases} \Rightarrow |n(D_{f+g}) - n(R_{f+g})| = |۲ - ۱| = ۱$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۰

صورت مسئله از ما می‌خواهد عضوهای تابع f را طوری بیابیم که یک تابع یک‌به‌یک باشد. برای یک‌به‌یک بودن این تابع دو زوج مرتب $(k, ۱)$ و $(۲, ۱)$ باید برابر هم باشند، پس: $k = ۲$

$$f = \{(۴, ۴)(۲, ۱)(۲, ۱)(۴, m)\}$$

حال برای اینکه f یک تابع باشد، m باید برابر چهار شود.

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

تابع f یک تابع اکیداً صعودی است، بنابراین f و $f^{-۱}$ یکدیگر را روی خط $y = x$ قطع می‌کنند. در نتیجه:

$$۳x + \sqrt{x-۲} = x \Rightarrow \sqrt{x-۲} = -۲x$$

باتوجه به دامنه تابع $x \geq ۲$ ، داریم:

$$\underbrace{\sqrt{x-۲}}_{\text{نامنفی}} = \underbrace{-۲x}_{\text{منفی}}$$

بنابراین دو تابع برخورد ندارند.

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۹

$$a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$a = -1 : f = \{(3, 2), (-1, 5), (b, 2), (-1, 4)\}$$

رابطه تابع نیست. (غیرقابل قبول)

$$a = 2 : f = \{(3, 2), (2, 5), (b, 2), (-1, 4)\}$$

رابطه تابع است. (قابل قبول)

$$\Rightarrow b = 3$$

رابطه تابع یک به یک است (قابل قبول).

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۰

$$\left. \begin{aligned} D_f : 5 - x \geq 0 &\Rightarrow x \leq 5 \\ D_g : x - 4 = 0 &\Rightarrow x = 4 \Rightarrow \mathbb{R} - \{4\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f \cap D_g = (-\infty, 5] - \{4\}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = (-\infty, 5] - \{4\} - \{3\} = (-\infty, 5] - \{3, 4\}$$

دامنه فوق شامل اعداد صحیح و نامنفی ۰، ۱، ۲ و ۵ می باشد.

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۰

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = (x + 3) \times g(x)$$

$$\Rightarrow \cancel{(x+3)}(x-1) = \cancel{(x+3)} \times g(x) \Rightarrow g(x) = x - 1$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x + 3) - (x - 1)$$

$$= \cancel{x} + 3 - \cancel{x} + 1 = 4 \Rightarrow (f - g)(2) = 4$$

برای دنباله هندسی داریم:

$$x, y, z \Rightarrow x, xr, xr^2$$

و برای دنباله حسابی داریم:

$$x, 3y, 5z \Rightarrow x, 3xr, 5xr^2 \Rightarrow 6xr = x + 5xr^2$$

پس:

$$6r = 1 + 5r^2 \Rightarrow 5r^2 - 6r + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = \frac{1}{5} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

بنابراین:

$$\left[\frac{x}{z}\right] = \left[\frac{x}{5xr^2}\right] = \left[\frac{1}{5}\right] = 25$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

اگر x, y, z جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند پس $x = y - d, y, z = y + d$ بنابراین:

$$x + y + z = 21 \Rightarrow y - d + y + y + d = 21 \Rightarrow y = 7$$

برای جملات دنباله هندسی داریم:

$$x + 6, y + 4, z + 2 \Rightarrow 7 - d + 6, 7 + 4, 7 + d + 2 \Rightarrow 13 - d, 11, 9 + d$$

پس:

$$11^2 = (13 - d)(9 + d) \Rightarrow 121 = 117 + 13d - 9d - d^2 \Rightarrow d^2 - 4d + 4 = 0 \Rightarrow d = 2$$

بنابراین:

$$x = 7 - 2 = 5, y = 7, z = 7 + 2 = 9 \Rightarrow \left[\frac{xy}{z}\right] = \left[\frac{5 \times 7}{9}\right] = 3$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

ریشه‌های معادله $\alpha^2 x^2 - ax + b = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم و ریشه‌های $\alpha'^2 + ax - 6 = 0$ را α' و β' در نظر می‌گیریم:

$$\alpha = \alpha' + \frac{1}{\gamma}, \quad \beta = \beta' + \frac{1}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \alpha' + \beta' + 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\gamma} = \frac{-a}{\gamma a} + 1 \Rightarrow \frac{a}{\gamma} = \frac{-1}{\gamma} + 1 = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow a = 1$$

$$a = 1 : \gamma a x^2 + ax - 6 = \gamma x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \alpha' = -2, \quad \beta' = \frac{3}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \alpha = -2 + \frac{1}{\gamma} = -\frac{3}{\gamma}, \quad \beta = \frac{3}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} = 2$$

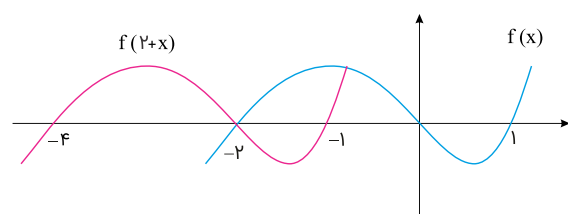
$$\alpha\beta = \frac{b}{\gamma} = \left(-\frac{3}{\gamma}\right)(2) = -\frac{6}{\gamma} \Rightarrow b = -6$$

$$\left[\frac{ab}{\gamma}\right] = \left[\frac{1 \times (-6)}{\gamma}\right] = \left[-\frac{6}{\gamma}\right] = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(\gamma+x)}} \Rightarrow -\frac{f(x)}{f(\gamma+x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(\gamma+x)} \leq 0$$

$$f(x) = 0; \quad x = -2, 0, 1$$



$$f(x+2) = 0; \quad x = -4, -2, -1$$

x	-4	-2	-1	0	1
f(x)	-	-	+	+	-
f(x+2)	-	+	-	+	+
$\frac{f(x)}{f(x+2)}$	+	-	-	+	-

$$D_g = (-4, -2) \cup (-2, -1) \cup [0, 1]$$

دامنه تابع شامل اعداد صحیح $-3, -2, -1, 0, 1$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

برای تابع $g(x)$ می‌دانیم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

که در این حالت تابع $\frac{f}{g}$ تعریف نمی‌شود بنابراین هیچ مقدار صحیحی در تابع $\frac{f}{g}$ صدق نمی‌کند.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

اگر f ثابت باشد پس $f(x) = c$ بنابراین:

$$f(m) + f(n) = f(m).f(n) \Rightarrow c + c = c^2 \Rightarrow c^2 = 2c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow f(x) = 2$$

نیمساز ناحیه اول عبارت است از خط $y = x$ پس:

$$(2n^2 - 7n + 1, -2) \Rightarrow -2 = 2n^2 - 7n + 1 \Rightarrow 2n^2 - 7n + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = 49 - 24 = 25 \\ n = \frac{7 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \quad \text{غ ق ق غ}$$

و بر روی نقطه دوم:

$$(m^2 - 4m + 6, 3 \times 2) \Rightarrow 6 = m^2 - 4m + 6 \Rightarrow m(m - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \quad \text{غ ق ق} \\ m = 4 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\left[\frac{mn}{5} \right] = \left[\frac{12}{5} \right] = [2/4] = 2$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

برای تابع f می‌دانیم:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ 1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین در تمام نقاط صحیح تابع $\frac{g}{f}$ تعریف نشده است و نمی‌تواند برابر ۳ شود.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

اختلاف ریشه‌های معادله درجه دوم عبارتند از:

$$D = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \frac{\sqrt{4k^2 - 20}}{1} = \frac{4}{3}k$$

$$\xrightarrow{k \geq 0} 4k^2 - 20 = \frac{16}{9}k^2 \Rightarrow 36k^2 - 180 = 16k^2$$

$$\Rightarrow 20k^2 = 180 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3 \xrightarrow{k \geq 0} k = 3$$

بنابراین:

$$\left[\frac{k^2}{2} \right] = \left[\frac{9}{2} \right] = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

$$\text{دامنه} = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$-4 < -\frac{1}{3-x} < 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{3-x} < 4$$

$$x = 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < 4$$

$$x = 2 \Rightarrow 0 < 1 < 4$$

فقط همین دو عدد طبیعی در نامعادله صدق می‌کند. ضمناً برای $x > 3$ عبارت $\frac{1}{3-x}$ منفی است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$f \times g = \{(\sqrt{2}, 2), (\sqrt{3}, -6), (\sqrt{5}, -3)\}$$

$$\frac{f}{f \times g} = \{(\sqrt{2}, -1), (\sqrt{3}, \frac{1}{6}), (\sqrt{5}, -\frac{1}{3})\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

اگر $a = 0$ باشد، باید $f(1) = f(2)$ باشد که ممکن نیست. با فرض $|a| = t$ و $a \neq 0$ داریم:

$$f(1-t) = f(2+t)$$

$$\Rightarrow 2(1-t) - 1 = (2+t)^2 - (2+t) - 7$$

$$\Rightarrow 2 - 2t - 1 = 4 + 4t + t^2 - 2 - t - 7$$

$$\Rightarrow t^2 + 5t - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ |a| = -6 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین فقط برای دو مقدار a ، $f(1 - |a|) = f(2 + |a|)$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

$a \neq 0$ است، زیرا اگر $a = 0$ باشد باید $f(1) = f(0)$ شود که غیرممکن است. برای $a \neq 0$ داریم:

$$0 < \frac{a^2}{1+a^2} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{-a^2}{1+a^2} < 0$$

$$1 + a^2 > 1$$

$$f(1+a^2) = f\left(\frac{-a^2}{1+a^2}\right) \Rightarrow 7 - 3(1+a^2) = -2\left(\frac{-a^2}{1+a^2}\right)$$

$$\xrightarrow{a^2=t} 7 - 3 - 3t = \frac{2t}{1+t} \Rightarrow (t+1)(4-3t) = 2t$$

$$\Rightarrow 4t - 3t^2 + 4 - 3t = 2t$$

$$\Rightarrow 3t^2 + t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 = a^2 \Rightarrow a = \pm 1 \\ t_2 = -\frac{4}{3} = a^2 \Rightarrow a \in \emptyset \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 - (-1) = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

به تابعی چندضابطه‌ای که همه ضابطه‌هایش، عدد ثابت باشد، تابع پلکانی می‌گویند. ضابطه اول که یک عدد ثابت است، برای ثابت بودن ضابطه دوم نیز باید ضریب x صفر باشد، بنابراین داریم:

$$\frac{m}{2} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{m}{2} = -2 \Rightarrow m = -4$$

علوی علوم انسانی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۱

$$\left[\frac{x}{2}\right] = -2 \Rightarrow -2 \leq \frac{x}{2} < -1 \xrightarrow{\times 2} -4 \leq x < -2$$

برای به دست آوردن جزء صحیح $\left[-\frac{1}{2}x - 1\right]$ داریم:

$$\begin{aligned} -4 \leq x < -2 &\xrightarrow{\times(-\frac{1}{2})} 1 < -\frac{1}{2}x \leq 2 \\ &\text{چون نامساوی در یک عدد منفی ضرب} \\ &\text{می شود جهت نامساوی عوض می شود} \\ \xrightarrow{+(-1)} 1-1 < -\frac{1}{2}x-1 \leq 2-1 \\ \Rightarrow 0 < -\frac{1}{2}x-1 \leq 1 \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}x-1\right] = 0 \text{ یا } 1 \end{aligned}$$

به عبارت دیگر بین ۱ و صفر، جزء صحیح عبارت صفر می شود، چون در ۱ مساوی دارد، خود ۱ نیز شامل می شود.

$$\left. \begin{aligned} x-1 \geq 0 &\Rightarrow x \geq 1 \\ [x]-4=0 &\Rightarrow [x]=4 \Rightarrow 4 \leq x < 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = [1, 4) \cup [5, +\infty)$$

ریشه های مخرج