

۱ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، از معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟

(۱) $m \geq 1$ (۲) $m < 2$

(۳) $1 \leq m < 2$ (۴) هیچ مقدار m

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۲ معادله‌های $x^2 + 6x + m = 0$ و $x^2 + 2x - 3m = 0$ یک ریشه مشترک غیرصفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳

(۳) ۴ (۴) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۳ ضرایب معادله $2kx^2 - 4x - 4k - 5 = 0$ صحیح هستند. اگر به ازای مقدار k ، حاصل ضرب ریشه‌های این معادله دارای بیشترین مقدار باشد، مقدار Δ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵

(۳) ۷ (۴) ۲۸

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۴ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 7x - 3 = 0$ و $\alpha > 0$ باشد، حاصل $|\alpha| - |\beta| + |\alpha + 2\beta|$ کدام است؟

(۱) $2\alpha + 3\beta$ (۲) $-2\alpha - 3\beta$

(۳) $-\beta$ (۴) β

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۵ مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ ، کدام است؟

(۱) -۴ (۲) -۲

(۳) ۲ (۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۶

اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y = (a - 1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۷

کوتاه‌ترین فاصله سهمی $y^2 = 4x$ از نقطه $M(3, 0)$ ، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $2\sqrt{2}$
(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۸

ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ ، یک واحد از ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است، b کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) $\frac{2}{3}$
(۴) $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۹

اگر معادله $x^4 - (m + 2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

- (۱) $m < -4$
(۲) $m > 4$
(۳) $-4 < m < 4$
(۴) $4 < m < 9$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۰

اگر هر یک از ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، a کدام است؟

- (۱) -۱۴
(۲) -۱۲
(۳) -۸
(۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۱

منحنی توابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + bx + 3$ بر خط به معادله $y = 7$ مماس اند، فاصله دو نقطه تماس کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۲

به ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^3 + (a - 1)x^2 + (4 - a)x = 4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟ (با تغییر)

(۲) $a > -4$

(۱) $a < -4$, $a \neq -5$

(۴) $a > 4$

(۳) $a < 4$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۳

به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

(۲) $0 < m < 2$

(۱) $\frac{-3}{2} < m < 2$

(۴) $2 < m < 3$

(۳) $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۴

محیط مستطیلی ۳۰ متر است. ماکزیمم مساحت این مستطیل، چقدر است؟

(۲) ۲۰۹

(۱) ۲۲۵

(۴) ۱۱/۲۵

(۳) ۵۶/۲۵

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۱۵

اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = (K + 3)x^2 - 4x + K$ برابر صفر باشد، مقدار K کدام است؟

(۲) -۱

(۱) -۴

(۴) ۴

(۳) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۶

در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ ، یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است، مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۳/۵

(۴) ۵

(۳) ۴/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۷

به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟

(۲) -۱

(۱) -۲

(۴) ۲

(۳) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۸

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

(۲) $m < 0$

(۱) $-1 < m < 0$

(۴) $m > 8$

(۳) $2 < m < 8$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۹

به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است؟

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱
(۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ (۴) $\frac{9}{5}$ و -1

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۰

ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

- (۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$
(۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۲۱

به ازای کدام مقدار m ، هریک از ریشه‌های معادله درجه دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 2 = 0$ است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۱
(۳) ۱۳ (۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۲

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار a ، به ترتیب سه عدد α ، a و β تشکیل دنباله هندسی می‌دهند؟

- (۱) -2 (۲) ۲
(۳) -1 (۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۳

می‌خواهیم با یک قطعه سیم به طول ۵۶ متر، زمینی به شکل مستطیل که یک طرف آن دیوار است محصور شود. بیشترین مساحت زمین محصورشده، کدام است؟



- (۱) ۳۶۴
(۲) ۳۷۸
(۳) ۳۹۲
(۴) ۴۰۶

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۲۴

اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^3 + kx^2 - 9x - 2 = 0$ ، $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha\beta = -2$ باشد، مقدار k چقدر است؟

- (۱) $-\frac{27}{5}$ (۲) $\frac{27}{5}$
(۳) -3 (۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۵

α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 6x + a = 0$ هستند. اگر $0 < \beta < \alpha$ و $12\sqrt{2} + 85 = 3\alpha^2 + 2\beta^2$ باشد، مقدار a چقدر است؟

$$\frac{13}{4} \quad (2)$$

(۱)

$$2 \quad (4)$$

$$\frac{21}{5} \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۲۶

به ازای چند مقدار a ، سهمی $y = ax^2 + (3 + 2a)x$ از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(۲) تمام مقادیر a (۱) هیچ مقدار a

$$2 \quad (4)$$

(۳) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۷

به ازای دو مقدار a ، یک ریشه معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$ ، سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف این دو مقدار a ، کدام است؟

$$9 \quad (2)$$

(۱) ۸

$$18 \quad (4)$$

(۳) ۱۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۸

به ازای چند مقدار m ، تابع $y = (1 - 18m)x^2 + 8(m^2 + 1)x + 11$ در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{p}$ دارای ماکسیمم است؟

$$2 \quad (2)$$

(۱) ۱

(۴) تمام مقادیر m (۳) هیچ مقدار m

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۹

اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادله $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

$$5 \quad (2)$$

(۱) ۲

$$12 \quad (4)$$

(۳) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۰

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m + 2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟

$$-2 < m < 1 \quad (2)$$

(۱) $m > 1$ یا $m < -2$

$$m > 1 \quad (4)$$

(۳) فقط $m < -2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۱

نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + 4x + a - 3$ از طرف بالای محور x ها بر آن مماس شده است، طول نقطه تماس کدام است؟

- (۱) -2
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) 2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۳۲

به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{8}$ واسطه حسابی بین دو ریشه معادله $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ است؟

- (۱) 3
(۲) -3
(۳) 4
(۴) -4

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۳۳

اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ ، محور x ها را در دو نقطه به طولهای مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

- (۱) $m > 3$
(۲) $3 < m < 4$
(۳) $3 < m < 5$
(۴) $4 < m < 5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۳۴

فرض کنید x_1 و x_2 ریشههای معادله $x = 5 - x^2$ باشند. $\frac{1}{(x_1 + 1)^3}$ و $\frac{1}{(x_2 + 1)^3}$ ریشههای کدام معادله هستند؟

- (۱) $125x^2 + 16x = 1$
(۲) $125x^2 = 16x + 1$
(۳) $125x^2 = 12x + 1$
(۴) $125x^2 + 12x = 1$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۵

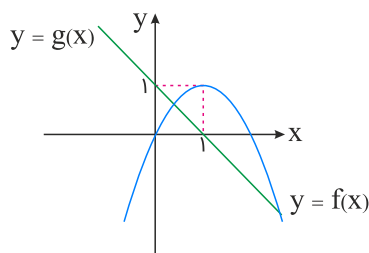
فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. چند معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می توان نوشت که فاصله حاصل ضرب ریشههای هر معادله با جمع ریشههای آن معادله، دو واحد باشد؟

- (۱) 24
(۲) 28
(۳) 32
(۴) 36

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۶

نمودار تابع با ضابطه‌های سهمی $y = f(x)$ و خط راست $y = g(x)$ در صفحه مختصات مطابق شکل زیر داده شده است. مجموع جواب‌های معادله $f(x) = g^2(x)$ ، کدام است؟



(۱) -2

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) 2

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۳۷

فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. چند معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می‌توان تشکیل داد، به طوری که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل ضرب ریشه‌های همان معادله، دو واحد بیشتر باشد؟

(۲) 15

(۱) 14

(۴) 18

(۳) 16

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۸

فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادله $(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$ باشند. مقدار $x_1 + x_2$ کدام است؟

(۲) صفر

(۱) -1

(۴) 2

(۳) 1

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۹

اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^6 - 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $2SP + 3P^2$ ، کدام است؟

(۲) $7 + \sqrt{69}$

(۱) $59 - 7\sqrt{69}$

(۴) $59 + 7\sqrt{69}$

(۳) 50

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۴۰

فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x = x^2 - 4$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $x_1^3 + \frac{1}{x_1}$ و $x_2^3 + \frac{1}{x_2}$ است؟

(۲) $4x^2 + 51x = 221$

(۱) $4x^2 = 51x + 221$

(۴) $4x^2 + 51x = 197$

(۳) $4x^2 = 51x + 197$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۴۱ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a - 3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$

(۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴۲ به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع با ضابطه $y = (m - 2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟

(۱) -3 (۲) $-\frac{5}{2}$

(۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 3

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۴۳ معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر m ، کدام است؟

(۱) $(-4, 0)$ (۲) $(-4, -2)$

(۳) $(-6, 0)$ (۴) $(-6, -4)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴۴ معادله درجه دوم $3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

(۱) $\frac{7}{2}$ (۲) 3

(۳) -1 (۴) $-\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۴۵ اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟

(۱) 2 (۲) 3

(۳) 4 (۴) 6

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۴۶ به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع با ضابطه $y = (m - 1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره در زیر محور x ها است؟

(۱) $m < -\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2} < m < 1$

(۳) $1 < m < \frac{3}{2}$ (۴) $m > \frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۴۷

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 12$ ، محور x ها را در دو نقطه به طولهای منفی، قطع می‌کند؟

$$(1) \quad m > 2 \quad (2) \quad -1 < m < 2$$

$$(3) \quad \text{هر مقدار } m \quad (4) \quad \text{هیچ مقدار } m$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۴۸

در معادله $x^2 - \lambda x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟

$$(1) \quad 10 \quad (2) \quad 12$$

$$(3) \quad 14 \quad (4) \quad 15$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۴۹

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a + 3)x - 1$ محور x ها را در دو نقطه به طولهای منفی قطع می‌کند؟

$$(1) \quad a < -9 \quad (2) \quad a < -3$$

$$(3) \quad a > -1 \quad (4) \quad -3 < a < 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۵۰

در یک دنباله هندسی، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آنها است؟

$$(1) \quad 2 + \sqrt{3} \quad (2) \quad 5 + 2\sqrt{3}$$

$$(3) \quad 5 + 4\sqrt{3} \quad (4) \quad 7 + 4\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۵۱

نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیرمنفی باشد؟

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad 1/5$$

$$(3) \quad 2 \quad (4) \quad 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۵۲

به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m + 1)x + \frac{1}{\lambda} = 0$ برابر با ۲ است؟

$$(1) \quad 3 \quad (2) \quad 4$$

$$(3) \quad 5 \quad (4) \quad 6$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۵۳

به ازای کدام مقدار a معادله درجه دوم $x^2 - 2(a - 2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه مثبت است؟

- (۱) $-2 < a < 2$ (۲) $2 < a < 5$
(۳) $2 < a < 14$ (۴) $5 < a < 14$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۵۴

معادله $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2$ ، چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۵۵

اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\right\}$ است؟

- (۱) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 3x + 1 = 0$
(۳) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۵۶

اگر α و β ریشه‌های معادله $x(5x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۸
(۳) ۲۹ (۴) ۳۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۵۷

در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰
(۳) ۱۲ (۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۵۸

به ازای کدام مقدار m ، عدد $\sqrt{2}$ واسطه هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱
(۳) ۳ (۴) -۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۵۹

اگر α و β ریشه‌های معادله $۲x^۲ - ۳x = ۱$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $\lambda x^۲ + kx - ۱ = ۰$ به صورت $\{\alpha^۲\beta, \alpha\beta^۲\}$ است؟

(۲) ۶

(۱) ۵

(۴) ۹

(۳) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۶۰

ریشه‌های معادله $۳x^۲ + ax + b = ۰$ ، از ریشه‌های معادله $۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ یک واحد بیشتر است، b کدام است؟

(۲) ۲

(۱) -۵

(۴) ۶

(۳) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۶۱

حاصل ضرب ریشه‌های معادله زیر را به دست آورید.

$$(x^۲ - ۴x)^۲ - (x^۲ - ۴x + ۱) = ۱$$

۶۲

مجموعه جواب کدام معادله به صورت $\{۲ \pm \sqrt{۲}\}$ است؟

$$۲x^۲ + ۲x - ۱ = ۰ \quad (۲)$$

$$x^۲ + ۴x - ۲ = ۰ \quad (۱)$$

$$x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \quad (۴)$$

$$۲x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \quad (۳)$$

مدارس علوم انسانی البرز

۶۳

معادله $x - \sqrt{x} - ۶ = ۰$ چند ریشه دارد؟

۶۴

معادله درجه دوم $x^۲ + ۲mx + ۳ - m = ۰$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر حاصل ضرب ریشه‌ها با P و مجموع ریشه‌ها را با S نمایش دهیم به ازای چه مقدار m ، $S.P = -۴$ است؟

۶۵

تعداد جواب‌های معادله $x^۴ + ۲x^۲ = -x^۲ + ۴$ کدام است؟

(۲) ۱

(۱) جواب حقیقی ندارد.

(۴) ۴

(۳) ۲

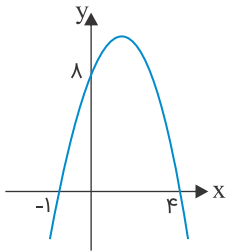
۶۶ در معادله $۲(x^۲ + ۲x) - ۵(x^۲ + ۲x) - ۳ = ۰$ ، مجموع ریشه‌های معادله کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲
(۳) ۴ (۴) -۴

۶۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، از معادله $x - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰$ دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟

مدارس علوم تجربی مرکز آزمون مدارس برتر

۶۸ معادله سهمی زیر را بنویسید.



۶۹ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $۶ + \sqrt{۲}$ و $۶ - ۲\sqrt{۵}$ باشد.

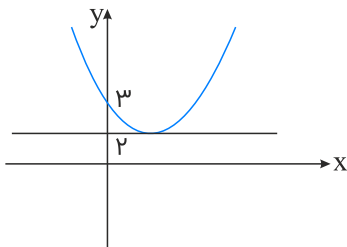
۷۰ به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $(m - ۶)x^۲ - ۲mx - ۳ = ۰$ ، دارای دو ریشه حقیقی منفی است؟

- (۱) $m < -۶$ (۲) $m > ۳$
(۳) $۰ < m < ۳$ (۴) $۳ < m < ۶$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۱

۷۱ نمودار تابع $y = mx^۲ + (m - ۲)x + n$ به شکل زیر است. $m + n$ کدام است؟

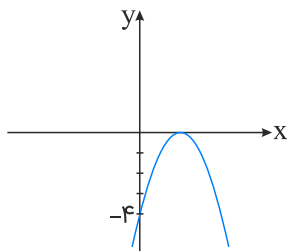


- (۱) $۷ \pm \sqrt{۱۲}$ (۲) $۷ + \sqrt{۱۲}$
(۳) ۵ (۴) $۴ \pm \sqrt{۱۲}$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۹

۷۲

نمودار سهمی $y = -x^2 + mx + n$ به صورت زیر است. مقدار $m + n$ کدام است؟



(۱) -۸

(۲) صفر

(۳) -۴

(۴) ۶

۷۳

اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k - 3)x^2 + kx - 1$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

(۱) ۲

(۲) -۶ و ۲

(۳) -۶

(۴) ۶ و ۲

۷۴

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ باشد، کدام معادله مجموعه جواب‌هایش $\{1 + \frac{2}{\alpha}, 1 + \frac{2}{\beta}\}$ است؟

(۱) $x^2 + 4x - 9 = 0$ (۲) $x^2 - 4x - 9 = 0$ (۳) $x^2 + 3x - 5 = 0$ (۴) $x^2 - 3x - 5 = 0$

۷۵

در معادله درجه دوم $(x + 3)^2 + 2\sqrt{3}(x + 3) = 6$ بزرگ‌ترین جواب x کدام است؟

(۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $3 - \sqrt{3}$ (۴) $3 + \sqrt{3}$

۷۶

به ازای چند مقدار صحیح m معادله $(m - 3)x^2 - 8x^2 + m + 3 = 0$ دقیقاً دو جواب دارد؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۸

۷۷

محیط مستطیلی برابر ۳۲ است. اگر مساحت این مستطیل بیشترین مقدار ممکن باشد، نسبت طول به عرض آن کدام است؟

(۱) $\frac{4}{5}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{8}{5}$

۷۸ در چه شرایطی معادله $mx^2 + ax - b = 0$ دو ریشه معکوس یکدیگر دارد؟

- (۱) $m = -b$
 (۲) $m = a$
 (۳) $m = +b$
 (۴) $m = -a$

۷۹ سهمی به معادله $y = x^2 - mx + m^2 - 4$ از چهار ناحیه مختصات عبور می‌کند، m چند عضو صحیح می‌تواند باشد؟

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) ۵

۸۰ اگر مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - mx + 7 = 2m$ برابر ۳ باشد، حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) -۱
 (۲) ۱
 (۳) $\frac{1}{3}$
 (۴) $-\frac{1}{3}$

۸۱ به ازای کدام مقدار k ریشه‌های حقیقی معادله $k^2x^2 + 5x + k = 0$ معکوس یکدیگرند؟

- (۱) ۳
 (۲) ۱
 (۳) -۱
 (۴) -۳

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۴۰۱

۸۲ در معادله درجه دوم $-4x^2 + (m-1)x - (m-3) = 0$ اگر مجموع دو ریشه معادله برابر ۲ باشد، آنگاه حاصل ضرب دو ریشه کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$
 (۲) $\frac{3}{2}$
 (۳) $-\frac{2}{3}$
 (۴) $\frac{2}{3}$

۸۳ جواب‌های معادله $5(2x-1)^2 - 7(2x-1) + 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) $1, \frac{2}{5}$
 (۲) $-1, -\frac{2}{5}$
 (۳) $-1, -\frac{7}{10}$
 (۴) $1, \frac{7}{10}$

۸۴

اگر در معادله درجه دوم $-2x^2 + nx + 5 = 0$ مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{3}{2}$ باشد، در این صورت قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها کدام است؟

(۲) $\frac{9}{2}$
(۴) $\frac{7}{2}$

(۱) $\frac{5}{2}$
(۳) $\frac{11}{2}$

۸۵

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $(2m - 1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است؟ $(m \neq \frac{1}{2})$

(۲) $-2 < m < 3/5$

(۱) $-2 < m < 2/5$

(۴) $-1 < m < 2/5$

(۳) $-1 < m < 3/5$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱ ۲

۸۶

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 = x + 1$ باشند، حاصل $\alpha^3 + 2\beta - 1$ چقدر است؟

(۲) ۲

(۱) -۲

(۴) -۳

(۳) ۳

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱ ۱

۸۷

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - (\alpha + 1)x - 3\beta = 0$ باشند، مقدار $\alpha^3 - \beta^3$ کدام است؟

(۲) -۲۷

(۱) -۲۶

(۴) -۲۹

(۳) -۲۸

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱ ۲

۸۸

اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{9}$
(۴) $\frac{1}{9}$

(۱) $\frac{1}{3}$
(۳) $-\frac{1}{3}$

۸۹

معادله درجه‌دومی با ضرایب گویا که یک ریشه آن $3 - \sqrt{13}$ باشد، کدام است؟

(۲) $2x^2 - 6x - 2 = 0$

(۱) $x^2 - 5x + 3 = 0$

(۴) $x^2 - 3x + 1 = 0$

(۳) $x^2 - 6x - 4 = 0$

۹۰

اگر α یک ریشه معادله $x^2 - x - 3 = 0$ باشد، مقدار عددی $\alpha^3 - \frac{27}{\alpha^3}$ کدام است؟

(۱) -۸ (۲) ۸

(۳) -۱۰ (۴) ۱۰

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱

۹۱

در یک دنباله هندسی با جمله اول a ، تساوی $\frac{a_6}{a_3} + \frac{a_2}{a^2} = 2$ برقرار است. نسبت a^2 به جمله دوم کدام می‌تواند باشد؟

(۱) -۲ (۲) ۲

(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹۲

نقاط $(1, \beta)$ و $(-5, \beta)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر $-\frac{1}{p}$ است. اگر سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض $\frac{3}{p}$ قطع کند، مقدار β کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۳

(۳) -۲ (۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۹۳

سهمی $y = -mx^2 + mx + 1$ و خط $y = -m - x$ یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود m شامل چند مقدار صحیح است؟

(۱) ۳ (۲) ۲

(۳) ۱ (۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۹۴

اگر $x + 1$ ، $x - 1$ ، $2x + 1$ و x ، به‌ترتیب جملات چهارم، پنجم، هفتم و هشتم یک دنباله هندسی باشند، چند مقدار ممکن برای قدر نسبت این دنباله وجود دارد؟ (با تغییر)

(۱) ۱ (۲) هیچ مقدار

(۳) ۲ (۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۹۵

برای چند مقدار صحیح m ، هر دو ریشه معادله $2x^2 + 7x + m = 0$ ، بزرگ‌تر از -۳ است؟

(۱) ۴ (۲) ۳

(۳) ۱ (۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۹۶

اگر α و β صفرهای سهمی $y = 2\omega\alpha x^2 + 4x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحه مختصات قرار دارد؟

- (۱) اول
(۲) دوم
(۳) سوم
(۴) چهارم

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۹۷

نقاط $(3, -4)$ و $(-1/5, -4)$ روی یک تابع درجه دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{3}{4}$
(۳) $\frac{5}{2}$
(۴) $\frac{5}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۹۸

برای چه مقدار صحیح m ، هر دو ریشه معادله $-x^2 + 5x + m = 0$ کوچکتر از $\frac{9}{2}$ است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

۹۹

اگر $1+x, x, x-1$ و $2-x$ به ترتیب جملات اول، دوم، چهارم و پنجم یک دنباله هندسی باشند. مجموع مقادیر ممکن برای قدر نسبت این دنباله، کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) ۱
(۳) $\sqrt{5}$
(۴) $-\sqrt{5}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

۱۰۰

برای چند مقدار مختلف a ، کمترین مقدار سهمی $y = ax^2 + 3x + a$ برابر $\frac{7}{8}$ است؟ (با تغییر)

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳



گزینه ۳

۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) معادله را با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ به معادله درجه دو تبدیل می‌کنیم.

ب) برای این که معادله اولیه دارای دو جواب متمایز باشد، باید معادله جدید دو ریشه مثبت داشته باشد. پس سه شرط $\Delta > 0$ ، $t_1 + t_2 > 0$ و $t_1 t_2 > 0$ را برای معادله جدید بررسی می‌کنیم.

گام دوم

$$x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - 2t + m - 1 = 0$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(m - 1) > 0 \Rightarrow 4 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow 4m < 8 \Rightarrow m < 2 \quad (I)$$

$$۲) t_1 t_2 > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{1} > 0 \Rightarrow m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (II)$$

$$۳) t_1 + t_2 > 0 \Rightarrow -(-\frac{2}{1}) > 0 \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

توجه داشته باشید که به ازای $m = 1$ ، معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ به معادله $x - 2\sqrt{x} = 0$ تبدیل می‌شود که دارای دو جواب $x = 0$ و $x = 4$ است. پس $m = 1$ نیز قابل قبول است:

$$(I) \cap (II) \cup m = 1 \Rightarrow 1 \leq m < 2$$

گزینه ۳

۲

$$x^2 + 6x + m = x^2 + 2x - 3m \Rightarrow 4x = -4m \Rightarrow x = -m$$

$$x^2 + 2x - 3m = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -5 \Rightarrow m = 5$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3, -5 \Rightarrow 3 - (-1) = 4$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x+5)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, -5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

$$2kx^2 - 4x - 4k - 5 = 0$$

$$P = \alpha\beta = \frac{-4k - 5}{2k} = -2 - \frac{5}{2k}$$

چون قرار است $2k$ عدد صحیح باشد و $2k$ باید حداکثر مقدار صحیح منفی باشد، پس: $2k = -1$

$$\xrightarrow{k=-\frac{1}{2}} 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^2 - 4x - 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 5 = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(-1)(-3) = 4$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

$$x^2 + 7x - 3 = 0 \Rightarrow S = -7, P = -3$$

یعنی حاصل جمع ریشه‌ها منفی و حاصل ضربشان منفی است پس یکی از ریشه‌ها منفی و دیگری مثبت خواهد بود و باتوجه به اینکه $S < 0$ است یعنی $|\alpha| < |\beta|$ در نتیجه ریشه منفی مقدار بزرگتری داشته است.

$$|\alpha + 2\beta| + |\alpha| - |\beta| \xrightarrow{\alpha > 0, \beta < 0} \underbrace{|\alpha + \beta + \beta|}_S + \underbrace{|\alpha|}_{+\alpha} - \underbrace{|\beta|}_{-\beta}$$

$$= |-7 + \beta| + \alpha + \beta = 7 - \beta + (-7) = -\beta$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

گام اول

برای حل ساده‌تر معادله، با تغییر متغیر $x^2 + x = t$ ، معادله داده‌شده را به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌کنیم.

گام دوم

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0 \xrightarrow{x^2 + x = t} t^2 - 18t + 72 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 12)(t - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t - 12 = 0 \Rightarrow t = 12 \\ t - 6 = 0 \Rightarrow t = 6 \end{cases}$$

حال مقادیر x را محاسبه می‌کنیم:

$$t = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$t = 6 \Rightarrow x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

مجموع ریشه‌های حقیقی معادله اولیه برابر است با:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4 + 3 - 3 + 2 = -2$$

در تابع درجه دو به فرم $y = ax^2 + bx + c$ ، محور تقارن منحنی، خط $x = -\frac{b}{2a}$ است. با توجه به این نکته، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$y = (a - 1)x^2 + x + 3 \xrightarrow{x=2 \text{ محور تقارن}} x = -\frac{1}{2(a-1)} = 2 \Rightarrow a - 1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین ضابطه تابع درجه دو به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$ درمی‌آید. معادله $y = 0$ را حل می‌کنیم:

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = 0 \xrightarrow{\times(-4)} x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 6)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق.}$$

چون در سؤال ذکرشده نمودار را با طول مثبت قطع کند، فقط $x = 6$ قابل قبول است.

برای y های مثبت داریم $y = 2\sqrt{x}$ و نقاط روی آن را $N(x, 2\sqrt{x})$ در نظر می‌گیریم:

$$MN = \sqrt{(x-3)^2 + (2\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 9}$$

$$\min(MN) = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a}} = \sqrt{-\frac{4-36}{4}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ را α و β فرض می‌کنیم. بنابراین ریشه‌های معادله $x^2 + ax + b = 0$ به صورت $(\alpha + 1)$ و $(\beta + 1)$ می‌شود.

ب) برای به دست آوردن b ، باید حاصل ضرب $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$3x^2 + 7x + 1 = 0 \xrightarrow{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های معادله}} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{7}{3} \\ \alpha\beta = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{(\alpha+1) \text{ و } (\beta+1) \text{ ریشه های معادله}} (\alpha+1)(\beta+1) = b$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = b \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{1}{3} \atop \alpha+\beta = -\frac{7}{3}} \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 1 = -1 = b \Rightarrow b = -1$$

گام اول

الف) معادله درجه چهار را با تغییر متغیر $x^2 = y$ به معادله درجه دو تبدیل می‌کنیم.

ب) اگر قرار باشد معادله درجه چهار داده شده دارای چهار ریشه حقیقی متمایز باشد، باید برای معادله درجه دو تشکیل شده داشته باشیم $\Delta > 0$.

ج) نکته دیگر این است که هر دو ریشه باید مثبت باشند. در این صورت هم حاصل ضرب و هم حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است.

گام دوم

$$x^4 - (m+2)x^2 + m+5 = 0 \xrightarrow{x^2=y} y^2 - (m+2)y + m+5 = 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m+2)^2 - 4(m+5) > 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m^2 > 16 \Rightarrow |m| > 4 \Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 4 \quad (\text{I})$$

حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است، پس:

$$-\left(-\frac{(m+2)}{1}\right) > 0 \Rightarrow m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \quad (\text{II})$$

حاصل ضرب ریشه‌ها نیز مثبت است، پس:

$$\frac{m+5}{1} > 0 \Rightarrow m+5 > 0 \Rightarrow m > -5 \quad (\text{III})$$

برای اینکه هر سه شرط فوق برقرار باشد، بین مجموعه جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم:

$$(\text{I}) \cap (\text{II}) \cap (\text{III}) : m > 4$$

گام اول

الف) اگر ریشه های معادله $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ را α و β فرض کنیم، آنگاه ریشه های معادله $۳x^۲ + ax + b = ۰$ برابر با $\frac{۲}{\beta}$ و $\frac{۲}{\alpha}$ است.

ب) $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را از معادله $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ تعیین کرده و با استفاده از آن مقدار a را در معادله دوم مشخص می کنیم.

گام دوم

فرض کردیم α و β ریشه های معادله $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشند. داریم:

$$۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۷}{۴} \\ \alpha\beta = \frac{۳}{۴} \end{cases} \quad (I)$$

برای تعیین مقدار a باید حاصل جمع ریشه های معادله دوم را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} ۳x^۲ + ax + b = ۰ & \xrightarrow{\text{ریشه ها } \frac{۲}{\beta} \text{ و } \frac{۲}{\alpha}} \frac{۲}{\alpha} + \frac{۲}{\beta} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow \frac{۲\alpha + ۲\beta}{\alpha\beta} = -\frac{a}{۳} \\ \Rightarrow \frac{۲(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = -\frac{a}{۳} & \xrightarrow{(I)} \frac{۲(\frac{۷}{۴})}{\frac{۳}{۴}} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow \frac{۱۴}{۳} = -\frac{a}{۳} \Rightarrow a = -۱۴ \end{aligned}$$

روش اول:

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

وقتی منحنی یک تابع درجه دو بر یک خط مماس باشد، معادله تلاقی خط و منحنی ریشه مضاعف دارد. پس معادله خط و منحنی را تلاقی داده، آن را به یک معادله درجه دو استاندارد تبدیل می کنیم و سپس Δ را برابر صفر قرار می دهیم.

گام دوم

$$-x^2 + bx + 3 = 7 \Rightarrow -x^2 + bx - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - bx + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 16 = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

به ازای هر کدام از مقادیر b ، نقطه تماس خط و منحنی را تعیین می کنیم:

$$b = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{y=7} A(2, 7)$$

$$b = -4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \xrightarrow{y=7} A(-2, 7)$$

بنابراین فاصله دو نقطه A و B برابر است با:

$$AB = |2 - (-2)| = 4$$

روش دوم:

بر اساس صورت مسئله، تابع $f(x) = -x^2 + bx + 3$ در نقطه $x = \frac{b}{p}$ یک ماکزیمم دارد و چون بر خط $y = 7$ مماس است پس $f(\frac{b}{p}) = 7$.

فاصله دو نقطه تماس همان فاصله بین ماکزیمم توابع به معادله $y = -x^2 + bx + 3$ است (دو مقدار برای b داریم).

$$f(\frac{b}{p}) = 7 \Rightarrow -\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{p} + 3 = 7 \Rightarrow \frac{b^2}{4} = 4 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

ماکزیمم دو تابع به معادله $y = -x^2 + 4x + 3$ و $y = -x^2 - 4x + 3$ ، به ترتیب نقاط $(+2, 7)$ و $(-2, 7)$ است که فاصله بین آن ها برابر است با:

$$|+2 - (-2)| = +4$$

مجموع ضرایب معادله برابر با صفر است، بنابراین یکی از ریشه‌های این معادله $x = 1$ می‌باشد. حال معادله را تجزیه می‌کنیم تا ریشه‌های دیگر را به دست آوریم.

$$\begin{array}{r} x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 \quad \left| \frac{x-1}{x^2+ax+4} \right. \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ ax^2 + (4-a)x - 4 \\ \underline{-(ax^2 - ax)} \\ 4x - 4 \\ \underline{-(4x - 4)} \\ 0 \end{array}$$

بنابراین داریم:

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = (x-1)(x^2 + ax + 4)$$

معادله دارای سه ریشه مثبت است، در نتیجه باید معادله $x^2 + ax + 4$ دو ریشه متمایز مثبت داشته باشد. پس در معادله $x^2 + ax + 4$ شرایط زیر باید برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a < -4 \text{ یا } a > 4 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{4}{1} > 0 \quad \checkmark \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow -\frac{a}{1} > 0 \Rightarrow a < 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a < -4$$

همچنین ریشه معادله $x^2 + ax + 4$ نباید $x = 1$ باشد ($a \neq -5$). بنابراین مجموعه جواب برابر است با:

$$a < -4, \quad a \neq -5$$

گام اول

الف) با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ معادله داده شده را به معادله درجه دو تبدیل می کنیم.

ب) برای اینکه معادله اولیه فقط یک ریشه داشته باشد، معادله جدید باید دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد (چون در این صورت یک بار $\sqrt{x}$ برابر یک عدد مثبت شده که یک جواب به دست می آید و یک بار برابر یک عدد منفی شده که قابل قبول نیست) پس در این حالت معادله باید دو ریشه مختلف علامه داشته باشد.

ج) حالت دیگر این است که معادله اولیه فقط دارای یک ریشه باشد که در این صورت معادله جدید یک ریشه مضاعف مثبت دارد.

گام دوم

$$mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \Rightarrow m(\sqrt{x})^2 - 3(\sqrt{x}) + m - 2 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} mt^2 - 3t + m - 2 = 0$$

$$\text{حالت اول: } t_1 t_2 < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2 \quad (I)$$

$$\text{حالت دوم: } mt^2 - 3t + m - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 9 - 4m(m-2) = 0 \Rightarrow 9 - 4m^2 + 8m = 0$$

$$\Rightarrow -4m^2 + 8m + 9 = 0 \Rightarrow m = \frac{-8 \pm 4\sqrt{13}}{-8} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{2} \xrightarrow{m>0} m = \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \quad (II)$$

جواب سؤال اجتماع (I) و (II) است که باتوجه به گزینه ها جواب به صورت $0 < m < 2$ می شود.

روش اول:

محیط مستطیل $۲(a + b)$ و مساحت ab است.

$$\text{محیط} = ۲(a + b) = ۳۰ \Rightarrow a + b = ۱۵ \Rightarrow b = ۱۵ - a$$

$$\text{مساحت} = ab = a(۱۵ - a) = -a^2 + ۱۵a$$

برای به دست آوردن ماکزیمم این عبارت، رأس سهمی را می‌یابیم؛ توجه کنید که طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر $x = \frac{-b}{2a}$ است.

$$a = \frac{-۱۵}{-۲} = \frac{۱۵}{۲}$$

حال $a = \frac{۱۵}{۲}$ را در عبارت قرار می‌دهیم:

$$-\left(\frac{۱۵}{۲}\right)^2 + ۱۵\left(\frac{۱۵}{۲}\right) = -\frac{۲۲۵}{۴} + \frac{۲۲۵}{۲} = \frac{۲۲۵}{۴} = ۵۶\frac{۱}{۴}$$

روش دوم: به یاد داشته باشید در میان مستطیل‌هایی با محیط ثابت، بیشترین مساحت زمانی است که مربع باشد؛ پس:

$$۲(a + b) = ۳۰ \Rightarrow a + b = ۱۵ \xrightarrow{a=b} ۲a = ۱۵ \Rightarrow a = \frac{۱۵}{۲}$$

و ادامه حل مانند روش اول است.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

گام اول

اگر تابع درجه دو دارای ماکزیمم باشد، باید ضریب x^2 منفی شود.

گام دوم

ضریب x^2 منفی است پس:

$$K + ۳ < ۰ \Rightarrow K < -۳$$

عرض بیشترین مقدار تابع (عرض ماکزیمم) برابر صفر است:

$$-\frac{\Delta}{4a} = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow (-۴)^2 - ۴(K + ۳)K = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۶ = ۴(K + ۳)K \Rightarrow K(K + ۳) = ۴ \Rightarrow K^2 + ۳K - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (K + ۴)(K - ۱) = ۰ \xrightarrow{K < -۳} K = -۴$$

البته اگر از اول نگاهی به گزینه‌ها می‌انداختیم، تنها گزینه‌ای که $K < -۳$ باشد، گزینه ۱ یعنی $K = -۴$ است.

گام اول

اگر یکی از ریشه‌های معادله $۲x^۲ + ax + ۹ = ۰$ را برابر α در نظر بگیریم، ریشه دیگر برابر ۲α می‌شود.

گام دوم

روش اول:

حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a} = \frac{۹}{۲}$ است. هریک از ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$\alpha(۲\alpha) = \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۲\alpha^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۹}{۴} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها مثبت}} \alpha = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲\alpha = ۲\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۳$$

بنابراین یکی از ریشه‌ها برابر $\frac{۳}{۲}$ و دیگری برابر ۳ است. پس مجموع ریشه‌ها برابر $۴/۵$ می‌شود.

روش دوم:

یکی از ریشه‌ها α و دیگری ۲α است، پس داریم:

$$۲x^۲ + ax + ۹ = (x - \alpha)(x - ۲\alpha) = x^۲ - ۳\alpha x + ۲\alpha^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ + \frac{a}{۲}x + \frac{۹}{۲} = x^۲ - ۳\alpha x + ۲\alpha^۲$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۲} = -۳\alpha, ۲\alpha^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۹}{۴}$$

$$\xrightarrow{\alpha > ۰} \alpha = \frac{۳}{۲}, ۲\alpha = ۳ \Rightarrow \alpha + ۲\alpha = \frac{۳}{۲} + ۳ = ۴/۵$$

گام اول

وقتی گفته می‌شود معادله دارای دو ریشه معکوس است دو نتیجه می‌گیریم: اولاً Δ در این معادله بزرگ‌تر از صفر است، ثانیاً حاصل ضرب ریشه‌های معادله برابر یک است.

گام دوم

ابتدا معادله را به فرم استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ در می‌آوریم:

$$mx^2 + 3x + m^2 = 2 \Rightarrow mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$$

برای پیدا کردن مقدار m هر دو شرط بیان‌شده را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0 &\xrightarrow{x_1 \text{ و } x_2 \text{ ریشه ها}} x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{m^2 - 2}{m} = 1 \\ \Rightarrow m^2 - 2 = m &\Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7 < 0 \\ m = -1 \Rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(-1)(-1) = 9 - 4 = 5 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

با توجه به شرط $\Delta > 0$ فقط $m = -1$ جواب قابل قبول است.

گزینه ۱

شرط آنکه معادله درجه دومی، ۲ ریشه حقیقی مثبت داشته باشد این است که $\Delta > 0$ ، $S = \frac{-b}{a} > 0$ و $P = \frac{c}{a} > 0$ باشند.

$$x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(m - 2)}{1} > 0 \Rightarrow m - 2 < 0 \Rightarrow m < 2$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m + 1}{1} > 0 \Rightarrow m > -1$$

از اشتراک دو شرط بالا $-1 < m < 2$ به دست می‌آید و گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ حذف می‌شوند؛ پس اصلاً نیازی به بررسی $\Delta > 0$ نیست ولی ما شرط $\Delta > 0$ را هم بررسی می‌کنیم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m - 2)^2 - 4(m + 1) > 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 4m - 4 > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 4 \\ \text{یا} \\ m < 0 \end{cases}$$

از اشتراک $-1 < m < 2$ با شرط بالا به این نتیجه می‌رسیم: $-1 < m < 0$

گام اول

الف) اگر α و β ریشه های معادله درجه دو داده شده، باشد می دانیم $\alpha^2 + \beta^2 = 6$ است. $\alpha^2 + \beta^2$ برابر است با:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 6$$

ب) در صورتی که $\Delta > 0$ باشد معادله درجه دو، دو ریشه حقیقی دارد و اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله فاقد ریشه است.

گام دوم

$$mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{m+3}{m} \\ P = \alpha\beta = \frac{5}{m} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \Rightarrow (5m+9)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه حقیقی} \\ m = -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{دارای دو ریشه حقیقی} \end{cases}$$

پس فقط به ازای $m = -\frac{9}{5}$ معادله دو ریشه حقیقی دارد.

گام اول

ریشه‌های معادله موردنظر از معکوس ریشه‌های معادله داده شده یک واحد کمتر است، بنابراین ریشه‌های آن به صورت $۱ - \frac{1}{\alpha}$ و $۱ - \frac{1}{\beta}$ است.

گام دوم

روابط مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

ریشه‌های معادله موردنظر به صورت $۱ - \frac{1}{\alpha}$ و $۱ - \frac{1}{\beta}$ است، لذا:

$$S' = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} - 2 = -5$$

$$P' = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1$$

$$= \frac{1 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} + 1 = 2$$

پس معادله به صورت زیر است:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

اگر α و β را ریشه‌های معادله $۲x^۲ - x - ۲ = ۰$ در نظر بگیریم، داریم:

$$۲x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{1}{۲} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۱ \end{cases}$$

بنابراین $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ ریشه‌های معادله درجه دوم $\lambda x^۲ - mx - \lambda = ۰$ می‌شود:

$$\lambda x^۲ - mx - \lambda = ۰ \Rightarrow S' = \alpha^۳ + \beta^۳ = (\alpha + \beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= \left(\frac{1}{۲}\right)^۳ - ۳(-۱)\left(\frac{1}{۲}\right) = \frac{1}{\lambda} + \frac{۳}{۲} = \frac{۱۳}{\lambda}$$

$$S' = -\frac{b}{a} = \frac{m}{\lambda} \Rightarrow \frac{۱۳}{\lambda} = \frac{m}{\lambda} \Rightarrow m = ۱۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

$$\alpha, a, \beta \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \alpha\beta = a^۲ \quad (*)$$

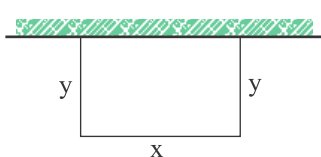
ازطرفی در معادله داده شده می‌دانیم $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ یعنی:

$$\alpha\beta = \frac{۲a - ۱}{۱} \xrightarrow{(*)} a^۲ = ۲a - ۱ \Rightarrow a^۲ - ۲a + ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

فرض کنیم طول زمین x و عرض آن y باشد.

می‌دانیم حاصلضرب دو عدد زمانی بیشترین مقدار است که آن دو عدد برابر باشند و هرکدام برابر نصف مجموع دو عدد باشد، پس:



$$۲y + x = ۵۶ \Rightarrow \begin{cases} ۲y = ۲۸ \Rightarrow y = ۱۴ \\ x = ۲۸ \end{cases} \Rightarrow S_{\max} = x \times y = ۲۸ \times ۱۴ = ۳۹۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

روش اول:

$$\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \beta, \alpha\beta = -2$$

$$\Rightarrow (1 - \beta)\beta = -2 \Rightarrow \beta^2 - \beta - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2 \Rightarrow \alpha = -1 \\ \beta = -1 \Rightarrow \alpha = 2 \end{cases}$$

حال با جایگذاری α یا β در معادله سؤال داریم:

$$-4 + k + 9 - 2 = 0 \Rightarrow 3 + k = 0 \Rightarrow k = -3$$

روش دوم:

نکته: حاصل ضرب و حاصل جمع ریشه‌های معادله درجه ۳، $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ به صورت $P = \frac{-d}{a}$ و $S = \frac{-b}{a}$ است.

فرض می‌کنیم این معادله ریشه دیگری به نام γ دارد. پس:

$$\alpha\beta\gamma = \frac{2}{4} \Rightarrow \alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}$$

چون می‌دانیم $\alpha\beta = -2$ ، پس:

$$\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha\beta = -2} -2\gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{-1}{4}$$

ازطرفی می‌دانیم:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= \frac{-k}{4} \xrightarrow[\gamma = \frac{-1}{4}]{\alpha + \beta = 1} 1 + \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{-k}{4} \\ \Rightarrow \frac{3}{4} &= \frac{-k}{4} \Rightarrow k = -3 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

معادله استاندارد به صورت $a'x^2 + b'x + c' = 0$ است:

$$x^2 + \epsilon x + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b'}{a'} = -\epsilon \\ P = \frac{c'}{a'} = a \end{cases}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a'|} \xrightarrow{\alpha < \beta < 0} \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{-a'} \xrightarrow{a'=1} \alpha - \beta = -\sqrt{\Delta}$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = -\sqrt{3\epsilon - 4a}$$

$$3\alpha^2 + 2\beta^2 = \frac{5}{\gamma}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{\gamma}(\alpha^2 - \beta^2) = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\gamma}(\underbrace{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta}_{(\alpha+\beta)^2} - 2\alpha\beta) + \frac{1}{\gamma}((\alpha - \beta)(\alpha + \beta)) = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\gamma}(S^2 - 2P) - \frac{1}{\gamma}(S\sqrt{\Delta}) = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\gamma}(3\epsilon - 2a) - \frac{1}{\gamma}(-\epsilon)(\sqrt{3\epsilon - 4a}) = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\Rightarrow 90 - 5a + 3\sqrt{3\epsilon - 4a} = 12\sqrt{2} + 85$$

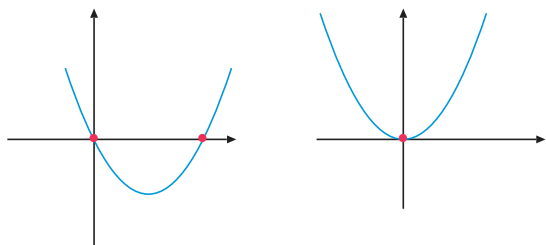
$$\Rightarrow \begin{cases} 90 - 5a = 85 \Rightarrow a = 1 \\ 3\sqrt{3\epsilon - 4a} = 12\sqrt{2} \Rightarrow 3\epsilon - 4a = 32 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

$$y = ax^2 + (3 + 2a)x = x(ax + 3 + 2a) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + 3 + 2a = 0 \Rightarrow x = -\frac{3 + 2a}{a} \end{cases}$$

سهمی از ناحیه سوم عبور نمی‌کند، بنابراین به صورت شکل‌های زیر می‌تواند باشد:



$$\Rightarrow a > 0 \quad (*)$$

$$\text{ریشه غیر صفر} > 0 \Rightarrow -\frac{3 + 2a}{a} > 0 \Rightarrow \frac{3 + 2a}{a} < 0$$

$$\xrightarrow{a > 0} 3 + 2a < 0 \Rightarrow a < -\frac{3}{2}$$

بنابراین طبق (*) برای a مقداری یافت نشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم، حال داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{a}{3} \xrightarrow{\beta = 3\alpha} \alpha + 3\alpha = \frac{a}{3} \Rightarrow 4\alpha = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 12\alpha$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{4}{3} \xrightarrow{\beta = 3\alpha} \alpha \cdot 3\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{2}{3}$$

$$a = 12\alpha = 12\left(\pm \frac{2}{3}\right) = \pm 8 \Rightarrow 8 - (-8) = 16$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

تابع $y = ax^2 + bx + c$ دارای ماکسیمم است اگر $a < 0$ باشد و طول آن $x = \frac{-b}{2a}$ است.

$$1 - 18m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{18}$$

$$x = \frac{-\lambda(m^2 + 1)}{2(1 - 18m)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 16m^2 - 36m + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (4m - 6)(4m - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

هر دو مقدار بزرگتر از $\frac{1}{18}$ هستند، بنابراین قابل قبول می‌باشند.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

$$S = \frac{-(-(a^2 + b^2 - 12))}{1} \Rightarrow a + b = a^2 + b^2 - 12$$

$$a + b = (a + b)^2 - 2ab - 12 \quad (I)$$

$$P = \frac{a + b - 1}{1} : \text{از طرفی} \Rightarrow ab = (a + b) - 1$$

$$\xrightarrow[\text{(I)}]{\text{جایگذاری در رابطه}} a + b = (a + b)^2 - 2(a + b) + 2 - 12$$

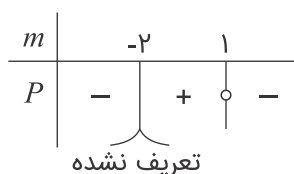
$$\Rightarrow (a + b)^2 - 3(a + b) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} \Rightarrow a + b = 5 \\ a + b = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} \Rightarrow a + b = -2 \end{cases} \quad \checkmark \text{ قابل قبول}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

این منحنی باید دو ریشهٔ مختلف‌العلامت داشته باشد؛ در نتیجه کافی است حاصل‌ضرب دو ریشه منفی باشد.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{1-m}{m+2} < 0$$



$$\Rightarrow m > 1 \text{ یا } m < -2$$

دقت کنید که اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، $\Delta > 0$ می‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

گام اول

الف) چون نمودار از طرف بالا بر محور x مماس شده است، ضریب x^2 مثبت است.
ب) نمودار منحنی درجه دو بر محور x مماس است. بنابراین معادلهٔ $f(x) = 0$ ریشهٔ مضاعف داشته و $\Delta = 0$ است.

گام دوم

با مشخص شدن مقدار a ، معادلهٔ $f(x) = 0$ را حل کرده و طول نقطهٔ تماس یا همان ریشهٔ مضاعف تابع را مشخص می‌کنیم:

$$f(x) = ax^2 + 4x + a - 3$$

$$۱) \ a > 0 \quad (I)$$

$$۲) \ \Delta = 0 \Rightarrow 4^2 - 4(a)(a-3) = 0 \Rightarrow 16 - 4(a^2 - 3a) = 0$$

$$\Rightarrow 4(a^2 - 3a) = 16 \Rightarrow a^2 - 3a = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow (a-4)(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -1 \end{cases} \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) : a = 4$$

با در نظر گرفتن $a = 4$ ، ضابطهٔ $f(x)$ را بازنویسی کرده و معادلهٔ $f(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = ax^2 + 4x + a - 3 \xrightarrow{a=4} f(x) = 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)^2 = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

گام اول

ریشه‌های معادله درجه دوم را α و β در نظر می‌گیریم. چون $\frac{1}{\lambda}$ واسطه حسابی بین α و β است، داریم:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{\lambda}$$

گام دوم

در معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، در این صورت $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ است.

$$(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه‌های } \alpha \text{ و } \beta} \alpha + \beta = -\left(-\frac{3}{m^2 - 4}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{3}{m^2 - 4} \text{ و } \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{4}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{3}{m^2 - 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow m^2 - 4 = 12 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

به‌ازای $m = 4$ مقدار Δ برای معادله منفی شده و در نتیجه معادله فاقد ریشه می‌شود، پس فقط $m = -4$ قابل قبول است.

گام اول

الف) اولاً نمودار تابع محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند، پس معادله $y = 0$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > 0$ است.
 ب) هر دو ریشه معادله مثبت است، بنابراین حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌ها باید مثبت باشد.

گام دوم

$$y = 2x^2 - 4x + m - 3$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(2)(m - 3) > 0 \Rightarrow 16 - 8(m - 3) > 0$$

$$\Rightarrow 8(m - 3) < 16 \Rightarrow m - 3 < 2 \Rightarrow m < 5 \quad (I)$$

$$۲) S = x_1 + x_2 = -\left(-\frac{4}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

$$۳) P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m - 3}{2} > 0 \Rightarrow m - 3 > 0 \Rightarrow m > 3 \quad (II)$$

مجموعه مقادیر قابل قبول برای m ، اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) است پس می‌توان نوشت:

$$(I) \cap (II) : 3 < m < 5$$

$$x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases}$$

ابتدا معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $x_1 + 1$ و $x_2 + 1$ باشد برای این منظور کافی است از x ها یک واحد کم کنیم:

$$(x-1)^2 + (x-1) - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 5 = 0$$

اگر ریشه‌ها α و β باشد:

$$(\alpha + \beta) = 1, \quad \alpha\beta = -5$$

حال معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha^3}$ و $\frac{1}{\beta^3}$ باشد:

$$S_{\text{New}} = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{(\alpha\beta)^3} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3(\alpha + \beta)(\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^3}$$

$$= \frac{(1)^3 - 3(1)(-5)}{-125} = -\frac{16}{125}$$

$$P_{\text{New}} = \frac{1}{\alpha^3} \times \frac{1}{\beta^3} = \frac{1}{(\alpha\beta)^3} = -\frac{1}{125}$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{16}{125}\right)x - \frac{1}{125} \Rightarrow 125x^2 + 16x - 1 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$\left| -\frac{b}{a} - \left(-\frac{c}{a}\right) \right| = 2 \Rightarrow \left| -\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right| = 2 \Rightarrow |c - b| = 2a \Rightarrow \begin{cases} c - b = 2a \\ \text{یا} \\ c - b = -2a \Rightarrow b - c = 2a \end{cases}$$

ابتدا حالتی که $c - b = 2a$ باشد را بررسی می‌کنیم، حالت دوم نیز مشابه است.

چون a یک رقم طبیعی است پس $2a$ زوج و مثبت است. حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

(۱) اگر $c - b = 2$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ وجود دارد. (حالت ۷)

(۲) اگر $c - b = 4$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ وجود دارد. (حالت ۵)

(۳) اگر $c - b = 6$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{7, 8, 9\}$ وجود دارد. (حالت ۳)

(۴) اگر $c - b = 8$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{9\}$ وجود دارد. (حالت ۱)

بنابراین کل حالت‌ها برابر است با:

$$2(1 + 3 + 5 + 7) = 2 \times 16 = 32$$

تذکر: باتوجه به اینکه به ازای $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ دلتا همواره مثبت است، بنابراین کل حالات به دست آمده قابل قبول می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

اگر نمودار تابع $y = -x^2$ را یک واحد در جهت مثبت محور x ها و یک واحد در جهت مثبت محور y ها انتقال دهیم، نمودار تابع $y = f(x)$ رسم می‌شود. طبق قوانین انتقال، ضابطه تابع $y = f(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y = -(x-1)^2 + 1 = -x^2 + 2x - 1 + 1 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x$$

اگر نمودار تابع $y = -x$ را یک واحد به موازات محور x ها و در جهت مثبت انتقال دهیم، نمودار تابع $y = g(x)$ رسم می‌شود. بنابراین ضابطه تابع $g(x)$ به صورت $g(x) = -x + 1$ می‌باشد. اکنون می‌توانیم معادله موردنظر را تشکیل داده و مجموع جواب‌های آن را به دست آوریم.

$$f(x) = g^2(x) \Rightarrow -x^2 + 2x = (-x + 1)^2 \Rightarrow -x^2 + 2x = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

$$-\frac{b}{a} = -\frac{c}{a} + 2 \Rightarrow b = c - 2a \Rightarrow 2a = c - b$$

$$2 \leq 2a \leq 18 \Rightarrow 2 \leq c - b \leq 18$$

چون $c - b$ برابر با $2a$ است، پس عددی زوج است:

اگر $c - b = 2$ باشد، ۷ حالت وجود دارد

اگر $c - b = 4$ باشد، ۵ حالت وجود دارد.

اگر $c - b = 6$ باشد، ۳ حالت وجود دارد.

اگر $c - b = 8$ باشد، ۱ حالت وجود دارد.

پس در کل ۱۶ حالت داریم.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 \right) \left(\sqrt[3]{x^2} - 1 \right) = 2 \sqrt[3]{x}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) \left(\sqrt[3]{x^2} - 1 \right) = 2 \sqrt[3]{x}$$

$$\xrightarrow{\times \sqrt[3]{x^2}} \left(\underbrace{\sqrt[3]{x^6}}_{a^2} + \underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{ab} + \underbrace{1}_{b^2} \right) \left(\underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_a - \underbrace{1}_b \right) = 2x$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

جمع ریشه‌ها برابر $\frac{-b}{a}$ است: $\frac{-b}{a} = 2$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

چون توان‌های x ‌های استفاده‌شده در معادله، همگی زوج هستند، پس اگر α جواب این معادله باشد، $-\alpha$ هم حتماً جواب معادله است. درنتیجه مجموع جواب‌های این معادله، حتماً صفر است: $S = 0$
 الان باید حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله را حساب کنیم. با فرض $x^2 = t$ داریم:

$$t^2 - 7t - 5 = 0 \xrightarrow{\Delta=69} t = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}$$

چون $x^2 \geq 0$ است، پس جواب‌های منفی t ، قابل قبول نیستند و درنتیجه فقط $t = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}$ قابل قبول است.

$$x^2 = \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}}$$

پس:

$$P = -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \times \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

مقدار عبارت خواسته‌شده، برابر است با:

$$2P^2 - \underbrace{3SP}_{\circ} + \underbrace{2S}_{\circ} = 2 \left(-\frac{7 + \sqrt{69}}{2} \right)^2 = 2 \left(\frac{49 + 69 + 14\sqrt{69}}{4} \right) = 59 + 7\sqrt{69}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

$$x^y - x - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_۲ = ۱ \\ P = x_1 x_۲ = -۴ \end{cases}$$

ریشه‌های معادله جدید را α و β می‌نامیم. داریم:

$$\begin{aligned} S_{\text{new}} &= \alpha + \beta = (x_۲^۳ + \frac{1}{x_1}) + (x_1^۳ + \frac{1}{x_۲}) = x_1^۳ + x_۲^۳ + \frac{x_1 + x_۲}{x_1 x_۲} \\ &= S^۳ - ۳SP + \frac{S}{P} = ۱ - ۳(-۴) - \frac{1}{۴} = ۱۳ - \frac{1}{۴} = \frac{۵۱}{۴} \\ P_{\text{new}} &= (x_۲^۳ + \frac{1}{x_1})(x_1^۳ + \frac{1}{x_۲}) = (x_1 x_۲)^۳ + x_۲^۲ + x_1^۲ + \frac{1}{x_1 x_۲} \\ &= P^۳ + S^۲ - ۲P + \frac{1}{P} = (-۴)^۳ + (۱)^۲ - ۲(-۴) + \frac{1}{-۴} \\ &= -۶۴ + ۱ + ۸ - \frac{1}{۴} = -۵۵ - \frac{1}{۴} = \frac{-۲۲۱}{۴} \end{aligned}$$

با S_{new} و P_{new} به دست آمده معادله جدید را می‌سازیم:

$$x^y - S_{\text{new}} x + P_{\text{new}} = ۰ \Rightarrow x^y - \frac{۵۱}{۴} x - \frac{۲۲۱}{۴} = ۰ \Rightarrow ۴x^y = ۵۱x + ۲۲۱$$

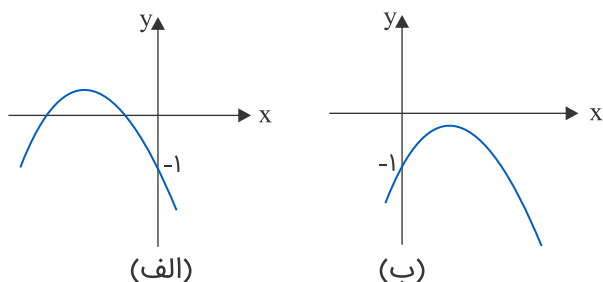
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

اولین شرط برای اینکه نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ از ناحیه اول عبور نکند این است که ضریب x^2 یا همان a منفی باشد. که در اینجا باید داشته باشیم:

$$a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$$

روش اول:

تابع صورت سؤال را می‌توان در دو حالت زیر فرض کرد:



$$f(x) = (a - 3)x^2 + ax - 1 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = -1$$

در حالت (الف) باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$P > 0, \quad S < 0, \quad \Delta > 0$$

و در حالت (ب) تنها کافی است که $\Delta \leq 0$ باشد.

برای حالت (الف) داریم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 + 4(a - 3) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0$$

$$\Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6 \quad (\text{I})$$

$$S < 0 \Rightarrow -\frac{a}{a - 3} < 0 \xrightarrow{a - 3 < 0} -a > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (\text{II})$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a - 3} > 0 \quad (\text{III})$$

(با توجه به اینکه $a - 3 < 0$ ، همواره برقرار است.)

$$(\text{I}) \cap (\text{II}) \cap (\text{III}) \Rightarrow a < -6$$

برای حالت (ب):

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4(a - 3) \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2$$

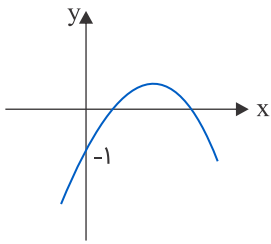
چون به ازای هر دو حالت (الف) و (ب) سهمی از ناحیه اول نمی‌گذرد داریم:

$$(-\infty, -6) \cup [-6, 2] = (-\infty, 2] \Rightarrow a \leq 2$$

روش دوم:

باتوجه به اینکه $a < 3$ است حالتی را در نظر می‌گیریم که نمودار حتماً از ناحیه اول بگذرد سپس مجموعه جواب به دست آمده را از $a < 3$ کم می‌کنیم.

چون عرض از مبدأ -1 است و $a < 3$ ؛ پس تابع ماکزیمم دارد.



و باتوجه به نمودار شروط زیر باید برقرار باشد:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow \text{باید دو ریشه داشته باشد}$$

$$2) > 0 \Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها}$$

$$3) > 0 \Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a - 3)(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(a + 6) > 0 \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6 \quad (I)$$

$$> 0 \Rightarrow \frac{-a}{a - 3} > 0 \Rightarrow 0 < a < 3 \quad (II)$$

$$> 0 \Rightarrow \frac{-1}{a - 3} > 0 \Rightarrow a < 3 \quad (III)$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \Rightarrow 2 < a < 3$$

به ازای بازه به دست آمده برای a تابع حتماً از ناحیه اول عبور می‌کند. پس با کم کردن این بازه از $a < 3$ خواسته سؤال محقق می‌شود.

$$(-\infty, 3) - (2, 3) = (-\infty, 2] \Rightarrow a \leq 2$$

در نتیجه به ازای بازه فوق برای a نمودار تابع از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد.

گام اول

الف) نمودار تابع درجه دو در صورتی بر محور x ها مماس می‌شود که ریشه مضاعف داشته باشد. در این صورت $\Delta = 0$ خواهد بود.
 ب) چون نمودار تابع بالای محور x ها قرار دارد و بر محور x ها مماس شده است، پس ضریب x^2 مثبت در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$y = (m - 2)x^2 - 3x + m + 2$$

$$۱) \quad m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2 \quad (I)$$

$$۲) \quad \Delta = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(m - 2)(m + 2) = 0 \Rightarrow 9 - 4(m^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4 = \frac{9}{4} \Rightarrow m^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow m = \pm \frac{5}{2} \quad (II)$$

اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) مقدار $m = \frac{5}{2}$ را به ما می‌دهد.

برای اینکه معادله درجه دوم دارای دو ریشه مثبت باشد باید $\Delta > 0$ ، $p > 0$ و $s > 0$ باشد، بنابراین داریم:

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4 \times 2 \times (m + 6) = m^2 - 8m - 48 > 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(m - 12)(m + 4)}_p > 0$$

x	$-\infty$	-4	12	$+\infty$
p(x)	$\begin{array}{c} + \\ \text{ع} \end{array}$	$\begin{array}{c} \\ - \end{array}$	$\begin{array}{c} \\ - \end{array}$	$\begin{array}{c} + \\ \text{ع} \end{array}$

$$\Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 12$$

$$۲) p > 0 \Rightarrow p = -\frac{b}{a} = \frac{-m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0$$

$$۳) s > 0 \Rightarrow s = \frac{c}{a} = \frac{m + 6}{2} > 0 \Rightarrow m > -6$$

حال از حدود m در (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم، در نتیجه داریم:

$$m \in (-6, -4)$$

می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، آنگاه داریم:

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است، پس داریم:

$$s = \frac{1}{p} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{2m-1}{3} = \frac{1}{\frac{(2-m)}{3}} \Rightarrow \frac{-2m+1}{3} = \frac{3}{2-m}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -2m + 2m^2 + 2 - m = 9 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{c}{a} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

طبق صورت مسئله، معادله داده شده دارای دو ریشه حقیقی است، پس باید $\Delta > 0$ باشد. حال مقدار m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = -1 \Rightarrow 3x^2 + (-2-1)x + 2+1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \text{ غ ق ق} \\ m = \frac{7}{2} \Rightarrow 3x^2 + (2 \times \frac{7}{2} - 1)x + 2 - \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین $m = \frac{7}{2}$ است.

اول عبارت $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ را ساده می‌کنیم تا مشخص شود برای حل تست به چه اطلاعاتی نیاز داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$\alpha\beta$ حاصل ضرب ریشه‌های معادله است و به راحتی محاسبه می‌شود. برای به دست آوردن $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow A = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$4x^2 - 12x + 1 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases} \alpha + \beta = -(-\frac{12}{4}) = 3 \\ \alpha\beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

پس حاصل $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ برابر است با:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

برای اینکه نمودار تابع درجه دوم به فرم $y = ax^2 + bx + c$ همواره پایین محور x باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$۱) a < 0, \quad ۲) \Delta < 0$$

مجموعه جواب‌های این دو نامعادله را به دست آورده و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$y = (m - 1)x^2 + \sqrt{3}x + m$$

$$۱) a < 0 \Rightarrow m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \quad (I)$$

$$۲) \Delta < 0 \Rightarrow (\sqrt{3})^2 - 4(m - 1)m < 0 \Rightarrow 3 - 4m^2 + 4m < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 3 > 0$$

جدول تعیین علامت عبارت $4m^2 - 4m - 3$ را تشکیل می‌دهیم:

$$4m^2 - 4m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{4 + \sqrt{64}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ m_2 = \frac{4 - \sqrt{64}}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس مجموعه جواب نامعادله دوم به صورت زیر درمی‌آید:

$$m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty) \quad (II)$$

بنابراین مجموعه جواب قابل قبول برای m برابر است با:

$$(I) \cap (II) : m < -\frac{1}{2}$$

گام اول

الف) منحنی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند بنابراین مقدار Δ بزرگ‌تر از صفر است.

ب) منحنی در دو نقطه منفی محور x ها را قطع می‌کند بنابراین حاصل جمع ریشه‌ها (S) منفی و حاصل ضرب ریشه‌ها (P) مثبت است.

ج) در هر معادله درجه دو به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$$

گام دوم

در معادله درجه دو داده شده داریم:

$$a = (m - 2), \quad b = -2(m + 1), \quad c = 12$$

حال هر سه شرط گفته شده را بررسی می‌کنیم:

$$I) \Delta > 0 \Rightarrow 4(m + 1)^2 - 4(m - 2)(12) > 0 \Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 48m + 96 > 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 40m + 100 > 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 - 10m + 25 > 0 \Rightarrow (m - 5)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 5$$

$$II) S < 0 \Rightarrow \frac{2(m + 1)}{m - 2} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2$$

$$III) P > 0 \Rightarrow \frac{12}{m - 2} > 0 \Rightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

اشتراک بین دو مجموعه جواب II و III برابر تهی است؛ بنابراین منحنی موردنظر به ازای هیچ مقدار m ، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع نمی‌کند.

یک ریشه را α و ریشه دیگر را $\frac{\alpha}{2} + 5$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از رابطه مجموع ریشه‌ها مقدار α و با استفاده از رابطه حاصل ضرب ریشه‌ها m را تعیین می‌کنیم.

$$x^2 - 8x + m = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه‌های } (\frac{\alpha}{2} + 5) \text{ و } \alpha} \alpha + \frac{\alpha}{2} + 5 = -(-\frac{8}{1}) = 8 \Rightarrow \frac{3\alpha}{2} + 5 = 8$$

$$\Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = 3 \Rightarrow \alpha = 2$$

مقدار m را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha(\frac{\alpha}{2} + 5) = \frac{m}{1} = m \Rightarrow 2(1 + 5) = m \Rightarrow m = 2 \times 6 = 12$$

گام اول

الف) نمودار تابع محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند. معادله $f(x) = 0$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > 0$ است.
 ب) هر دو ریشه معادله منفی است، بنابراین حاصل جمع ریشه‌ها منفی و حاصل ضرب ریشه‌ها مثبت در نظر گرفته می‌شود.
 ج) مجموعه مقادیر قابل قبول برای a ، اشتراک بین سه مجموعه جواب به دست آمده است.

گام دوم

$$f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow (a+3)^2 - 4(a)(-1) > 0 \Rightarrow (a+3)^2 + 4a > 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 6a + 9 + 4a > 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0$$

$$\Rightarrow (a+9)(a+1) > 0 \Rightarrow a < -9 \text{ یا } a > -1 \quad (I)$$

$$۲) S = x_1 + x_2 = -\frac{a+3}{a} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{a+3}{a} > 0 \Rightarrow a < -3 \text{ یا } a > 0 \quad (II)$$

$$۳) P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow a < 0 \quad (III)$$

مجموعه مقادیر قابل قبول برای a عبارت است از:

$$(I) \cap (II) \cap (III) : a < -9$$

$a_2, 2a_5, a_8$ سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی اند، پس:

$$\begin{aligned} 2a_5 &= \frac{a_2 + a_8}{2} \\ \Rightarrow 2a_1 q^4 &= \frac{a_1 q + a_1 q^7}{2} \Rightarrow 4q^3 = 1 + q^6 \\ \Rightarrow q^6 - 4q^3 + 1 &= 0 \xrightarrow{q^3=t} t^2 - 4t + 1 = 0 \\ \Rightarrow t &= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow q^3 = 2 \pm \sqrt{3} \\ \Rightarrow q &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}, \quad q = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

با فرض افزایشی بودن دنباله، جمله هشتم بزرگترین جمله است و در نتیجه $q = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$ ، پس:

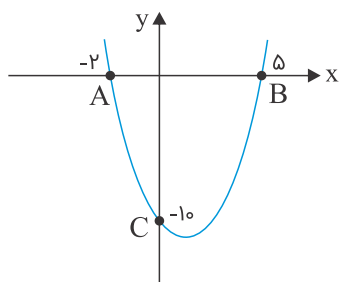
$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a_1 q^7}{a_1 q} = q^6 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 3x - 10 \Rightarrow y = (x - 5)(x + 2) \\ \xrightarrow{y=0} x &= -2, \quad x = 5 \end{aligned}$$

باتوجه به صفرهای تابع، نمودار تابع محور x ها را در نقاط $A(-2, 0)$ و $B(5, 0)$ قطع می‌کند. همچنین محور y ها را در نقطه $C(0, -10)$ قطع می‌کند.

همچنین به علت مثبت بودن ضریب x^2 ، دهانه این سهمی روبه بالا باز می‌شود؛ بنابراین نمودار آن به شکل زیر است:



همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای آنکه طول نقطه‌های تلاقی نمودار سهمی با محور x ها نامنفی باشند، باید نمودار را حداقل دو واحد به سمت x های مثبت انتقال دهیم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، باید رابطه $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2$ برقرار باشد.

گام دوم

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}, \quad S = \frac{m+1}{2}, \quad P = \frac{1}{16}$$

$$A = \sqrt{\frac{m+1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right)} = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{m+1}{2} + \frac{1}{2}} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow \frac{m+1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow m+1 = 7 \Rightarrow m = 6$$

گزینه ۴

گام اول

شرط اینکه معادله درجه دو دارای ۲ ریشه مثبت باشد، این است که:

$$۱) \Delta > 0 \quad ۲) S > 0 \quad ۳) P > 0$$

گام دوم

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4(a-2)^2 - 4(1)(14-a) > 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} (a-2)^2 - (14-a) > 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 - 14 + a > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0$$

$$\Rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 5 \quad (۱)$$

$$S > 0 \Rightarrow 2(a-2) > 0 \Rightarrow a-2 > 0 \Rightarrow a > 2 \quad (۲)$$

$$P > 0 \Rightarrow 14-a > 0 \Rightarrow a < 14 \quad (۳)$$

$$(۱) \cap (۲) \cap (۳) : 5 < a < 14$$

با فرض $x^2 - 2x = t$ داریم:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} x = 1 \\ t = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

پس معادله سه ریشه حقیقی دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

ابتدا از روی معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ ، حاصل $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می‌آوریم. سپس حاصل $\frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1$ و $(\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1)$ را محاسبه می‌کنیم. اگر P و S مقادیر حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های یک معادله درجه دو باشند، آن معادله درجه دو به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشته می‌شود.

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases} \alpha + \beta = -(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

S و P را برای معادله جدید به دست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P = (\frac{1}{\alpha} + 1)(\frac{1}{\beta} + 1) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{4}$$

بنابراین معادله درجه ۲ جدید به صورت زیر درمی‌آید:

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

ابتدا معادله $x(\omega x + 3) = 2$ را به فرم استاندارد معادله درجه دو تبدیل کرده و باتوجه به اینکه α و β ریشه‌های آن است، مقدار $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را به دست می‌آوریم.
برای یافتن k باید حاصل $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ را محاسبه کرده و برابر $\frac{k}{4}$ قرار دهیم.

$$x(\omega x + 3) = 2 \Rightarrow \omega x^2 + 3x = 2 \Rightarrow \omega x^2 + 3x - 2 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{3}{\omega} \\ \alpha\beta = -\frac{2}{\omega} \end{cases}$$

مقدار k را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \omega x^2 - kx + 2\omega &= 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\frac{1}{\alpha^2} \text{ و } \frac{1}{\beta^2} \text{ ریشه های}} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{k}{4} \\ \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{k}{4} \\ \Rightarrow \frac{\left(-\frac{3}{\omega}\right)^2 - 2\left(-\frac{2}{\omega}\right)}{\left(-\frac{2}{\omega}\right)^2} &= \frac{k}{4} \Rightarrow \frac{\frac{9}{\omega} + \frac{4}{\omega}}{\frac{4}{\omega^2}} = \frac{\frac{13}{\omega}}{\frac{4}{\omega^2}} = \frac{13}{4} = \frac{k}{4} \Rightarrow k = 13 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

یک ریشه را α و ریشه دیگر را $3\alpha + 3$ در نظر می‌گیریم.
با استفاده از حاصل جمع ریشه‌ها مقدار α را محاسبه می‌کنیم. سپس با استفاده از حاصل ضرب ریشه‌ها مقدار m را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 17x + m &= 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } (3\alpha + 3) \text{ ریشه های}} \alpha + (3\alpha + 3) = -\left(-\frac{17}{3}\right) \\ \Rightarrow 4\alpha + 3 &= \frac{17}{3} \Rightarrow 4\alpha = \frac{8}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \\ 3\alpha + 3 &= 3\left(\frac{2}{3}\right) + 3 = 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

پس حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha \times (3\alpha + 3) = \frac{2}{3} \times 5 = \frac{m}{3} \Rightarrow \frac{m}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow m = 10$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول

α و β را ریشه‌های معادله درجه دو فرض می‌کنیم. $\sqrt{2}$ واسطه هندسی بین α و β است. بنابراین داریم:

$$\alpha\beta = (\sqrt{2})^2 = 2$$

گام دوم

در معادله درجه دو به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه های}} \alpha\beta = \frac{m^2 - 3}{m}$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=2} 2 = \frac{m^2 - 3}{m} \Rightarrow m^2 - 3 = 2m$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow (m - 3)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$$

$$m = 3: 3x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 72 < 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه}$$

$$m = -1: -x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 8 > 0$$

پس فقط $m = -1$ قابل قبول است.

اگر فرض کنیم $x_1 = \alpha\beta^2$ و $x_2 = \alpha^2\beta$ ریشه‌های معادله $\lambda x^2 + kx - 1 = 0$ باشند آنگاه کافی است $x_1 + x_2$ را به دست آوریم.

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\lambda x^2 + kx - 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = \frac{-k}{\lambda} \Rightarrow \alpha\beta(\beta + \alpha) = -\frac{k}{\lambda} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{k}{\lambda} \Rightarrow k = 6$$

گام اول

الف) فرض کنید α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - 4x - 1 = 0$ باشند پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که $(\alpha + 1)$ و $(\beta + 1)$ ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ هستند.

ب) برای به دست آوردن مقدار b باید حاصل ضرب ریشه‌های معادله یا همان $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ را تعیین کنیم.

گام دوم

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها } \alpha \text{ و } \beta} \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{4}{3} \\ \alpha\beta = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (I)$$

$$3x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها } (\alpha+1) \text{ و } (\beta+1)} (\alpha + 1)(\beta + 1) = \frac{b}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{b}{3} \xrightarrow{(I)} -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{b}{3} = 2 \Rightarrow b = 6$$

با تغییر متغیر t در معادله داده شده داریم:

$$t^2 - (t + 1) = 1 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow P = 1 \\ x^2 - 4x = 2 \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow P = -2 \end{cases} \Rightarrow P_{\text{کل}} = -2$$

در نتیجه، حاصل ضرب ریشه‌های معادله $(x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x + 1) = 1$ برابر -2 است.

تألیف: محمدرضا محمدهاشمی - محمد رفیعی امین

مدارس علوم تجربی مفید

مدارس ریاضی و فیزیک مفید

می‌توانیم در هر گزینه جواب‌ها را صدق دهیم که کاری بسیار زمانبر است، بنابراین از روابط S و P استفاده می‌کنیم.

$$S = (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 4$$

$$P = (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 4 - 2 = 2$$

اگر حاصل جمع دو ریشه S و حاصل ضرب دو ریشه P باشد، معادله درجه دوم عبارت است از:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

برای حل این مسئله، تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ را در نظر می‌گیریم.

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$$

$$t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \\ t = -2 \times \end{cases}$$

پس معادله فوق، یک ریشه مثبت دارد.

$$S = -2m$$

$$P = 3 - m$$

$$SP = -4 \Rightarrow (-2m)(3 - m) = -4$$

$$\Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 1 : x^2 + 2x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = 4 - 8 < 0} \text{بدون ریشه حقیقی (غقق)} \\ m = 2 : x^2 + 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = 16 - 4 > 0} \text{دو ریشه حقیقی (قق)} \end{cases}$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۰۷

گزینه ۳

$$x^4 + 2x^2 + x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (t + 4)(t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ t = -4 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow \text{جواب حقیقی ندارد} \end{cases}$$

مدارس علوم انسانی البرز

$$x^2 + 2x = t$$

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} : x^2 + 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \Delta = 2 > 0 \\ \Rightarrow S_1 = -2 \\ t = 3 : x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 > 0 \\ \Rightarrow S_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} : S = S_1 + S_2 = -2 + (-2) = -4$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۱

$$A^2 - 2A + m - 1 = 0, \quad \sqrt{x} = A$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta = 4 - 4(m-1) > 0 \Rightarrow 4 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow 8 - 4m > 0 \Rightarrow m < 2 \\ S = 2 > 0 \quad \text{بدیهی} \quad , \quad P \geq 0 \Rightarrow m-1 \geq 0 \Rightarrow m \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \leq m < 2$$

مدارس علوم تجربی مرکز آزمون مدارس برتر

معادله سهمی با ریشه‌های α و β به صورت $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ است. طبق نمودار $\alpha = -1$ و $\beta = 4$ است، پس:

$$y = a(x + 1)(x - 4)$$

نقطه $(0, 8)$ روی سهمی است، پس داریم:

$$8 = a(1)(-4) \Rightarrow a = -2$$

بنابراین:

$$y = -2(x + 1)(x - 4) \quad \text{یا} \quad y = -2x^2 + 6x + 8$$

$$S = (6 + \sqrt{20}) + (6 - 2\sqrt{5}) = 6 + \cancel{2\sqrt{5}} + 6 - \cancel{2\sqrt{5}} = 12$$

$$P = (6 + 2\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5}) = 36 - 20 = 16$$

معادله درجه دومی که جمع ریشه‌هایش S و ضربشان P باشد، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است، پس:

$$x^2 - 12x + 16 = 0$$

تالیفی علی شهبابی فراهانی
مدارس ریاضی و فیزیک مفید
مدارس علوم تجربی مفید

گزینه ۴

برای اینکه تابع دارای دو ریشه حقیقی منفی باشد، باید سه شرط زیر برقرار باشد:

$$(m - 6)x^2 - 2mx - 3 = 0$$

$$۱) \Delta > 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4(m - 6)(-3) > 0$$

$$4m^2 + 4(3m - 18) > 0$$

$$m^2 + 3m - 18 > 0 \Rightarrow (m + 6)(m - 3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > 3 \\ \text{یا} \\ m < -6 \end{cases}$$

$$۲) -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m}{m - 6} < 0 \Rightarrow 0 < m < 6$$

$$۳) \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m - 6} > 0 \Rightarrow m - 6 < 0 \Rightarrow m < 6$$

اشتراک جواب‌ها: $3 < m < 6$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۱

$$y = mx^2 + (m-2)x + n \xrightarrow{(\circ, 3)} m(\circ)^2 + (m-2)(\circ) + n = 3 \Rightarrow n = 3$$

همچنین دلتای معادله برخورد سهمی و خط $y = 2$ ، صفر است بنابراین:

$$mx^2 + (m-2)x + 3 = 2 \Rightarrow mx^2 + (m-2)x + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} (m-2)^2 - 4(m)(1) = 0 \Rightarrow m^2 - 8m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow m = 4 \pm \sqrt{12}$$

باتوجه به شرط $m > 0$ هر دو جواب قابل قبول است.

$$\Rightarrow m + n = 7 \pm \sqrt{12}$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۹

در سهمی $y = -x^2 + mx + n$ ، نقطه برخورد سهمی با محور y ها برابر n است. باتوجه به شکل $n = -4$ می باشد؛ بنابراین معادله به صورت زیر درمی آید:

$$y = -x^2 + mx - 4$$

چون سهمی بر محور x ها مماس است. پس $\Delta = 0$:

$$\Delta = m^2 - 4(-1)(-4) = 0 \Rightarrow m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m = \pm 4$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{-2} = \frac{m}{2}$$

باتوجه به شکل صورت سؤال $x_s > 0$:

$$\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m > 0 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow \text{قابل قبول} \Rightarrow m + n = 4 - 4 = 0$$

علوی علوم انسانی دهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

چون در صورت سؤال گفته شده بیشترین مقدار تابع صفر است، پس نمودار سهمی بر محور x ها مماس است و این یعنی ریشه مضاعف:

$$\Rightarrow \Delta = 0$$

$$\Delta = k^2 - 4(k - 3)(-1) = 0 \Rightarrow k^2 + 4k - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (k + 6)(k - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -6 \end{cases}$$

چون تابع دارای $\max$ است در نتیجه ضریب x^2 باید منفی باشد و دهانه سهمی روبه پایین: $k - 3 < 0 \Rightarrow k < 3$ از اشتراک $k < 3$ با جوابهای $k = 2$, $k = -6$ می توان فهمید که هر دو عدد به دست آمده درست هستند.

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۹

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 3 \\ P = \alpha \cdot \beta = -1 \end{cases}$$

$$\text{جدید } S_1 = x_1 + x_2 = (1 + \frac{2}{\alpha}) + (1 + \frac{2}{\beta}) = 2 + 2(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) = 2 + 2(\frac{S}{P})$$

$$S_1 = 2 + 2(\frac{3}{-1}) = 2 - 6 = -4$$

$$\text{جدید } P_1 = x_1 \cdot x_2 = (1 + \frac{2}{\alpha}) \cdot (1 + \frac{2}{\beta}) = 1 + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{4}{\alpha\beta} = 1 + 2(\frac{S}{P}) + \frac{4}{P}$$

$$P_1 = 1 + 2(\frac{3}{-1}) + \frac{4}{-1} = 1 - 6 - 4 = -9$$

$$\text{جدید معادله: } x^2 - S_1x + P_1 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 9 = 0$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۱

$$x + 3 = t \Rightarrow t^2 + 2\sqrt{3}t - 6 = 0$$

معادله را برحسب t حل می‌کنیم.

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-6) = 12 + 24 = 36$$

$$t = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 6}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-2\sqrt{3} - 6}{2} = -\sqrt{3} - 3 \\ t = \frac{-2\sqrt{3} + 6}{2} = -\sqrt{3} + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3 = t \Rightarrow x + 3 = -\sqrt{3} + 3 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3} \\ x + 3 = t \Rightarrow x + 3 = -\sqrt{3} - 3 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{3} - 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 > x_2$$

پس پاسخ برابر $-\sqrt{3}$ است.

جعبه ابزار: تغییر متغیر و تبدیل درجه ۴ به درجه ۲ با استفاده از Δ ، S و P ، محدود کردن معادله به حالت‌های مطلوب.

$$\text{حالت اول: } m = 3 \xrightarrow{\text{درجه ۲}} \lambda x^2 = 6$$

$$\text{حالت دوم: } m \neq 3 \xrightarrow{x^2=t} (m-3)t^2 - \lambda t + m + 3 = 0$$

حال برای این معادله نیز باید دو حالت در نظر بگیریم. حالت اول، حالتی است که دو ریشه دارد و چون می‌خواهیم در آخر معادله اصلی دو جواب داشته باشد، معادله بر حسب t باید دو جواب مختلف‌العلامه داشته باشد و حالت دوم، حالتی است که معادله یک ریشه مضاعف مثبت دارد. حالت اول، دو ریشه مختلف‌العلامت‌اند.

$$P < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m+3}{m-3} < 0 \Rightarrow -3 < m < 3$$

در این حالت نیازی به محاسبه Δ نیست چون خودبه‌خود مثبت است.
حالت دوم: ریشه مضاعف مثبت:

$$\left. \begin{aligned} \Delta = 0 &\Rightarrow \lambda^2 - 4(m-3)(m+3) = 0 \Rightarrow m = 5, m = -5 \\ \frac{-b}{2a} > 0 &\Rightarrow \frac{4}{m-3} > 0 \Rightarrow m > 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = 5$$

در نتیجه مجموعه قابل قبول m برابر است با:

$$M = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5\}$$

چالش سؤال: تغییر متغیر درست، در نظر گرفتن $m = 3$ ، دانستن شرایط ریشه مضاعف مثبت

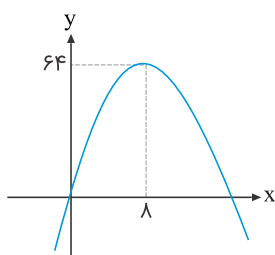
فرض می‌کنیم طول مستطیل برابر x و عرض آن برابر y باشد، معادله محیط مستطیل برابر است با:

$$2(x + y) = 32 \Rightarrow x + y = 16 \Rightarrow x = 16 - y$$

$$S = xy \xrightarrow{x=16-y} S = (16 - y)y = 16y - y^2$$

سهمی موردنظر را رسم می‌کنیم:

$$\text{رأس سهمی} \begin{cases} x' = -\frac{b}{2a} = \frac{-16}{-2 \times 1} = 8 \\ y' = 16 \times 8 - 8^2 = 64 \end{cases}$$



بیشترین مقدار مساحت برابر ۶۴ و عرض مستطیل برابر ۸ و بنابراین طول آن نیز برابر ۸ است.

$$\frac{x}{y} = \frac{8}{8} = 1$$

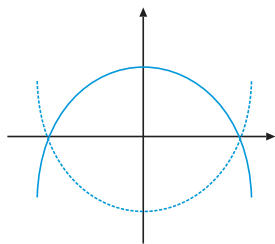
نکته: بیشترین مساحت برای مساحت مربع است!

$$mx^2 + ax - b = 0$$

می‌دانیم زمانی معادله درجه دوم دو ریشه معکوس یکدیگر دارد که حاصل ضرب دو ریشه برابر یک باشد.

$$\frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{-b}{m} = 1 \Rightarrow m = -b$$

جعبه ابزار: عبور از چهار ناحیه یعنی داشتن دو ریشه مثبت و منفی.



$$P = \frac{c}{a} = \frac{m^2 - 4}{1} < 0 \Rightarrow m^2 < 4$$

$$\Rightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow m = 1, -1, 0$$

چالش سؤال:

بهترین راه حل: $P = \frac{c}{a} < 0$

مدارس ریاضی و فیزیک البرز

مدارس علوم تجربی البرز

$$x^2 - mx + 7 = 2m \Rightarrow x^2 - mx + 7 - 2m = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -m \\ c = 7 - 2m \end{cases}$$

$$(S \text{ حاصل جمع دو ریشه}) = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{-(-m)}{1} = 3$$

$$\Rightarrow m = 3$$

معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$x^2 - 3x + 7 - 6 = 0$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب دو ریشه} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب دو ریشه} = 1$$

مدارس علوم انسانی البرز

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم باشد:

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \alpha \cdot \beta = 1 \Rightarrow \frac{k}{k^2} = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$x^2 + 5x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 4 = 21 > 0$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۹

معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشد:

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = m - 1 \\ c = -(m - 3) \end{cases}$$

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{-(m-1)}{-4} = 2 \Rightarrow m - 1 = 8 \Rightarrow m = 9$$

مجموع دو ریشه : $S = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{-(m-1)}{-4} = 2 \Rightarrow m - 1 = 8 \Rightarrow m = 9$

m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$-4x^2 + 8x - 6 = 0$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها : $P = \frac{c}{a} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

علوی علوم انسانی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۹

$$2x - 1 = t, \quad 5(2x - 1)^2 - 7(2x - 1) + 2 = 0 \Rightarrow 5t^2 - 7t + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta \text{ روش}} \Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(5)(2)$$

$$\Rightarrow \Delta = 9 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t = \frac{7 \pm 3}{10} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ 2x - 1 = \frac{2}{5} \Rightarrow 2x = \frac{7}{5} \Rightarrow x = \frac{7}{10} \end{cases}$$

در نتیجه $x = 1$ و $x = \frac{7}{10}$ جواب‌های معادله هستند.

علوی علوم انسانی دهم آزمون شماره ۱۴۰۱۷

در معادله درجه دوم مجموع دو ریشه برابر $-\frac{b}{a}$ می‌باشد.

$$-\frac{b}{a} = -\frac{3}{-2} \Rightarrow \frac{-n}{-2} = -\frac{3}{-2} \Rightarrow n = -3$$

$$-2x^2 - 3x + 5 = 0 \xrightarrow{\text{حل به روش کلی}} \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(-2)(5) = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_1 = \frac{3+7}{-4} = -\frac{5}{2} \quad x_2 = \frac{3-7}{-4} = 1$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = \left| -\frac{5}{2} - 1 \right| = \frac{7}{2}$$

* در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه‌های معادله با استفاده از روش کلی Δ عبارت‌اند از:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a}$$

علوی علوم انسانی دهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۱

$$\Delta > 0 : 36 - 4(2m-1)(m-2) > 0$$

$$9 - (2m^2 - 4m - m + 2) > 0$$

$$-2m^2 + 5m + 7 > 0$$

$$2m^2 - 5m - 7 < 0$$

m	$-\infty$	-1	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$2m^2 - 5m - 7$	+	○	-	+

$\frac{7}{2}$
 $-1 < m < \frac{7}{2}$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۲ ۱۴۰۱

چون α ریشه معادله است، پس:

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^3 = \alpha^2 + \alpha \xrightarrow{\alpha^2 = \alpha + 1} \alpha^3 = \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 1$$

$$A = \alpha^3 + 2\beta - 1 = 2\alpha + 1 + 2\beta - 1 = 2(\alpha + \beta) = 2(1) = 2$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۴۰۱

$$S = \frac{-b}{a} : \alpha + \beta = \frac{(\alpha + 1)}{1} \Rightarrow \beta = 1$$

$$P = \frac{c}{a} : \alpha \cdot \beta = \frac{-3\beta}{1} \Rightarrow \alpha = -3$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (-3)^3 - (1)^3 = -28$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱ ۲

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{1}{3}, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{عبارت} = \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = \alpha \beta (\alpha + \beta) = P \cdot S = \frac{1}{3} \times \frac{-1}{3} = \frac{-1}{9}$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱ ۳

روش اول:

$$x = 3 - \sqrt{13} \Rightarrow 3 - x = \sqrt{13}$$

به توان ۲ برسانید:

$$(3 - x)^2 = 13 \Rightarrow 9 - 6x + x^2 = 13 \Rightarrow x^2 - 6x - 4 = 0$$

روش دوم: اگر معادله درجه دوم ضرایبش گویا باشد وقتی $\alpha = 3 - \sqrt{13}$ ، ریشه دیگر $\beta = 3 + \sqrt{13}$ است، پس:

$$S = \alpha + \beta = 3 - \sqrt{13} + 3 + \sqrt{13} = 6$$

$$P = \alpha \cdot \beta = (3 - \sqrt{13})(3 + \sqrt{13}) = 9 - 13 = -4$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 4 = 0$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱ ۱

$$\alpha \cdot \beta = -3 \Rightarrow \beta = \frac{-3}{\alpha} \Rightarrow \beta^3 = \frac{-27}{\alpha^3}$$

$$\alpha^3 - \frac{27}{\alpha^3} = \alpha^3 + \left(\frac{-27}{\alpha^3}\right) = \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$$

$$\xrightarrow[P=-3]{S=1} (1)^3 - 3(1)(-3) = 10$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱ ۱

$$a_n = ar^{n-1}$$

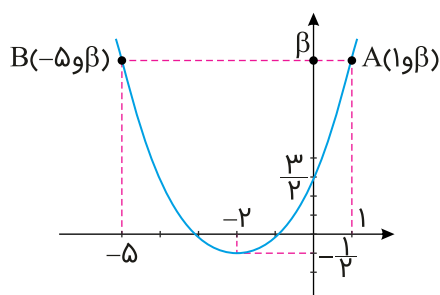
$$\frac{a_6}{a_7^3} + \frac{a_7}{a^7} = 7 \Rightarrow \frac{ar^6}{a^7 r^3} + \frac{ar}{a^7} = 7 \Rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^7 + \frac{r}{a} - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{r}{a} = 1 \\ \frac{r}{a} = -7 \end{cases}$$

$$\frac{a^7}{a_7} = \frac{a^7}{ar} = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{a}{r} = 1 \text{ یا } \frac{a}{r} = -7$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

نکته: معادله کلی سهمی به صورت $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ است که در آن (x_S, y_S) رأس سهمی است. باتوجه به اطلاعات صورت تست، شکل سهمی به صورت زیر است:

$$\text{طول رأس } x_S = \frac{-5 + 1}{2} = -2 \Rightarrow f(x) = a(x + 2)^2 - \frac{1}{2}$$



$$\left(0, \frac{3}{2}\right) \in f(x) \Rightarrow \frac{3}{2} = a(0 + 2)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$(1, \beta) \in f(x) \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}(1 + 2)^2 - \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow \beta = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

$$-mx^2 + mx + 1 = -m - x \Rightarrow mx^2 - (1 + m)x - m - 1 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (1 + m)^2 + 4m(m + 1) < 0 \Rightarrow (1 + m)(1 + 5m) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < m < -\frac{1}{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} \text{هیچ مقدار}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$\begin{cases} a_{\text{ف}} = x + 1 \\ a_{\text{د}} = x - 1 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\begin{cases} a_{\text{ص}} = 2x + 1 \\ a_{\text{ل}} = x \end{cases} \Rightarrow q = \frac{x}{2x+1}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x}{2x+1} \Rightarrow 2x^2 + x - 2x - 1 = x^2 + x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

$$x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow q_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

اما q های به دست آمده قابل قبول نیستند؛ زیرا $\frac{a_{\text{ل}}}{a_{\text{د}}} \neq q^3$ و $\frac{a_{\text{ص}}}{a_{\text{د}}} \neq q^2$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

$$\begin{cases} \alpha > -3 \\ \beta > -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3 > 0 \\ \beta + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha + 3)(\beta + 3) > 0$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9 > 0 \Rightarrow \frac{m}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 9 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} - \frac{3}{2} + \frac{18}{2} > 0 \Rightarrow m > 3 \quad (1)$$

شرط دو ریشه حقیقی داشتن:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 49 - 4m > 0 \Rightarrow m < \frac{49}{4} \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲):

$$m \in \left(3, \frac{49}{4}\right)$$

اعداد صحیح این بازه، $\{4, 5, 6\}$ خواهند بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{\beta}{25\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5}$$

α ریشهٔ معادله است و دو حالت رخ می‌دهد:

$$\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow 25 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{25} + \frac{4}{5} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -1 < \alpha \quad \times$$

$$\alpha = -\frac{1}{5} \Rightarrow 25 \times \frac{-1}{5} \times \frac{1}{25} - \frac{4}{5} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 1 > \alpha \quad \checkmark$$

بنابراین $\alpha = -\frac{1}{5}$ و $\beta = 1$ قابل قبول است.

$$y = -5x^2 + 4x + 1$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{5}, \quad y_S = -5\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{5}\right) + 1 = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

بنابراین S در ناحیهٔ اول قرار دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

تابع درجه دوم را به صورت $y = ax^2 + bx + c$ فرض کنیم. دقت شود نقاط داده شده دارای عرض‌های یکسان هستند پس طول رأس بین طول‌های آن‌هاست یعنی:

$$x_S = \frac{-1/5 + 3}{2} = \frac{1/5}{2} = \frac{3}{4}$$

از طرفی طول رأس $x_S = -\frac{b}{2a}$ است.

$$-\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$$

مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم برابر است با $-\frac{b}{a}$ بنابراین:

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{2 \times 3}{4} = \frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

$$\begin{cases} \alpha < \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha - \frac{9}{2} < 0 \Rightarrow 2\alpha - 9 < 0 \\ \beta < \frac{9}{2} \Rightarrow \beta - \frac{9}{2} < 0 \Rightarrow 2\beta - 9 < 0 \end{cases}$$

$$(2\alpha - 9)(2\beta - 9) > 0 \Rightarrow 4\alpha\beta - 18(\alpha + \beta) + 81 > 0$$

$$\Rightarrow 4(-m) - 18(\omega) + 81 > 0 \Rightarrow 4m < -9 \Rightarrow m < \frac{-9}{4} \quad (1)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 2\omega + 4m > 0 \Rightarrow 4m > -2\omega \Rightarrow m > \frac{-2\omega}{4} \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) : \frac{-2\omega}{4} < m < \frac{-9}{4} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-6, -5, -4, -3\}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

نسبت‌هایی که قدر نسبت می‌دهد را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{t_2}{t_1} &= \frac{t_\omega}{t_f} \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{2-x}{x-1} \\ \Rightarrow x^2 - x &= 2x - x^2 - x + 2 \\ \Rightarrow 2x^2 - 2x - 2 &= 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \\ \frac{t_f}{t_2} &= \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \\ \Rightarrow x^3 &= (x+1)(x^2-1) \Rightarrow x^3 = x^3 - x + x^2 - 1 \\ \Rightarrow x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین جواب‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ قابل قبول‌اند.
ریشه‌های این معادله را x_1 و x_2 فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \quad x_1 x_2 = -1 \\ q_1 + q_2 &= \frac{x_1}{x_1+1} + \frac{x_2}{x_2+1} = \frac{2x_1 x_2 + x_1 + x_2}{x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1} \\ &= \frac{2(-1) + 1}{-1 + 1 + 1} = -1 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta}{4a} &= \frac{\gamma}{\lambda} \Rightarrow -\frac{9-4a^2}{a} = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow -1\lambda + \lambda a^2 = \gamma a \\ \Rightarrow \lambda a^2 - \gamma a - 1\lambda &= 0 \Rightarrow a = \frac{\gamma \pm 2\omega}{16} \xrightarrow{a > 0} a = 2 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳