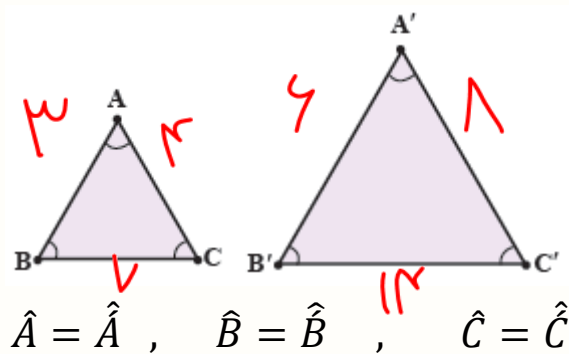


درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

تشابه دو مثلث: دو مثلث را متشابه گویند، هرگاه یکی بزرگ‌نمایی یا کوچک‌نمایی مثلث دیگر باشد، برای این منظور باید زوایای نظیر در آن‌ها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند.

$$K = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad K = 2$$



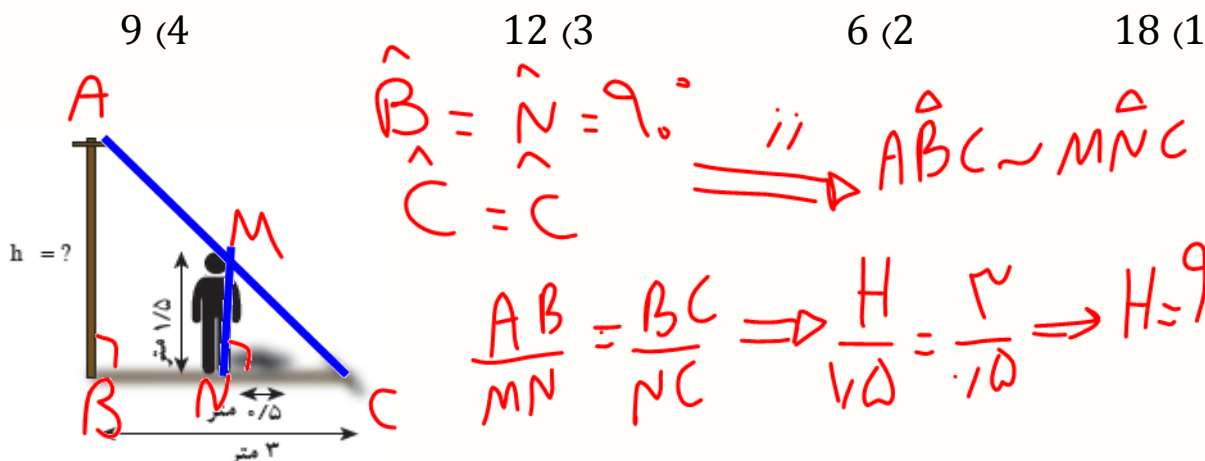
$ABC \sim A'B'C'$:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

نکته: هرگاه یکی از سه شرط زیر در دو مثلث مشاهده شد، آن دو مثلث متشابه هستند:

- (1) سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند.
- (2) دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند.
- (3) یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند.

مثال: علی می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایه‌ی آن 3 متر است، حساب کند. قد علی 1.5 متر و طول سایه‌ی او در همان لحظه 0.5 متر است. ارتفاع تیر برق را بیابید؟





نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه: (حتما فرمول‌های زیر را حفظ کنید)

سینوس

$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

وتر

کسینوس

$$\cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

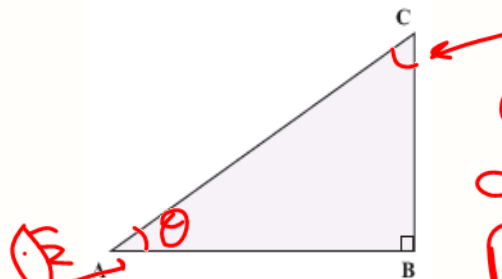
وتر

تانژانت

$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

کوتانژانت

$$\cot \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$



تثا
آنا
بثا
کما
دثا

tgθ

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}}{\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$$

$$\sin C = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos C = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan C = \frac{AB}{BC}$$

$$\cot C = \frac{BC}{AB}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC}$$

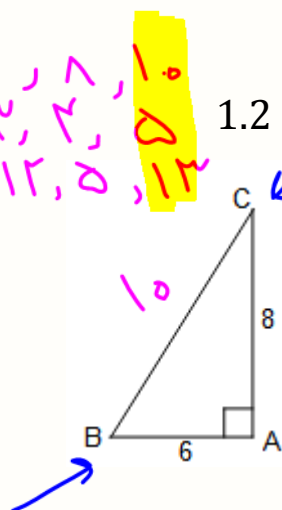
مثال: در شکل زیر، حاصل $\sin \hat{B} + \cos \hat{C}$ کدام است؟

1.6 (1) ✓

1.8 (2)

1.4 (3)

1.2 (4)



$$\begin{aligned} 6^2 + 8^2 &= BC^2 \\ 36 + 64 &= BC^2 \\ 100 &= BC^2 \\ 10 &= BC \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sin \hat{B} &= \frac{1}{10} \\ \cos \hat{C} &= \frac{1}{10} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$$





مثال: در مثلث قائم الزاویه مقابل، اگر $\tan \hat{A} = \frac{3}{4}$ و $AB = 12$ باشد، محیط مثلث کدام

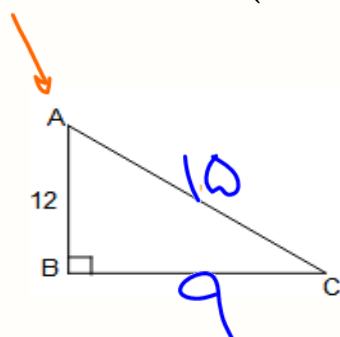
است؟

3, 4, 5
9, 12, 15
35 (4)

21 (3)

25 (2)

36 (1) ✓



$$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow BC = 9$$

$$\text{محیط: } 12 + 9 + 15 = 36$$

مثال: در مثلث قائم الزاویه ABC، زاویه A قائمه و $\tan \hat{C} = \frac{5}{12}$ است.

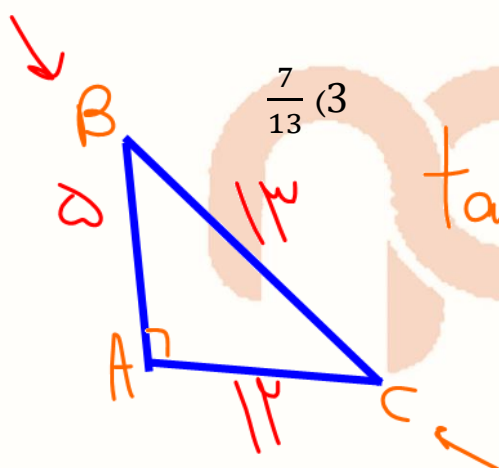
مقدار $\cos \hat{B} + \cos \hat{C}$ کدام است؟

$\frac{12}{13}$ (4)

$\frac{7}{13}$ (3)

$\frac{17}{13}$ (2)

$\frac{20}{13}$ (1)

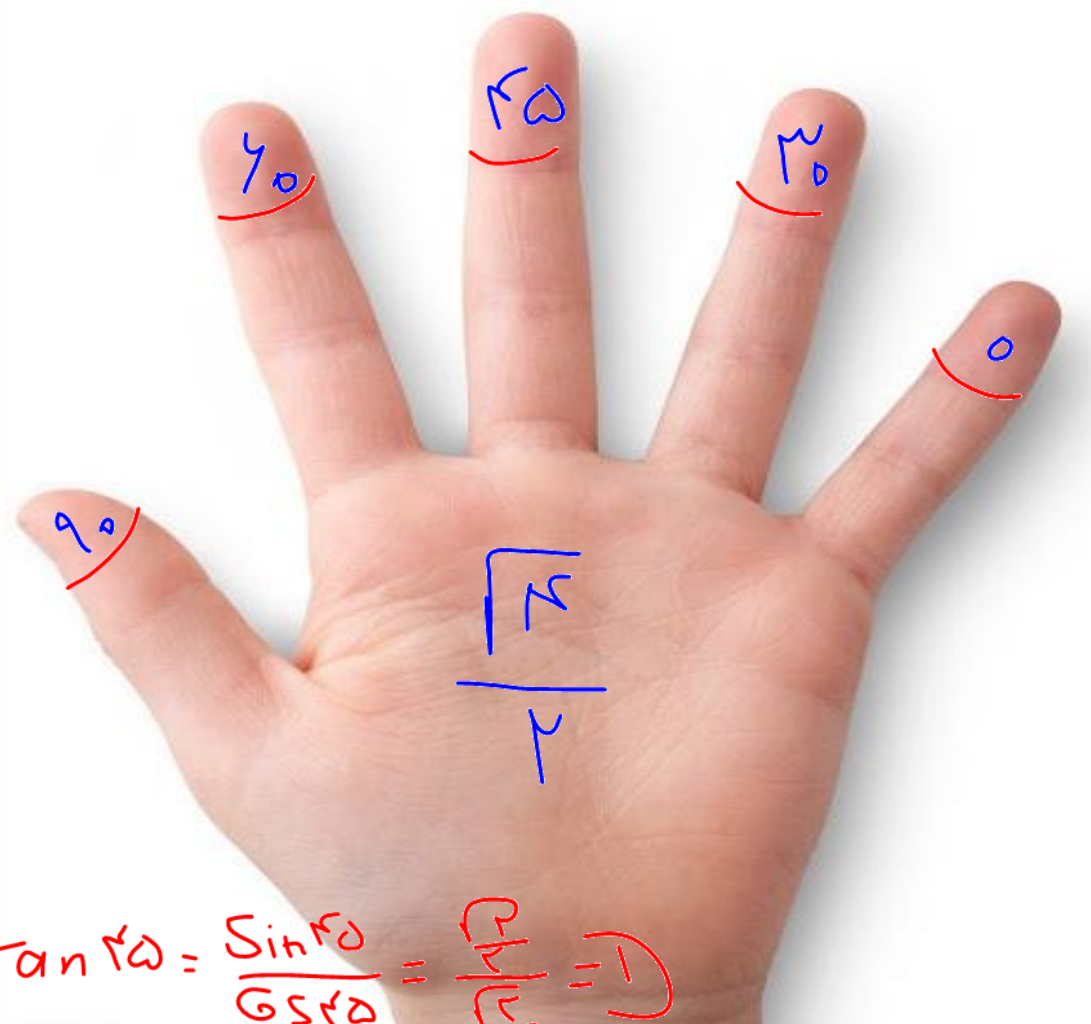


$$\tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های خاص:

	0	30	45	60	90	180	270	360
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot \theta$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده





$$\tan 45 = \frac{\sin 45}{\cos 45} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\sin 0 = \cos 90 = 0$$

$$\sin 30 = \cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 60 = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 90 = \cos 0 = 1$$

$$\tan 0 = \cot 90 = 0$$

$$\tan 30 = \cot 60 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 45 = \cot 45 = 1$$

$$\tan 60 = \cot 30 = \sqrt{3}$$

$$\tan 90 = \cot 0 = \infty$$

$$\sin 90 = \cos 0 = 1$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$4\cos 60 - \cot 45 + 2\sqrt{3} \tan 60$$

$$4\left(\frac{1}{2}\right) - 1 + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 - 1 + 2 = 3$$



ب) $8\sin 30 + \sin^2 45 - 4\sqrt{2} \cos 45$

$$8\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= \cancel{4} + \frac{1}{2} - \cancel{4} = \frac{1}{2}$$

پ) $5\cot 45 - 2\cos 60 + \sqrt{3} \tan 60$

$$5(1) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{3}(\sqrt{3}) = 5 - 1 + 3 = 7$$

ت) $4\sin^2 60 - 4\cos^2 60 - 6\tan 45$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6(1)$$
$$= \cancel{4}\left(\frac{3}{4}\right) - \cancel{4}\left(\frac{1}{4}\right) - 6 = 3 - 1 - 6 = -4$$

ث) $\cos^2 30 - 2\sqrt{3} \cot 30 + (\cot 60)^{-2}$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-2}$$
$$= \frac{3}{4} - 6 + 9 = \frac{3}{4} - \frac{24}{4} + \frac{36}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

ج) $(\cos 30 + \tan 30)(\sin 60 - \cot 60)$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9-4}{12} = \frac{5}{12}$$

د) $\frac{1}{\sin^2 45} - 2\cos^2 45 + 5\cot 45$

$$\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 5(1) = 2 - 1 + 5 = 6$$

ه) $\frac{\sqrt{3} \tan 30}{1 + \sqrt{3} \tan 60}$

$$= \frac{\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{4}$$





$$\text{خ) } \frac{\sqrt{3}(\cot 30^\circ - \tan 30^\circ)}{4 \sin^2 60^\circ + 5 \cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)}{4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 5 \left(\frac{1}{2} \right)} = \frac{2 - 1}{\frac{11}{2}} = \frac{2}{11}$$

مثال: مقدار عددی عبارت $(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ)$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (1) $\frac{1}{4}$ (2) ✓ $\frac{1}{2}$ (3) 0 (4)

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

مثال: حاصل $\frac{\sin 0^\circ + \sin 270^\circ - \cos 90^\circ}{\tan 180^\circ + \sin 90^\circ}$ برابر است با:

$\sin 180^\circ$ (1) $\cos 180^\circ$ (2) ✓ $\sin 90^\circ$ (3) $\tan 90^\circ$ (4)

مثال: حاصل عبارت $\frac{\tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} \times \frac{1 - \cot^2 60^\circ}{\cot^2 60^\circ + 1}$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) ✓ $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (3) ✓ $\frac{\sqrt{3}}{16}$ (4)

مثال: حاصل $1 + \cot^2 60^\circ$ کدام است؟

$1 + \tan^2 45^\circ$ (1) $1 + \tan^2 30^\circ$ (3) ✓ $2 + \tan^2 45^\circ$ (4) $1 - \tan^2 30^\circ$ (2)



مثال: حاصل عبارت $\cot 2^\circ \cdot \cot 3^\circ \cdot \cot 45^\circ \cdot \cot 87^\circ \cdot \cot 88^\circ$ کدام است؟

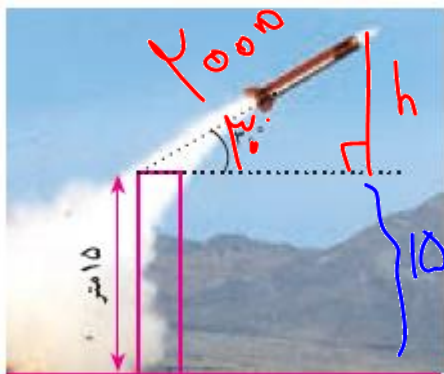
$(\cot 88^\circ)^2$ (4) $(\tan 88^\circ)^2$ (3) 2 (2) $(\tan 45^\circ)^2$ (1) ✓

$$\cancel{\tan 88^\circ} \times \cancel{\tan 87^\circ} \times \cancel{\cot 87^\circ} \times \cancel{\cot 88^\circ} = 1 \times 1 = 1$$

مثال: یک موشک در ارتفاع 15 متری از سطح زمین و با زاویه 30° پرتاب می‌شود. این

موشک پس از طی 2000 متر با همین زاویه، به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

$1000\sqrt{3} + 15$ (4) $1000(3)$ ✓ (3) $1000\sqrt{3}$ (2) 1015 (1) ✓



$$\sin 30^\circ = \frac{h}{2000}$$

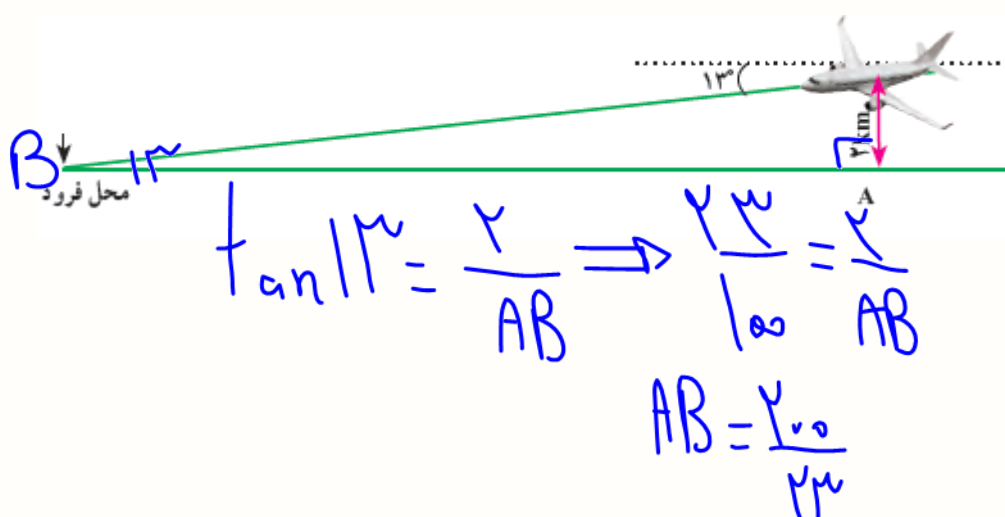
$$\frac{1}{2} = \frac{h}{2000} \rightarrow h = 1000$$

$$1000 + 15 = 1015$$

مثال: یک هواپیما در ارتفاع 2 km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه‌ی هواپیما

با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی A فرود می‌آید؟

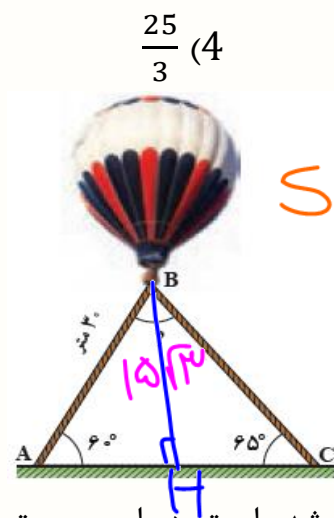
$$(\tan 13^\circ \approx 0.23)$$





مثال: یک بالن توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول طناب BC کدام است؟

$$(\sin 65^\circ \approx 0.9)$$



$$\frac{25}{3} \quad (4)$$

$$\frac{50}{3} \quad (3)$$

$$\frac{25\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{50\sqrt{3}}{3} \quad (1) \checkmark$$

$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{25}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{25} \Rightarrow BH = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow BH = 12.5\sqrt{3}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sin 65^\circ &= \frac{BH}{BC} \\ 0.9 &= \frac{12.5\sqrt{3}}{BC} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{9}{10} = \frac{12.5\sqrt{3}}{BC}$$

$$BC = \frac{12.5\sqrt{3} \cdot 10}{9} = \frac{125\sqrt{3}}{9}$$

مثال: یک آنتن (دکل) توسط دو سیم AB و AC مطابق شکل مهار شده است. در این صورت

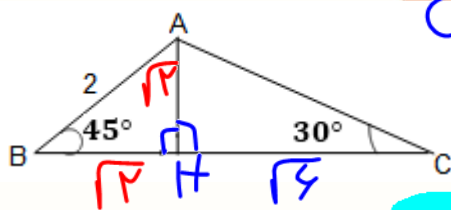
طول BC کدام است؟

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \quad (2)$$

$$\sqrt{6} + \sqrt{3} \quad (1)$$

$$\sqrt{8} \quad (4) \times$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{6} \quad (3) \checkmark$$



$$\sin 45^\circ = \frac{AH}{AB}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{AB} \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AH}{HC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{HC} \Rightarrow HC = 2\sqrt{3}$$

$$BH = 2$$

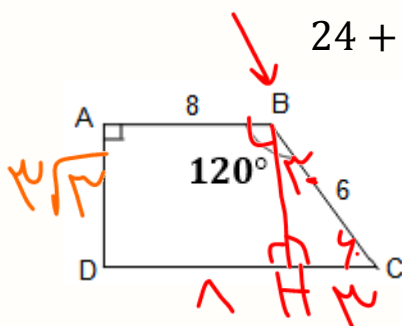
مثال: در شکل مقابل، محیط دوزنقه ABCD کدام است؟

$$25 + \sqrt{3} \quad (2)$$

$$25 + 3\sqrt{3} \quad (1)$$

$$24 + \sqrt{2} \quad (4)$$

$$24 + 4\sqrt{2} \quad (3)$$



$$\sin 120^\circ = \frac{HE}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{HE}{BC}$$

$$HE = 4$$

$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{BC}$$

$$BH = 4\sqrt{3}$$





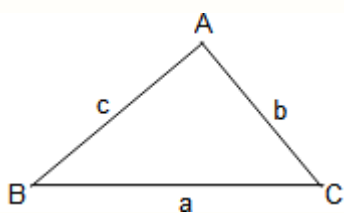
به دست آوردن مساحت در یک مثلث به کمک مثلثات:

در هر مثلث دلخواه داریم:

$$S = \frac{1}{2}absinC = \frac{1}{2}acsinB = \frac{1}{2}bcsinA$$

به عبارت دیگر:

$$S = \frac{1}{2} \left(\text{سینوس زاویه بین آن دو ضلع} \right) \times \left(\text{حاصل ضرب اندازه دو ضلع} \right)$$



مثال: مؤسسه‌ای غرفه‌ی فروش محصولات خود را در زمینی به شکل زیر برپا کرده است.

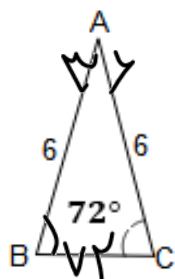
مساحت این زمین کدام است؟ ($\sin 36^\circ \approx 0.6$)

9.8 (4)

18 (3)

10.8 (2) ✓

8.01 (1)



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{4}{10} = \frac{108}{10} = 10.8$$

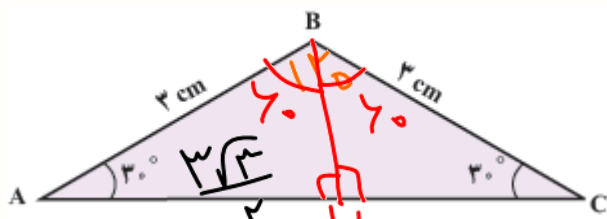
مثال: مساحت مثلث ABC کدام است؟

$\frac{9}{4}\sqrt{3}$ (4) ✓

$\frac{9}{4}$ (3)

$\frac{9}{8}\sqrt{3}$ (2)

$\frac{9}{8}$ (1)



$$S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

$$S = \frac{9\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{3} \Rightarrow AH = \frac{3}{2}$$

$$AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$





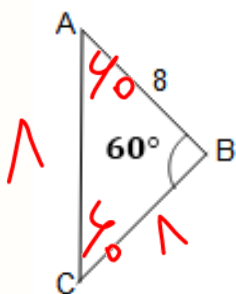
مثال: در شکل مقابل، مساحت مثلث $16\sqrt{3}$ و $AB = 8$ است. محیط مثلث کدام است؟

36 (4)

34 (3)

24 (2)

16 (1)



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$2 \times \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow BC = 1$$

$$\text{محیط: } 1 + 1 + 1 = 3$$

مثال: در شکل مقابل، اگر $AB = 2AC$ و مساحت مثلث $8\sqrt{3}$ باشد، طول ارتفاع وارد بر ضلع

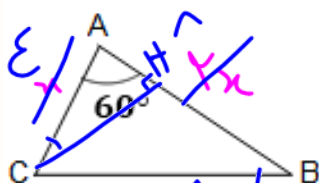
AB چقدر است؟

$4\sqrt{3}$ (4)

$3\sqrt{3}$ (3)

$2\sqrt{3}$ (2)

$\sqrt{3}$ (1)



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 2x \times x = x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{1} \Rightarrow x = 16 \Rightarrow x = 4$$



$$\sin 60^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CH}{x} \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

مثال: در متوازی الاضلاعی اندازه‌ی دو قطر 12 و 8 واحد و زاویه‌ی بین دو قطر 135° درجه

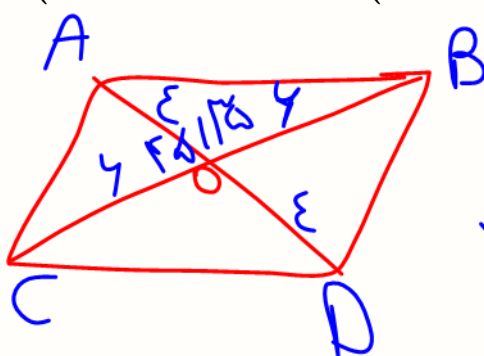
است. مساحت متوازی الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ ($\sin 135^\circ = \sin 45^\circ$)

32 (4)

36 (3)

24 (2)

18 (1)



$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times x \times y \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times x \times y \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} xy$$

$$S_{\text{دو}} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{4} xy = \sqrt{2} xy$$





مثال: در شکل زیر، اختلاف مساحت مثلث‌های ABC و ADE برابر 1.75 است. $\tan \hat{A}$ کدام

مقدار زیر است؟ (س.د.ت. 04 - نوبت اول)

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (3) $\sqrt{2}$ (4)

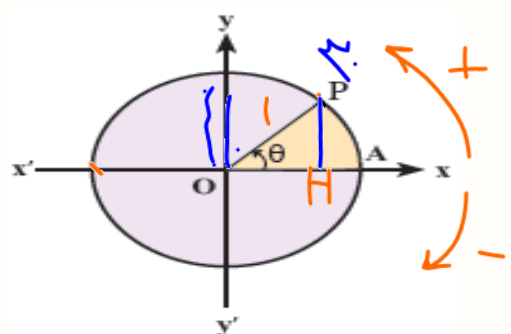
$S_{ABC} - S_{ADE} = \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{2}(5)(\sqrt{2})\sin A - \frac{1}{2}(2)(\sqrt{2})\sin A = \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sin A (\sqrt{2} - 2) = \frac{1}{4} \rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$
 $A = 30^\circ$

مثال: مساحت یک شش ضلعی منتظم به ضلع a کدام است؟

$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ (4) $\frac{3}{4}a^2$ (3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ (2) $\frac{3}{2}a^2$ (1)

$S = \frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$
 شش
 $S_{\text{دو}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \times 4 = \sqrt{3}a^2$
 تعریف دایره‌ی مثلثاتی:

دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد (شعاع 1) است. در این دایره، نقطه‌ی A مبدأ حرکت، برای رسم زاویه است، حال اگر نقطه‌ی P روی دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه‌ی AOP مثبت و وقتی نقطه M روی دایره، در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه AOM منفی است. (در شکل مقابل $\theta_1 > 0$ و $\theta_2 < 0$ است).



$\sin \theta = \frac{PH}{1} = y$
 $\cos \theta = \frac{OH}{1} = x$
 $\tan \theta = \frac{PH}{OH} = \frac{y}{x}$
 $\cot \theta = \frac{OH}{PH} = \frac{x}{y}$
 $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{x}$
 $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{y}$





$$P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta) \rightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

با توجه به این که $\cos\theta = 1$ است، داریم:

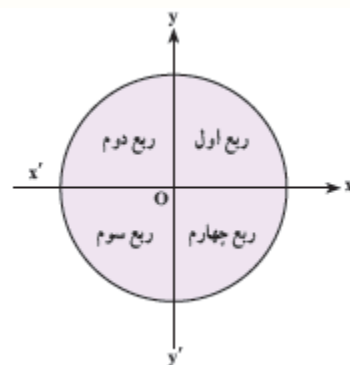
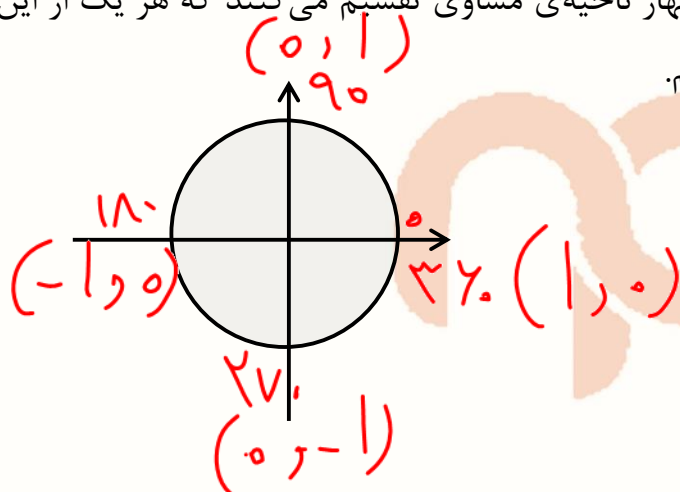
$$x^2 + y^2 = 1$$

از طرفی با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی در مثلث OPH داریم:

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y, \quad \cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

محورهای x و y دایره‌ی مثلثاتی را به چهار ناحیه‌ی مساوی تقسیم می‌کنند که هر یک از این قسمت‌ها را ناحیه یا ربع مثلثاتی می‌نامیم.



مثال: اگر $0 \leq x \leq 180$ و $\sin x = 1$ باشد، حاصل $\sin 3x + \sin x + \cos 2x + \cos x$ را

به دست آورید.

$$\sin 180 + \sin 90 + \cos 180 + \cos 90 =$$

$$-1 + 1 + (-1) + 0 = -1$$

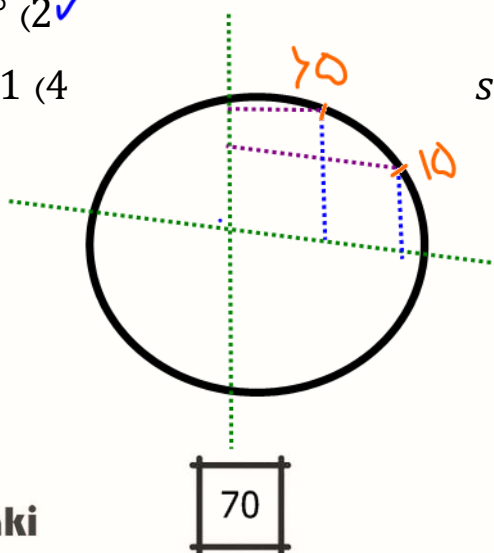
مثال: کدام یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای 15° و 65° برقرار است؟

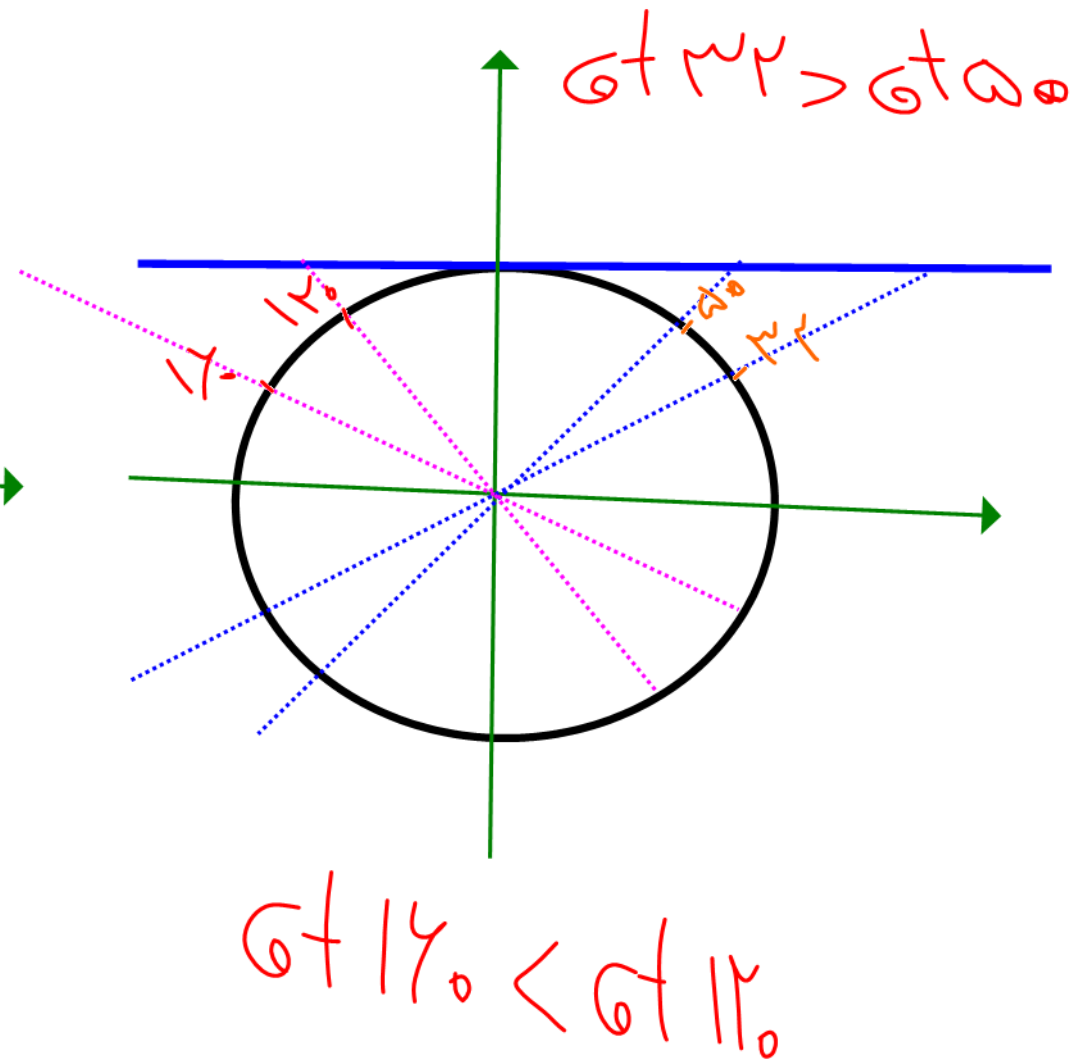
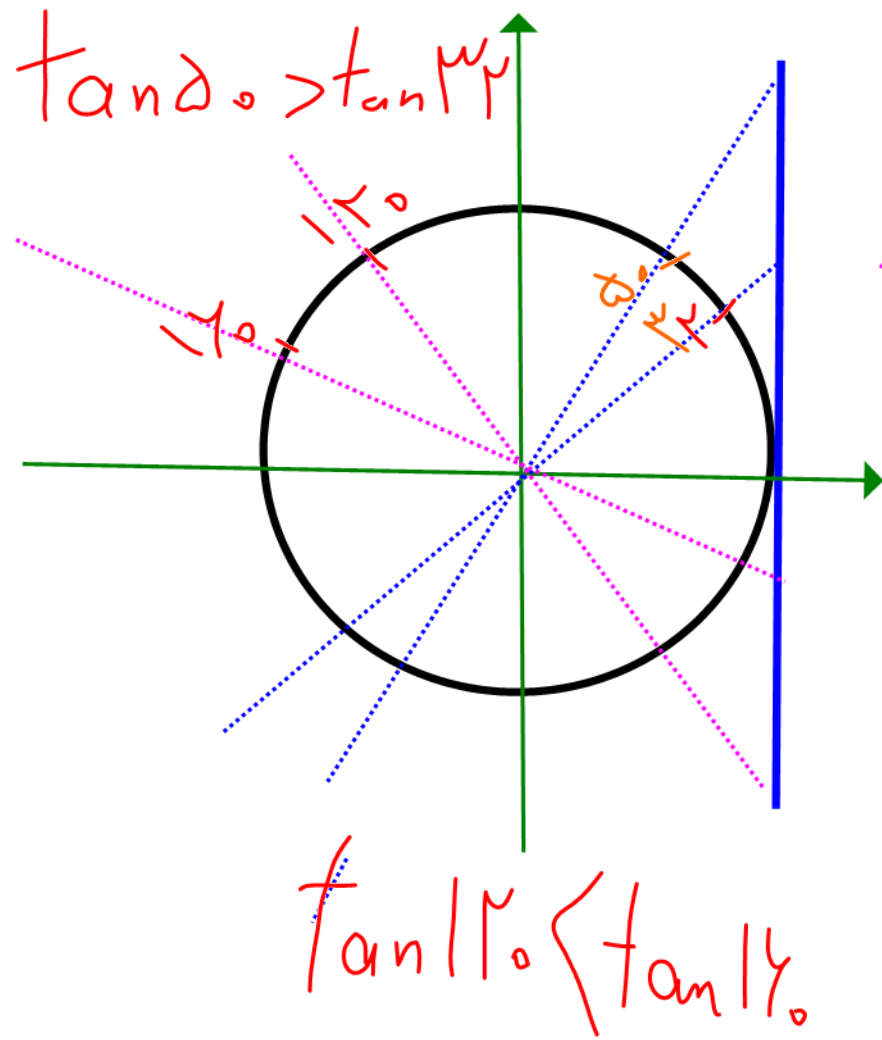
$$\cos 65^\circ < \cos 15^\circ \quad (2)$$

$$\cos 65^\circ \cos 15^\circ > 1 \quad (4)$$

$$\sin 65^\circ < \sin 15^\circ \quad (1)$$

$$\sin 65^\circ \sin 15^\circ > 1 \quad (3)$$







نکته: حدود سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت به صورت زیر است.

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-\infty < \tan x < +\infty$$

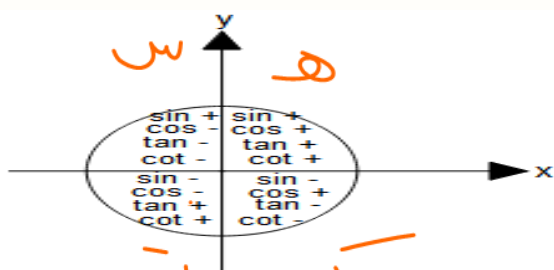
$$-\infty < \cot x < +\infty$$

توجه: زاویه‌های $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ و 360° زوایای مرزی هستند و آن‌ها را در هیچ

کدام از ناحیه‌های مثلثاتی در نظر نمی‌گیریم.

نکته: علامت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را در هر 4 ناحیه حتما مسلط

باشین.



مثال: نواحی هر یک از زوایای زیر را تعیین کنید.

105 (الف)

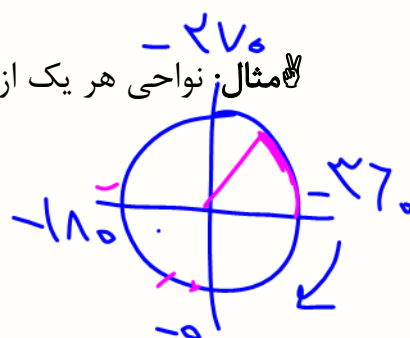
-87 (پ)

224 (ث)

-312 (ب)

-185 (ت)

97 (ج)



مثال: انتهای کمان روبه رو به کدام یک از زوایای زیر در ناحیه سوم قرار ندارد؟

269 (4)

-181 (3)

-91 (2)

-120 (1)

مثال: اگر $\tan x$ و $\cos x$ هم علامت باشند، انتهای کمان روبه رو به زاویه‌ی X در کدام ناحیه‌ی

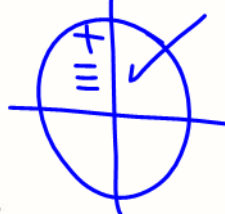
دایره‌ی مثلثاتی می‌تواند باشد؟

(4) دوم یا چهارم

(3) اول یا سوم

(2) اول یا دوم

(1) اول یا چهارم





مثال: اگر $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$ و $\cos \alpha \cdot \cot \alpha > 0$ باشد، آن گاه انتهای کمان α در کدام

ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

- (1) اول (2) دوم (3) سوم (4) چهارم



مثال: اگر $\tan \theta$ و $\sin \theta$ هم علامت باشند، آن گاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

- (1) اول یا سوم (2) دوم یا چهارم (3) اول یا چهارم (4) دوم یا سوم

مثال: در کدام زاویه ی زیر، مقدار سینوس منفی و کسینوس مثبت است؟

- (1) 225 (2) 135 (3) 62 (4) 273



مثال: اگر $\sin \theta \cos \theta < 0$ ، آن گاه θ در کدام ربع مثلثاتی می تواند باشد؟

- (1) اول یا سوم (2) دوم یا چهارم (3) دوم یا سوم (4) اول یا چهارم

مثال: اگر $\sin \theta > 0$ و $\sin \theta \cdot \tan \theta < 0$ ، آنگاه زاویه ی θ در کدام ربع دایره ی مثلثاتی

است؟

- (1) اول (2) دوم (3) سوم (4) چهارم



نحوه ی نوشتن معادله ی خط:

$$y = mx + h$$

الف) اگر دو نقطه ی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) داده باشند، ابتدا شیب را با استفاده از فرمول

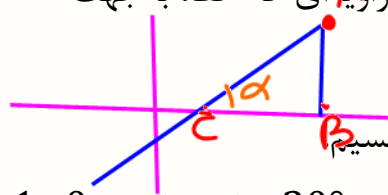
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

می یابیم سپس با فرمول $y - y_1 = m(x - x_1)$ معادله ی خط را می نویسیم.





ب) اگر زاویه داده باشند، ابتدا شیب را می‌یابیم، در واقع تانژانت زاویه‌ای که خط، با جهت مثبت محور x ‌ها بسازد، همان شیب خط است. ($m = \tan \alpha$)



سپس با فرمول $y - y_1 = m(x - x_1)$ معادله‌ی خط را می‌نویسیم

مثال: معادله‌ی خطی که زاویه‌ی آن با جهت مثبت محور x ‌ها 30° و از نقطه‌ی $(0, 1)$ می‌گذرد، کدام است؟

$$m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 0)$$

$$y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} \quad (2)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} \quad (4)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3) \checkmark$$

مثال: معادله خط L کدام است؟

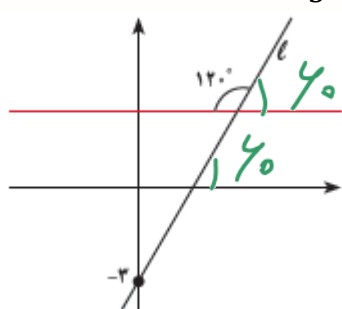


$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3 \quad (2)$$

$$y = \sqrt{3}x - 3 \quad (1) \checkmark$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3 \quad (4)$$

$$y = \sqrt{3}x + 3 \quad (3)$$

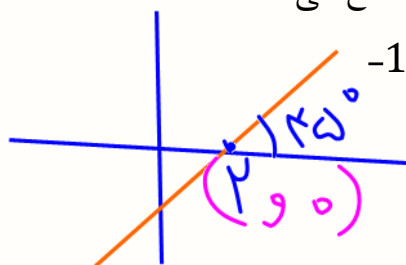


$$m = \tan 45^\circ = 1$$

$$y = x - 3$$

مثال: خط d ، محور x ‌ها را در نقطه‌ای به طول 2 با زاویه‌ی 45° قطع می‌کند و از ناحیه‌ی دوم

محورهای مختصات عبور نمی‌کند. این خط محور y ‌ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟



$$-1 \quad (4)$$

$$-4 \quad (3)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

$$m = \tan 45^\circ = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y = x - 2$$

مثال: خط $\sqrt{3}x - 3y = 1$ با جهت مثبت محور x ‌ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

$$90 \quad (4)$$

$$60 \quad (3)$$

$$30 \quad (2)$$

$$45 \quad (1)$$

$$m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

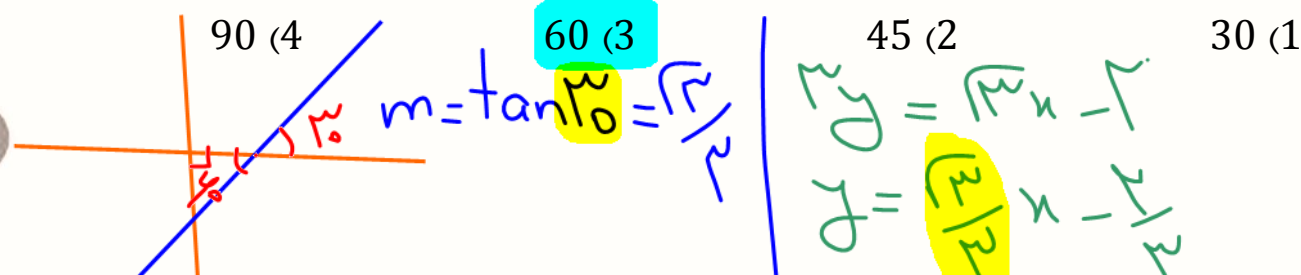
$$-\frac{\sqrt{3}}{3}y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$$





مثال: خط $3y - \sqrt{3}x + 2 = 0$ با محور y ها چه زاویه ای می سازد؟



مثال: خط گذرا از دو نقطه ای $A(\sqrt{3}, 1)$ و $B(0, 2m - 1)$ با جهت مثبت محور x ها زاویه ای

30 درجه می سازد، مقدار m کدام است؟ (آزمون گاج)

1 (1) $\frac{1}{3}$ 2 (2) $\frac{1}{2}$ 3 (3) 1 4 (4) -1

$\tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{2m-1-1}{0-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{2m-2}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow 2m-2 = -1 \rightarrow 2m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{2}$

مثال: خط $3mx + (2m - 1)y = 3$ با جهت مثبت محور x ها زاویه ای 45° می سازد.

طول از مبدأ این خط کدام است؟

5 (1) 3 (2) 5 (3) -3 (4)

$\tan 45 = 1$

$\frac{-\frac{1}{2}m}{\frac{1}{2}m-1} = 1 \rightarrow -\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m - 1 \rightarrow -m = m - 2 \rightarrow -2m = -2 \rightarrow m = 1$

$y = 0 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$

مثال: اگر خط $(a + 5)y - 2\sqrt{3}ax + 1 = 0$ با جهت مثبت محور x ها زاویه ای 60°

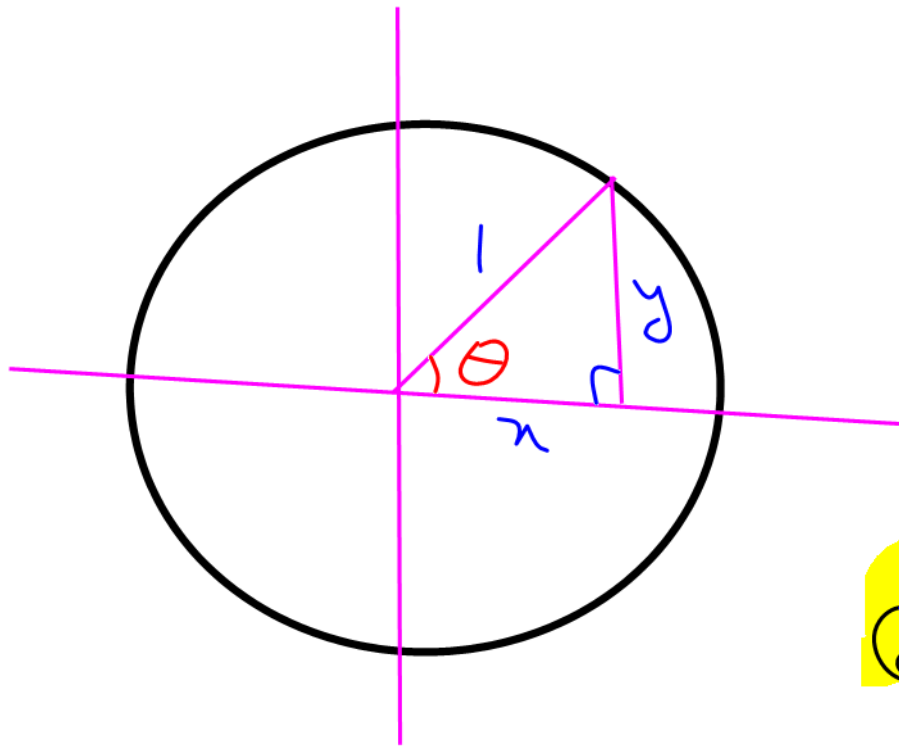
بسازد، a کدام است؟

2 (1) $5\sqrt{3}$ (2) $2\sqrt{3}$ (3) 2 (4)

$m = \tan 60 = \sqrt{3}$

$m = \frac{2\sqrt{3}a}{a+5} = \sqrt{3} \rightarrow 2\sqrt{3}a = \sqrt{3}(a+5) \rightarrow 2a = a+5 \rightarrow a = 5$





$$x = \cos \theta$$

$$y = \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{y}{x} = 1$$

$$\sin^2 \omega + \cos^2 \omega = 1$$

$$\sin^r \alpha + \cos^r \alpha = 1$$

$\div \sin^r \alpha$

$\div \cos^r \alpha$

$$1 + \cot^r \alpha = \frac{1}{\sin^r \alpha}$$

$$\frac{1}{1 + \cot^r \alpha} = \sin^r \alpha$$

$$\tan^r \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^r \alpha}$$

$$\frac{1}{1 + \tan^r \alpha} = \cos^r \alpha$$



درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$$

مثال: فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ، نسبت‌های دیگر

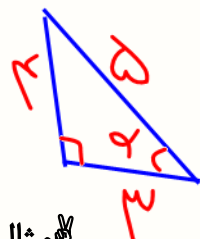
مثلثاتی زاویه‌ی α را به دست آورید.

$$\sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = +\frac{4}{5}$$



مثال: اگر $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ و α زاویه‌ای در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر

مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

$$\cos^2 \alpha + \frac{1}{10} = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{10} \rightarrow \cos \alpha = +\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = -\frac{1}{3}$$

$$\cot \alpha = -3$$



مثال: اگر $\cos \theta = \frac{1}{5}$ و انتهای کمان θ در ربع چهارم باشد، $\tan \theta$ کدام است؟

$$-2\sqrt{5} \quad (4)$$

$$-2\sqrt{6} \quad (3)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$2\sqrt{6} \quad (1)$$

$$\sin^2 \theta + \frac{1}{25} = 1 \rightarrow \sin^2 \theta = \frac{24}{25}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{24}}{5}}{\frac{1}{5}} = -\sqrt{24} = -2\sqrt{6}$$

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$





مثال: اگر $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ و انتهای کمان α در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد، $\cot \alpha$ کدام است؟

- (1) -3 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) 3

$$\sin^2 \alpha + \frac{10}{100} = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{90}{100}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{3}{10}} = -\frac{1}{3}$$

مثال: اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه $\tan 135^\circ$ کدام است؟

- (1) 1 (2) -1 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\cos 135^\circ + \frac{2}{2} = 1 \rightarrow \cos 135^\circ = -\frac{2}{2}$$

$$\tan 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{2}{2}} = -\frac{1}{2}$$

مثال: اگر $\tan \theta = \frac{1}{3}$ و انتهای کمان θ در ناحیه سوم باشد، مقدار $\sin \theta$ کدام است؟

- (1) $-\frac{10}{9}$ (2) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ (3) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (4) $\frac{1}{9}$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} = \frac{1}{1 + 9} = \frac{1}{10}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{-10}$$

مثال: اگر $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{25}$$





مثال: اگر $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$ و انتهای کمان α در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد، $\cos \alpha$ برابر کدام است؟

$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (1) $-\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (4)

$$\cos \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{9} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{9}$$

مثال: با فرض $\tan \theta = \frac{3}{4}$ ، حاصل $(\tan \theta - \cot \theta)^2 - \frac{1}{\cos^2 \theta}$ کدام است؟

$-\frac{11}{9}$ (1) $-\frac{12}{25}$ (2) $\frac{16}{25}$ (3) $\frac{16}{9}$ (4)

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

مثال: اگر $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

$$= \frac{49 - 120}{144} = \frac{-171}{144} = -\frac{11}{9}$$

(س.د.ت. 01)

$\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{2}$ (1) $\frac{1}{4}$ (4)

$$\sin^2 x + (1 - \sin^2 x) = \frac{4}{3}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{3}$$

مثال: درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) = \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{\cos \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta$$

ب) $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

$$(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$



$$پ) \frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\frac{1}{\cancel{\sin \theta}} \times \frac{\cancel{\sin \theta}}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$ت) \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \times \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cancel{\cos \theta} (1 - \sin \theta)}{\cancel{1 - \sin \theta} \cos \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$ث) \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$$

$$\frac{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$ج) 1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$$

$$1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 1 - 1 + \sin x = \sin x$$

$$ح) \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{\cos x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$ز) \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = 2 \sin x \cos x$$

$$\frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{1}$$





$$c) \frac{\sin x}{1 - \cos x} - \frac{\sin x}{\cos x + 1} = \frac{2}{\tan x}$$

$$\frac{\cancel{\sin x} + \sin x \cos x - \cancel{\sin x} + \sin x \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\cancel{\sin x} \cos x}{\cancel{\sin x}}$$

$$= 2 \cos x = \frac{2}{\tan x}$$

$$d) \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x}$$

$$e) (1 - \sin x)(1 + \sin x)(1 + \tan^2 x) = 1$$

$$(1 - \sin^2 x) \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) = \cos^2 x \times \frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

$$f) \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta \rightarrow \sin^4 \theta + \cos^4 \theta + 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 = 1$$

$$g) \sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$$

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x \sin x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$$





س) $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$

$$\frac{\cancel{1-\cos x} + 1 + \cos x + \cancel{1+\cos x}}{\sin x (1+\cos x)} = \frac{2 + \cancel{2\cos x}}{\sin x (1+\cos x)}$$

$$= \frac{2(1+\cos x)}{\sin x (1+\cos x)} = \frac{2}{\sin x}$$

ش) $\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{1+\sin x} = \tan x$

$$\frac{1+\sin x - \cos^2 x}{\cos x (1+\sin x)} = \frac{\sin^2 x + \sin x}{\cos x (1+\sin x)} = \frac{\sin x (\sin x + 1)}{\cos x (1+\sin x)}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

ص) $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{4\tan x}{\cos x}$

$$\frac{1+\sin x + 1-\sin x - (1-\sin x - 1+\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{4\sin x}{\cos x (1-\sin^2 x)}$$

$$= \frac{4\sin x}{\cos x (1-\sin^2 x)} = \frac{4\tan x}{\cos x}$$

مثال: ساده شده عبارت $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ برابر کدام است؟

$2\sin \alpha \cos \alpha$ (4)

2 (3)

1 (2)

صفر (1)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha = 4$$

مثال: ساده شده عبارت $(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta)$ کدام است؟

$1 - 2\sin^2 \theta$ (2)

$2\tan^2 \theta$ (1)

$1 - 2\cos^2 \theta$ (4)

$2\cot^2 \theta$ (3)

$$\cos^2 \theta (1 - \tan^2 \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - 2\sin^2 \theta$$





لا مثال: حاصل عبارت $\cos^2 \theta (1 + 2 \tan^2 \theta) + (\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$ کدام است؟

است؟

-1 (1)

1 (3) 2) صفر

$$\cos^2 \theta \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) + \cancel{\cos^2 \theta} - 1 = \cancel{\cos^2 \theta} + \sin^2 \theta - \cancel{\sin^2 \theta} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

لا مثال: حاصل $\left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) - 2 \tan^2 \theta$ کدام است؟

1 (3)

2) صفر

-1 (1)

$$\left(\frac{1 + \sin \theta + 1 - \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} \right) - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2(1 - \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta} = 2$$

لا مثال: حاصل عبارت تعریف شده $(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) + \tan^2 \alpha$

کدام است؟

1) صفر

2) 1

3) 2

4) 3

$$(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cancel{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}) \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1$$

لا مثال: ساده شده $(\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha)(1 + \cot^2 \alpha) + \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ در کدام گزینه آمده

است؟ (آزمون گزینه 2)

1) $2 \cos^2 \alpha$

2) $\frac{2}{\sin^2 \alpha}$

3) $2 \sin^2 \alpha$

4) 2

$$(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\cancel{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}) \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 2$$