



قبل از شروع فصل حتماً حفظ کنید:

$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	$4^0 = 1$	$5^0 = 1$	$6^0 = 1$	$7^0 = 1$	$8^0 = 1$	$9^0 = 1$
$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$	$5^1 = 5$	$6^1 = 6$	$7^1 = 7$	$8^1 = 8$	$9^1 = 9$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$	$7^3 = 343$	$8^3 = 512$	$9^3 = 729$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$				
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$						
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$						
$2^7 = 128$							
$2^8 = 256$							
$2^9 = 512$							
$2^{10} = 1024$							





درس اول : ریشه و توان

مروری بر گذشته:

$$\sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{lll} \sqrt{81} = 9 & , & \sqrt{16} = 4 & , & \sqrt{\sqrt{81}} = 3 \\ \sqrt{24} = 2\sqrt{6} & , & \sqrt{32} = 4\sqrt{2} & , & \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \\ \sqrt{48} = 4\sqrt{3} & , & \sqrt{54} = 3\sqrt{6} & , & \sqrt{60} = 2\sqrt{15} \\ \sqrt[3]{64} = 4 & , & \sqrt[3]{125} = 5 & , & \sqrt[3]{216} = 6 \\ \sqrt[3]{-27} = -3 & , & -\sqrt[3]{-125} = 5 & , & \sqrt[3]{-64} = -4 \\ 9^2 = 81 & , & -9^2 = -81 & , & -(-9)^2 = -81 \\ (3)^3 = 27 & , & (-3)^3 = -27 & , & -(-3)^3 = 27 \\ (4\sqrt{3})^2 = 48 & , & (2\sqrt{3})^2 = 12 & , & (5\sqrt{2})^2 = 50 \end{array}$$

ریشه‌های دوم یک عدد حقیقی: هرگاه $a^2 = b$ ، آن‌گاه دو عدد قرینه a و $-a$ را ریشه‌ی دوم عدد مثبت b می‌گویند. مثلاً: ریشه‌های دوم $25 \leftarrow \sqrt{25} = 5$ و $-\sqrt{25} = -5$

$$\begin{array}{l} (?)^2 = -16 \\ (\pm 4)^2 = 16 \end{array}$$

توجه: اعداد منفی ریشه‌ی دوم ندارند.

ریشه‌ی سوم یک عدد حقیقی:

هرگاه $a^3 = b$ ، آن‌گاه عدد a را ریشه‌ی سوم عدد حقیقی b می‌گویند. مثلاً:

$$\text{ریشه‌ی سوم } -64 \leftarrow -\sqrt[3]{64} = -4$$

$$\text{ریشه‌ی سوم } 64 \leftarrow \sqrt[3]{64} = 4$$

توجه: هر عدد حقیقی مثبت، منفی یا صفر دارای ریشه‌ی سوم است.

نتیجه:

* هر عدد حقیقی فقط یک ریشه‌ی سوم دارد که با خود عدد، هم علامت است.

* اعداد مثبت دو تا ریشه‌ی دوم قرینه دارند.

* اعداد منفی ریشه‌ی دوم ندارند.





مثال: هر کدام از اعداد حقیقی $\sqrt{41}$ ، $\sqrt{10}$ ، $\sqrt[3]{-17}$ ، $\sqrt[3]{20}$ و $\sqrt[3]{111}$ بین کدام دو عدد

صحيح متوالی هستند؟

$$\begin{array}{l} \sqrt[2]{36} < \sqrt[2]{41} < \sqrt[2]{49} \\ \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{10} < \sqrt[3]{17} \\ \sqrt[4]{-17} < \sqrt[4]{-10} < \sqrt[4]{-8} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{27} \\ \sqrt[4]{64} < \sqrt[4]{111} < \sqrt[4]{125} \end{array} \right.$$

مثال: چند عدد صحيح x وجود دارد به طوری که $-2 \leq \sqrt{x} \leq 7$ باشد؟

51 (4)

50 (3)

49 (2)

48 (1)

$$-14 \leq \sqrt{x} \leq 49$$

$$x = \{0, 1, 2, \dots, 49\}$$

مثال: اگر $4 < \sqrt{x} < 5$ و $9 < \sqrt[3]{y} < 10$ باشد، $x + y$ کدام عدد زیر نمی تواند باشد؟

918 (4)

1024 (3)

819 (2)

830 (1)

$$x = \{17, \dots, 24\}$$

$$y = \{730, \dots, 999\}$$

$$\text{(min)} \quad x + y = 747 \quad | \quad \text{max: } x + y = 1023$$

مثال: ریشه‌ی سوم عدد (0.008) چقدر از ریشه‌ی سوم عدد (-0.125) بیش تر است؟

0.03 (4)

0.07 (3)

0.3 (2)

0.7 (1)

$$\sqrt[3]{\frac{8}{1000}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{10}\right)^3} = \frac{2}{10}$$

$$\sqrt[3]{\frac{-125}{1000}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{5}{10}\right)^3} = -\frac{5}{10}$$

$$\frac{2}{10} - \left(-\frac{5}{10}\right) = \frac{7}{10}$$





مثال: ریشه‌ی سوم عددی از ریشه‌ی پنجم عدد -243 ، 7 واحد بیش‌تر است. آن عدد کدام است؟

216 (4)

125 (3)

64 (2)

27 (1)

$$\sqrt[5]{-243} = -3 \rightarrow \sqrt[3]{x - (-3)} = 4 \rightarrow \sqrt[3]{x + 3} = 4 \rightarrow x + 3 = 64 \rightarrow x = 61$$

ریشه‌های چهارم و پنجم: مانند ریشه‌های دوم و سوم، ببینید:

ریشه‌های چهارم 16 $\leftarrow \sqrt[4]{16} = 2$ و $\sqrt[4]{16} = -2$

ریشه‌ی پنجم $-243 \leftarrow \sqrt[5]{-243} = -3$

ریشه‌ی پنجم $243 \leftarrow \sqrt[5]{243} = 3$

$$(?)^4 = -64$$

نتیجه:

اعداد مثبت دو ریشه زوج قرینه دارند.

اعداد منفی ریشه زوج ندارند.

هر عدد حقیقی (مثبت، منفی یا صفر) فقط یک ریشه‌ی فرد دارد که با خود عدد هم علامت است.

مثال: هر یک از عددهای زیر را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) ریشه‌های چهارم 81

ب) ریشه‌ی سوم $-\frac{1}{27}$

پ) ریشه‌ی هفتم 1

ت) ریشه‌های ششم 64

ث) ریشه‌ی پنجم -1

ج) ریشه‌های دوم -7

چ) ریشه‌ی نهم صفر

ح) ریشه‌های چهارم 10000

$$(0)^9 = 0$$

$$(0)^8 = 0$$

ندارد

صفر





مثال: در هر یک از نامساوی‌های زیر، به جای x چه اعداد طبیعی را می‌توان قرار داد؟

الف) $9 < \sqrt{x} < 10$ ب) $2 < \sqrt[3]{x} < 3$ پ) $4 < \sqrt[4]{x} < 5$

Handwritten solutions for the inequalities above:

- For (الف): $81 < x < 100 \Rightarrow x = \{82, \dots, 99\}$
- For (ب): $8 < x < 27 \Rightarrow x = \{9, \dots, 26\}$
- For (پ): $256 < x < 625 \Rightarrow x = \{257, \dots, 624\}$

مثال: اگر $2 < \sqrt[5]{x} < 3$ به جای x چند عدد طبیعی می‌توان قرار داد؟

1) 210 2) 211 3) 212 4) 213

Handwritten solution for the inequality $2 < \sqrt[5]{x} < 3$:

$$32 < x < 243 \Rightarrow x = \{33, \dots, 242\}$$

Count: $n = 242 - 32 + 1 = 210$

مثال: کدام یک از اعداد زیر، ریشه‌های چهارم عدد 625 است؟

1) ± 25 2) ± 5 3) -5 4) 5

Handwritten diagram showing the fourth roots of 625:

$$625 \begin{cases} \xrightarrow{+5} \\ \xrightarrow{-5} \end{cases}$$

مثال: مکعب ریشه‌ی هفتم عدد -128 کدام است؟

1) -27 2) -8 3) 8 4) 27

Handwritten solution for the seventh root of -128 :

$$\sqrt[7]{(-128)} = \sqrt[7]{(-2)^7} = -2 \rightarrow (-2)^3 = -8$$

نکته: ☺

$a > 1$	$a < a^2 < a^3 < a^4 < a^5$	$a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \sqrt[5]{a}$
$0 < a < 1$	$a > a^2 > a^3 > a^4 > a^5$	$a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a}$
$-1 < a < 0$	$a < a^3 < a^5$ $a^2 > a^4$	$a > \sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a}$
$a < -1$	$a > a^3 > a^5$ $a^2 < a^4$	$a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a}$

توجه: تقریباً رفتار در بازه‌های $a > 1$ و $-1 < a < 0$ شبیه هم و در بازه‌های

$0 < a < 1$ و $a < -1$ نیز، شبیه هم است.





مثال: در جاهای خالی یکی از علامت‌های ($<$, $=$, $>$) را قرار دهید.

الف) $(-0.1)^3 \square (-0.1)^7$ ب) $(-0.2)^3 \square (-0.2)^4$

ت) $(\sqrt[4]{2})^0 \square \sqrt[10]{1}$

پ) $\sqrt[3]{-0.001} \square -0.1$
 $\sqrt[3]{-\frac{1}{1000}} = -\frac{1}{10}$

ج) $\sqrt[3]{-0.1} \square \sqrt[5]{-0.1}$

ث) $\sqrt[5]{0.7} \square \sqrt[7]{0.7}$
 $(\frac{1}{2})^5 > (\frac{1}{2})^7$

ح) $\sqrt[5]{-10} \square \sqrt[7]{-10}$

چ) $\sqrt[3]{10} \square \sqrt[5]{10}$

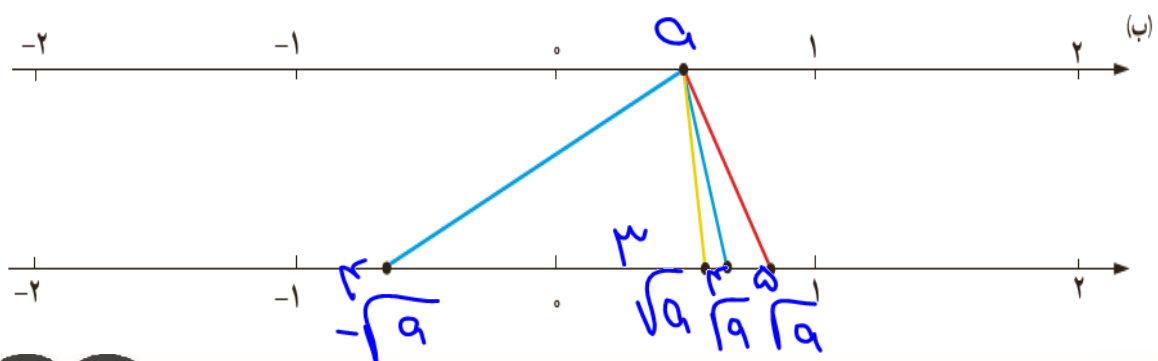
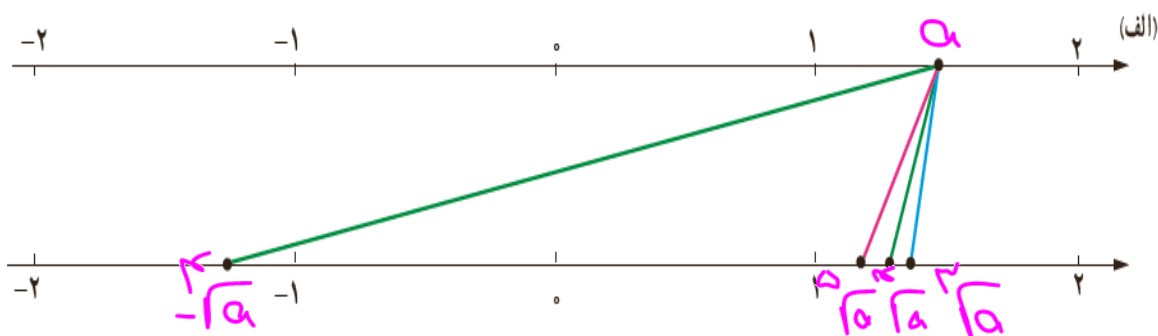
د) $\sqrt[9]{-0.2} \square \sqrt[7]{-0.2}$

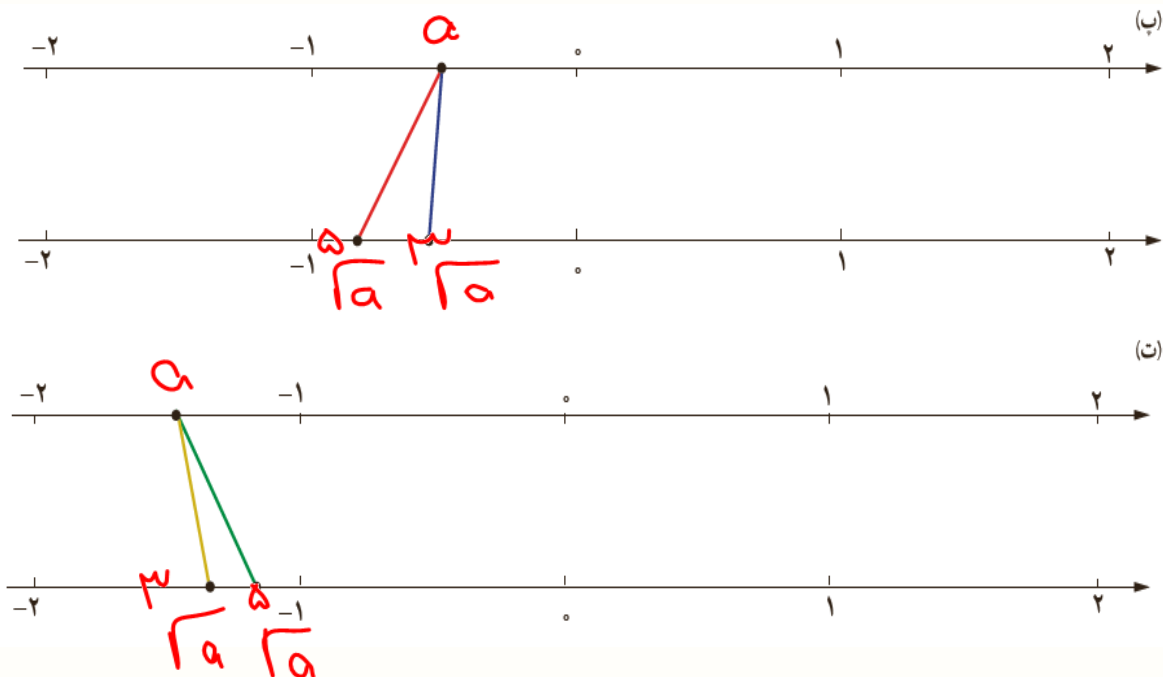
خ) $\sqrt[7]{2} \square \sqrt[5]{2}$

ز) $\sqrt[11]{-5} \square \sqrt[9]{-5}$
 $(-2)^5 > (-2)^8$

ذ) $\sqrt[11]{3.5} \square \sqrt[7]{3.5}$

مثال: در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر خط مربوط به کدام ریشه است.





درس دوم: ریشه‌ی n ام

اگر a و b دو عدد حقیقی و n عددی طبیعی و $a^n = b$ ، آن گاه a را ریشه n ام b می‌گوییم.
(1) اگر n عددی فرد باشد، b فقط یک ریشه‌ی n ام دارد که برابر $\sqrt[n]{a}$ است.

(2) اگر n عددی زوج باشد، b دو ریشه‌ی n ام قرینه به صورت $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ دارد.

ریشه‌ی پنجم $32 \leftarrow 5\sqrt[5]{32} = 2$

ریشه‌ی هفتم $-2187 \leftarrow 7\sqrt[7]{-2187} = -3$

ریشه‌های دهم $1024 \leftarrow 10\sqrt[10]{1024} = 2$ ، $-10\sqrt[10]{1024} = -2$

ریشه‌های هشتم $1023 \leftarrow 8\sqrt[8]{1023}$ ، $-8\sqrt[8]{1023}$

ریشه‌ی یازدهم $1023 \leftarrow 11\sqrt[11]{1023}$

ریشه‌های هشتم $-64 \leftarrow$ وجود ندارد





مثال: جدول زیر را کامل کنید.

عدد	ریشه‌های دوم	ریشه‌ی سوم	ریشه‌های چهارم	ریشه‌ی پنجم	ریشه‌های ششم	ریشه‌ی هفتم
-81	ندارد	$\sqrt[3]{-81}$	ندارد	$\sqrt[5]{-81}$	ندارد	$\sqrt[7]{-81}$
125	$\pm\sqrt{125}$	۵	$\pm\sqrt[4]{125}$	$\sqrt[5]{125}$	$\pm\sqrt[6]{125}$	$\sqrt[7]{125}$
-16	ندارد	$\sqrt[3]{-16}$	ندارد	$\sqrt[5]{-16}$	ندارد	$\sqrt[7]{-16}$
64	± 8	۴	$\pm\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[5]{64}$	± 2	$\sqrt[7]{64}$
32	$\pm\sqrt[3]{32}$	$\sqrt[3]{32}$	$\pm\sqrt[4]{32}$	$\sqrt[5]{32}$	$\pm\sqrt[6]{32}$	$\sqrt[7]{32}$
-25	ندارد	$\sqrt[3]{-25}$	ندارد	$\sqrt[5]{-25}$	ندارد	$\sqrt[7]{-25}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5 \quad \sqrt[7]{128} = 2 \quad \sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{(\pm 2)^8} = |\pm 2| = 2$$

$$\sqrt[9]{-1} = -1 \quad -\sqrt[3]{-27} = +3 \quad \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{(\pm 2)^4} = |\pm 2| = 2$$

$$\sqrt[7]{-128} = \sqrt[7]{(-2)^7} = -2 \quad \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6 \quad \sqrt[3]{-343} = \sqrt[3]{(-7)^3} = -7$$

$$\sqrt[5]{-243} = \sqrt[5]{(-3)^5} = -3 \quad \sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{(\pm 5)^4} = 5 \quad \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{(\pm 3)^4} = 3$$

$$\sqrt[3]{-0.001} = \sqrt[3]{(-\frac{1}{10})^3} = -\frac{1}{10} \quad \sqrt[4]{0.0016} = \sqrt[4]{(\frac{2}{125})^4} = \frac{2}{125} \quad \sqrt[3]{-0.027} = \sqrt[3]{(-\frac{3}{100})^3} = -\frac{3}{100}$$

$$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \sqrt[5]{(-\frac{1}{2})^5} = -\frac{1}{2} \quad \sqrt[3]{\frac{-162}{6}} = \sqrt[3]{-\frac{27}{1}} = -3 \quad \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \sqrt[6]{(\frac{1}{2})^6} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[5]{\frac{2}{486}} = \sqrt[5]{(\frac{1}{243})^5} = \frac{1}{243} \quad \sqrt[3]{\frac{-144}{18}} = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \sqrt[3]{\frac{-2}{54}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$$





ساده کردن رادیکال‌ها:

$$1) \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \Rightarrow \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{6}$$

$$2) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \Rightarrow \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$$

$$3) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \Rightarrow (\sqrt[6]{2})^5 = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$$

$$4) \sqrt[k]{a^k} = a \xrightarrow{k \text{ فرد باشد}} \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$5) \sqrt[k]{a^k} = |a| \xrightarrow{k \text{ زوج باشد}} \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{(\pm 2)^4} = |\pm 2| = 2$$

$$6) \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \Rightarrow \sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$$

نکته: پیرو مورد 6، اگر عددی بین دو تا رادیکال وجود داشت باید اون عدد رو ببریم زیر رادیکال، به مثال زیر دقت کنید.

$$\sqrt[5]{2^3 \sqrt[3]{2}} = \sqrt[5]{2^3 \sqrt[3]{2^3} \times 2} = \sqrt[15]{2^4}$$

مثال: عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\text{الف) } \sqrt[7]{3^4 \sqrt[3]{3}} = \sqrt[7]{3^4 \sqrt[3]{3^3} \times 3} = \sqrt[21]{3^5}$$

$$\text{ب) } \sqrt[3]{2^5 \sqrt[4]{4}} = \sqrt[3]{2^5 \sqrt[4]{2^2} \times 2^2} = \sqrt[12]{2^7}$$

$$\text{پ) } \sqrt[8]{9^5 \sqrt[3]{3}} = \sqrt[8]{9^5 \sqrt[3]{3^3} \times 3} = \sqrt[24]{3^{11}}$$

مثال: اگر $x < 1$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt[5]{(1-x)^5} + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(-3)^2}$ کدام است؟

3 (4

$2x - 5$ (3

$-2x + 5$ (2

-3 (1

$$1 - x + |x - 1| + |-3| = 1 - x - x + 1 + 3 = -2x + 5$$





مثال: چه تعداد از عبارت‌های زیر نادرست هستند؟

الف) $\sqrt[3]{0.027} = \sqrt[4]{0.0081}$ ص

ب) $(\sqrt[4]{-2})^4 = \sqrt[4]{(-2)^4}$ ع

پ) $\sqrt[4]{(-5)^4} = -5$ ع

ت) $\sqrt[3]{-3} \times \sqrt[3]{-9} \times \sqrt[4]{(-3)^4} = 9$ ص

1 (1)

2 (2)



مثال: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\sqrt[3]{9 + \sqrt{17}} \times \sqrt[3]{9 - \sqrt{17}} = \sqrt[3]{81 - 17} = \sqrt[3]{64} = 4$$

درس سوم: توان‌های گویا

ارتباط بین توان و رادیکال:

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$5^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{5} \quad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

توجه: اگر $a < 0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف نمی‌شود. بنابراین عبارت‌هایی مانند $(-1)^{\frac{1}{3}}$ ، $(-2)^{\frac{2}{4}}$ ،

$(-6)^{\frac{1}{7}}$ تعریف نمی‌شوند.

مثال: کدام مورد زیر نادرست است؟

1) $\sqrt[5]{-32} = -2$ ص

3) $\sqrt[4]{(-3)^4} = 3$ ص

2) $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$ ع

4) $32^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$ ص

$$(25)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$





مثال: اعداد توان دار زیر را به صورت رادیکالی بنویسید.

$$\begin{aligned} 3^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{3} \\ 5^{\frac{1}{7}} &= \sqrt[7]{5} \\ 17^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{17} \\ 4^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{4} \\ a^{\frac{1}{6}} &= \sqrt[6]{a} \\ 32^{\frac{1}{5}} &= \sqrt[5]{32} \end{aligned}$$

نکته: هرگاه $a > 0$ باشد، برای هر دو عدد طبیعی m و n ، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال: اعداد توان دار زیر را به صورت رادیکالی بنویسید.

$$\begin{aligned} 3^{\frac{5}{2}} &= \sqrt[2]{3^5} \\ 12^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{12^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5^{\frac{6}{7}} &= \sqrt[7]{5^6} \\ b^{\frac{5}{6}} &= \sqrt[6]{b^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3)^{\frac{5}{12}} &= \sqrt[12]{3^5} \\ 64^{\frac{2}{5}} &= \sqrt[5]{64^2} \end{aligned}$$

قوانین توان ها:

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n} \Rightarrow$$

$$2^3 \times 2^5 = 2^8$$

$$2) a^m b^m = (ab)^m \Rightarrow$$

$$2^3 \times 5^3 = 10^3$$

$$3) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \Rightarrow$$

$$\frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4} = 2^3$$

$$4) \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \Rightarrow$$

$$\frac{2^7}{3^7} = \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

$$5) (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \Rightarrow$$

$$(5^3)^2 = (5^2)^3 = 5^6$$

$$6) (ab)^m = a^m \cdot b^m \Rightarrow$$

$$(6)^4 = (2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$$

$$7) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$$





مثال: هر یک از رادیکال‌ها را در صورت امکان به صورت توان کسری بنویسید.

الف) $\sqrt[2]{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$ ب) $\sqrt[5]{7^3} = 7^{\frac{3}{5}}$ پ) $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$

ت) $\sqrt[6]{32} = \sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{5}{6}}$ ث) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{(\frac{1}{2})^3} = (\frac{1}{2})^{\frac{3}{4}}$ ج) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3]{5^{\frac{1}{2}}} = 5^{\frac{1}{6}}$

چ) $\sqrt[7]{8^5 \sqrt{4}} = \sqrt[7]{2^{30} \times 2^2} = \sqrt[7]{2^{32}} = 2^{\frac{32}{7}}$ ح) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{(5)^7}} = \sqrt[5]{5^{\frac{7}{3}}} = 5^{\frac{7}{15}}$ خ) $\sqrt[5]{3\sqrt{3}} = \sqrt[5]{3^2 \times 3^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[5]{3^{\frac{5}{2}}} = 3^{\frac{1}{2}}$

مثال: عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = 2^{\frac{4}{8}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

ب) $\sqrt[6]{x^2} \ (x > 0) = x^{\frac{2}{6}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

پ) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

ت) $\sqrt[4]{7} \times \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = 7^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{7^7}$

ث) $\sqrt[3]{2\sqrt{2} \times \sqrt[5]{2}} = \sqrt[3]{2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{2^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{10}{5} + \frac{5}{10} + \frac{2}{10}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{17}{10}}} = 2^{\frac{17}{30}}$

ج) $\sqrt[3]{4} \div \sqrt{8} = 4^{\frac{1}{3}} \div 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{2}{3} - \frac{3}{2}} = 2^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}$

چ) $\sqrt{(3\sqrt{2})^8} = (3\sqrt{2})^4 = (3^2 \times 2)^2 = 9^2 \times 2^2 = 81 \times 4 = 324$

خ) $\sqrt{2^5 \sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2^5 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{2^{5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}} = \sqrt{2^{\frac{20}{4} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8}}} = \sqrt{2^{\frac{21}{4}}} = 2^{\frac{21}{8}}$

ح) $\sqrt{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{\frac{2}{6} + \frac{3}{6}}} = \sqrt{2^{\frac{5}{6}}} = 2^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{2^5}$



$$d) \sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = 5^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{5^5}$$

$$d) \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{9} \times \sqrt[12]{27} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 3^{\frac{4+3+2}{4}} = 3^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{3^9}$$

مثال: حاصل $A = \sqrt[5]{2^4 \sqrt{2}} (\sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{128})$ کدام است؟ (آزمون گاج)

$$A = \sqrt[16]{16} \left(\sqrt[8]{8} + \sqrt[6]{6} \right) = 2 + 2 = 4$$

مثال: به ازای کدام مقدار k عبارت $\sqrt[3]{a^2 k \sqrt{a^5}}$ برابر a خواهد شد؟

مسئله: به ازای کدام مقدار k عبارت $\sqrt[k]{a^{2k+5}}$ برابر با توانی ساده می شود؟

پاسخ: $(1) \sqrt{a^2} = a$ $(2) \sqrt[3]{a^6} = a^2$ $(3) \sqrt[4]{a^8} = a^2$ $(4) \sqrt[5]{a^{10}} = a^2$

بنابراین اگر $a > 0$ باشد، داریم:

$$\sqrt[k]{a^{2k+5}} = a$$

یعنی $a^{2k+5} = a^k$ و در نتیجه $2k+5=k$ که منجر به $k=-5$ می شود.

اما اگر $a < 0$ باشد، داریم:

$$\sqrt[k]{a^{2k+5}} = -a \rightarrow \sqrt[15]{a^{15}} = -a$$

در این صورت $k=15$ است.

مثال: عبارت $\sqrt[8]{6^{\frac{1}{15}}}$ با کدام یک از گزینه‌های زیر برابر است؟

$$\sqrt[4]{10\sqrt{6\sqrt{6}}}\quad (2)$$

$$^{12}\sqrt{^{10}\sqrt{^3\sqrt{36}}}\quad(4)$$

$$\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{6^{\frac{1}{3}}}}}} (3)$$



درس چهارم : عبارتهای جبری: به یک رابطه‌ی همواره برقرار، یک اتحاد می‌گویند.

اتحاد مربع	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
اتحاد مزدوج	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
اتحاد یک جمله مشترک	$(a + x)(a + y) = a^2 + (x + y)a + xy$
تعمیم اتحاد مربع	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
اتحاد مکعب	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
اتحاد چاق و لاغر	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

مثال: حاصل عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف) $(3x^2 + 5)^2 = 9x^4 + 2(3x^2)(5) + 25 = 9x^4 + 30x^2 + 25$

ب) $(4xy - 1)^2 = 16x^2y^2 - 8xy + 1$

پ) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = x^4 - 16$

ت) $(2x + 5y)^2(2x - 5y)^2 = ((2x + 5y)(2x - 5y))^2 = \dots$

ث) $(3x + 1)(3x + 5) = 9x^2 + 16x + 5$

ج) $(x - 5y)(x + 5y)(x^2 - y^2) = (x^2 - 25y^2)(x^2 - y^2) = x^4 - 26x^2y^2 + 25y^4$

چ) $(x + 2)^3 = x^3 + 3x^2(2) + 3x(2)^2 + 8 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

ح) $(y^2 - 1)^3 = (y^2)^3 - 3(y^2)^2(1) + 3(y^2)(1)^2 - 1 = y^6 - 3y^4 + 3y^2 - 1$





خ) $(3x - 5)^3$

د) $(2x + 3)^3$

ذ) $(4y - 5)^3$

ر) $(2y + 3x)^3$

ز) $(x^2 + y)^3(x^2 - y)^3 = (x^2 - y^2)^3 = \dots$

س) $(y + 3)(y^2 - 3y + 9) = y^3 + 27$

ش) $(2y - 1)(4y^2 + 2y + 1) = 8y^3 - 1$

ص) $(x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = x^3 - y^3$

مثال: حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $98^2 = (100 - 2)^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$

ب) $107 \times 93 = (100 + 7)(100 - 7) = 10000 - 49 = 9951$

مثال: وقتی $(2x - 4)^3$ را بسط می دهیم، مجموع ضرایب x و x^2 کدام است؟

4) صفر

3) -16

2) 48

1) 16

$$8x^3 - 3(4x^2)(4) + 3(2x)(16) - 64 = 8x^3 - 48x^2 + 96x - 64$$

مثال: ساده شدهی عبارت زیر در کدام گزینه آمده است؟

$A = (2a - 3)(2a + 3)(16a^4 + 36a^2 + 81) = 64a^6 - 729$

$8a^6 - 729$ (2)

$8a^6 - 243$ (4)

$64a^6 - 729$ (1)

$64a^6 - 243$ (3)





مثال: ساده شده‌ی عبارت $(x^3 - 7)(x^2 - 2x + 4)(x + 2)$ کدام است؟

$$(2) x^6 + x^3 - 56$$

$$(1) x^6 - 15x^3 + 56$$

$$(4) x^6 + 15x^3 - 56$$

$$(3) x^6 - x^3 - 56$$

$$(x^3 + 8)(x^3 - 7) = x^6 + 1x^3 - 56$$

تجزیه‌ی یک عبارت جبری: یعنی یک چندجمله‌ای را به صورت ضرب دو یا چند جمله

بنویسیم.

انواع روش‌های تجزیه چندجمله‌ای‌ها:

1- فاکتورگیری: در مورد عباراتی که دارای یک عبارت مشترک در تمام جملات هستند به کار می‌رود.

$$\text{الف) } 4x^2 + 8x = 4x(x + 2) \quad , \quad \text{ب) } 6x^3 - 8x^2 = 2x^2(3x - 4)$$

$$\text{پ) } 14xy - 21x = 7x(2y - 3) \quad , \quad \text{ت) } 15xy - 25x^2 =$$

$$\text{ث) } 12x^2y - 16x = \quad , \quad \text{چ) } 6xy - 24x =$$

$$\text{ج) } 30axy - 45yx^2 =$$

$$\text{ح) } 16yx^5 - 32yx^2 =$$

$$\text{خ) } 30ax^3 + 6x^2 =$$

$$\text{د) } 24y^2x^3 - 12y^4x^2 =$$

$$\text{ذ) } 9(x - 1) - x(x - 1) = (x - 1)(9 - x)$$

$$\text{ر) } 2(x - 3) - x(x - 3) = (x - 3)(2 - x)$$

$$\text{ز) } (x - 1)(x - 2) - (x - 2)(x - 3) = (x - 2)(x - 1 - x + 3) = 2(x - 2)$$





2- استفاده از اتحادها:

الف) دو جمله‌ای باشد (مزدوج): اولاً هر دو جمله مربع کامل باشند. (جذر دقیق داشته باشند).
ثانیاً وسط دو جمله حتماً باید علامت منفی باشد.

الف) $x^2 - 64 = (x - 8)(x + 8)$

ب) $16x^4 - 1 = (4x^2 - 1)(4x^2 + 1) = (2x + 1)(2x - 1)(4x^2 + 1)$

مثال: تجزیه کنید.

الف) $x^2 - 25 =$

ب) $4 - 36x^2 =$

پ) $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$

ت) $81 - x^4 =$

ث) $\frac{x^2 - 1}{x + 1} =$

ج) $1 - 9x^2 =$

چ) $(2x)^2 - (x + 1)^2 = (2x + x + 1)(2x - (x + 1)) = (3x + 1)(x - 1)$

ح) $(3x)^2 - (x - 1)^2 =$

خ) $(x^3 + 9)^2 - (x^3 + 7)^2 =$

ب) دو جمله‌ای باشد (چاق و لاغر و ترکیب سمی با مزدوج و فاکتور): هر دو جمله، مکعب کامل باشند.

الف) $x^3 - 125 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$

ب) $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$





$$(x^5)^3 + (4)^3 = (x^5 + 4)(x^5 - 4x^2 + 36)$$

$$ت) x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$$

$$* ث) x^6 - 64 = (x^3 - 4)(x^3 + 4) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$ج) \frac{x^6 - y^6}{yx^3 - xy^3} = \frac{(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)}{xy(x^2 - y^2)} = \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{xy(x - y)(x + y)}$$

$$د) \frac{t^7 + t}{t} = \frac{t(t^6 + 1)}{t} = (t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1)$$

پ) سه جمله ای باشد (جمله مشترک): از اتحادهای مربع دو جمله ای و یا یک جمله مشترک

استفاده می کنیم.

ضرب دو عدد جمع دو عدد

1) $x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$	2) $x^2 - x - 30 = (x - 6)(x + 5)$
3) $x^2 - 8x - 9 =$	4) $x^2 - 6x - 72 =$
5) $x^2 - 2x - 63 = (x - 9)(x + 7)$	6) $x^2 - 20x + 51 = (x - 3)(x - 17)$
7) $x^2 - 9x - 22 = (x - 11)(x + 2)$	8) $x^2 - 58x - 120 = (x - 60)(x + 2)$
9) $x^2 - 11x + 28 =$	10) $x^2 - 3x - 28 =$
11) $x^2 + x - 30 =$	12) $x^2 - 7x - 30 =$





13) $x^2 - 13x - 30 = (x - 15)(x + 2)$	14) $x^2 - 13x + 30 = (x - 10)(x - 3)$
15) $x^2 - x - 42 =$	16) $x^2 - 17x + 42 =$
17) $x^2 - x - 56 =$	18) $x^2 - 10x - 56 =$
19) $a^2 - 19a + 70 = (a - 14)(a - 5)$	20) $x^2 - 9x - 70 = (x - 14)(x + 5)$

مثال: در تجزیه عبارت $y^5 + 2y^3 - 24y$ کدام عامل وجود ندارد؟

$y - 4$ (4)

$y + 2$ (3)

$y - 2$ (2)

$y^2 + 6$ (1)

$$y(y^4 + 2y^2 - 24) = y(y^2 + 6)(y^2 - 4) = y(y^2 + 6)(y - 2)(y + 2)$$

مثال: در تجزیه عبارت $x^2(2x + 1) - (3x + 4)(2x + 1)$ کدام عامل وجود ندارد؟

$x - 4$ (4)

$x + 4$ (3)

$x + 1$ (2)

$2x + 1$ (1)

$$(2x + 1)(x^2 - 3x - 4) = (2x + 1)(x - 4)(x + 1)$$

مثال: اگر $a + b = 5$ و $a^3 + b^3 = 110$ باشد، مقدار ab کدام است؟

30 (4)

15 (3)

10 (2)

1 (1)

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 125$$

$$3ab(a + b) = 125 - 125 \Rightarrow 3ab = 0 \Rightarrow ab = 0$$

مثال: اگر $a + b = 3$ و $ab = -1$ باشد، حاصل $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$ کدام است؟

$\frac{49}{18}$ (4)

$\frac{36}{11}$ (3)

$\frac{25}{9}$ (2)

$\frac{16}{7}$ (1)

$$(a + b)^2 = (3)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 9 \Rightarrow a^2 + b^2 = 11$$

$$(a + b)^3 = (3)^3 \Rightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 27 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 27$$

$$a^3 + b^3 + 3(-1)(3) = 27 \Rightarrow a^3 + b^3 = 36$$





تجزیه با استفاده از اتحاد جمله مشترک در حالتی که $a \neq 1$:

$$ax^2 + bx + c \xrightarrow{\text{نتیجه}} x^2 + bx + ac \xrightarrow{\text{نتیجه}} (ax + m) \left(x + \frac{n}{a}\right), \begin{cases} m + n = b \\ m \times n = ac \end{cases}$$

الف) $3x^2 + 7x - 10 \xrightarrow{\text{نتیجه}} x^2 + 7x - 30 \xrightarrow{\text{نتیجه}} (3x + 10) \left(x - \frac{3}{3}\right)$

ب) $3x^2 - 7x - 6 \rightarrow x^2 - 7x - 18 \rightarrow (x - 9)(x + 2)$

پ) $2x^2 + 7x - 15 \rightarrow x^2 + 7x - 15 \rightarrow (x + 10)(x - 3)$

ت) $5x^2 - 87x - 54 \rightarrow x^2 - 17x - 27 \rightarrow (x - 9)(x + 3)$

ث) $2x^2 - x - 10$

ج) $4x^2 - 4x - 3$

چ) $3x^2 - 4x - 15$

تجزیه به روش دسته بندی:

الف) $ax - 3b + 3a - bx$

$$ax - bx + 3a - 3b$$

$$x(a - b) + 3(a - b) = (a - b)(x + 3)$$

ب) $a^3 - 2ab + a^2b - 2b^2$

$$a^3 + a^2b - 2ab - 2b^2$$

$$a^2(a + b) - 2b(a + b) = (a + b)(a^2 - 2b)$$

پ) $a^3 - 3ab^2 + b^3 - 3ba^2$

$$a^3 + b^3 - 3ab^2 - 3ba^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) - 3ab(b + a)$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2 - 3ab)$$

$$(a + b)(a^2 - 4ab + b^2)$$





ت) $b^3 + 2b - 4b^2 - 8$

$$b^3 - 4b^2 + 2b - 8 = b^2(b - 4) + 2(b - 4)$$

$$= (b - 4)(b^2 + 2)$$

ث) $x^4 - xy^3 + x^3y - y^4$

$$= x^4 - y^4 + x^3y - xy^3 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + xy(x^2 - y^2)$$

$$= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) + xy(x - y)(x + y)$$

$$= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2 + xy)$$

شمارنده و مضرب: به اتحاد $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ دقت کنید. هر کدام از عبارت‌های $a + b$ و $a - b$ یک شمارنده یا مقسوم علیه $a^2 - b^2$ است.

$$16 = 2 \times 8$$

همچنین $a^2 - b^2$ هم مضرب $a - b$ و هم مضرب $a + b$ است.

توجه: مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چندجمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر (و یا همزمان در هر دو) به دست می‌آیند.

مثلاً $(a + b)$ ، $2(a + b)$ ، $2(a + b)(a - b)$ همگی مضرب $(a + b)$ هستند. اما $\sqrt{3}(a + b)$ دیگر مضرب $(a + b)$ محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی فقط می‌توانند صحیح باشند.

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر مضرب $a + b$ نیست؟

$\frac{a^2 - b^2}{4}$ (4) $a^2 - b^2$ (3) $(a + b)^2$ (2) $a^3 + b^3$ (1)
 $(a - b)(a + b)$ $(a - b)(a + b)$ $(a + b)(a + b)$ $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

مثال: عبارت $8x^3 - 1$ مضرب کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

$4x^2 + 2x + 1$ (4) $4x^2 - 4x + 1$ (3) $4x^2 + 4x + 1$ (2) $2x + 1$ (1)

$$8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$





تعریف عبارت‌های گویا:

عبارتی کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد. (X زیر رادیکال و داخل قدر مطلق نباشد، بی زحمت در توان هم نباشد).

عبارت‌هایی مانند $\frac{x^2}{x-1}$ و $\frac{x^3-x^2+\sqrt{3}}{x^2-6x+5}$ گویا هستند و عبارت‌های $\sqrt[3]{x}-1$ و $\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}$ گویا نیستند. یک عبارت گویا به ازای تمام مقادیری که مخرج آن صفر نمی‌شود، تعریف می‌شود و مقدار دارد. (یعنی اگر مخرج به ازای عددی صفر شود، می‌گوییم به ازای آن عدد عبارت تعریف نشده است).

مثال: عبارت‌های گویای زیر به ازای چه مقادیری تعریف نمی‌شوند؟

الف) $\frac{(x-3)}{x-1}$

$x=1$

ب) $\frac{x+7}{x^2-4}$

$(x-2)(x+2)=0$
 $x=2$
 $x=-2$

پ) $\frac{(2x-3)(x^2-9x+3)}{x^2-3x-40}$

$(x-8)(x+5)=0$
 $x=8$
 $x=-5$

مثال: ساده شده‌ی عبارت $A = \frac{ax^2+ax}{2x} \times \frac{x-3}{2x^2-4x-6}$ برابر 6 می‌باشد، مقدار a کدام است؟

$$A = \frac{ax(x+1)}{2x} \times \frac{x-3}{2(x-3)(x+1)} = 6 \Rightarrow \frac{a}{2} = 6 \Rightarrow a = 12$$

مثال: عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{(x-5)(x^2-9)}{x^2-2x-15} = \frac{(x-5)(x-3)(x+3)}{(x-5)(x+3)} = x-3$





$$ب) \frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1} = \frac{\cancel{(x^2+1)}(x^4-x^2+1)}{\cancel{(x^2+1)}(x^2+1)} = \frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}$$

$$پ) \frac{x^3-1}{(x-1)^3} = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}^2(x-1)} = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$$

$$ت) \frac{x^2+1}{x^4-1} = \frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

$$ث) \frac{y^7-y}{y^3+y^2+y} = \frac{\cancel{y}(y^6-1)}{\cancel{y}(y^2+y+1)} = \frac{(y^2-1)(y^4+y^2+1)}{y^2+y+1}$$

$$ج) \frac{x^5-x^3-12x}{8x^2+16x} = \frac{\cancel{x}(x^4-x^2-12)}{\cancel{8x}(x+2)} = \frac{(x^2-4)(x^2+3)}{\cancel{x+2}} = (x-2)(x+3)$$

مثال: ساده شده‌ی عبارت مقابل کدام است؟

$$A = \frac{xy^3+y^2+y+1-x}{y^2+y+1}$$

$$y-x \quad (4)$$

$$xy-x+1 \quad (3)$$

$$y^2-x \quad (2)$$

$$xy^2-1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{xy^3-x+y^2+y+1}{y^2+y+1} &= \frac{x(y^3-1)+y^2+y+1}{y^2+y+1} \\ &= \frac{(y^2-1)(y+1)+y^2+y+1}{y^2+y+1} \\ &= \frac{(y^2+y+1)(y-1)+y^2+y+1}{y^2+y+1} = y-1 \end{aligned}$$





جمع و تفريق عبارت‌هاى گويا:

مثال: حاصل جمع و تفريق‌هاى زير را به دست آوريد.

$$\text{الف)} \quad \frac{2}{x^2-1} - \frac{4}{x^2+2x-3} = \frac{2(x+3) - 4(x-1)}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{-2}{x^2+2x+3}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{3}{2x} + \frac{1}{x-3} - \frac{2x-9}{2x^2-6x} = \frac{3(x-3) + 2x - 2x + 9}{2x(x-3)} = \frac{3}{2x(x-3)}$$

گويا کردن مخرج كسرها:

يعنى با ضرب و تقسيم صورت و مخرج كسر در يك عبارت مناسب، عبارت مخرج كسر، گويا شود.

مثال: مخرج كسرهاى زير را گويا كنيد.

$$\text{الف)} \quad \frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{8(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} = 4(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

$$\text{ب)} \quad \frac{3}{3+\sqrt{7}} \times \frac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} = \frac{9-3\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{پ)} \quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$$

$$\text{ت)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+2}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+2} = \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+2}{x-8}$$





$$\text{ث) } \frac{3}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x-y}$$

$$\text{ج) } \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}}{V}$$

$$\text{د) } \frac{2}{\sqrt[3]{x^2} + 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2 + 1}$$

$$\text{ه) } \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \times \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{x+y}$$

$$\text{و) } \frac{3}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$$

$$\text{ز) } \frac{1}{\sqrt[8]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}{(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}$$

$$\text{ح) } \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} + \frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{5}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-4}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right\}$$

$$\text{ط) } \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^3} - 2\sqrt[3]{x}}{x}$$

$$\frac{(x+1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} \quad \left| \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \times \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \quad \left| \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \times \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \right.$$





مثال: با فرض $x = 2 + \sqrt{3}$ ، حاصل $x + \frac{1}{x}$ کدام است؟

$4\sqrt{3}$ (4)

4 (3)

2 (2)

$2 - \sqrt{3}$ (1)

$$2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{(2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

$4 - 3 = 1$

مثال: اگر $A = \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1}$ مقدار $(A + 1)^3$ کدام است؟ (آزمون گزینه 2)

6 (4)

3 (3)

2 (2)

1 (1)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} \times \frac{(\sqrt[3]{3} - 1)}{(\sqrt[3]{3} - 1)} = \frac{\sqrt[3]{3} - 1}{3 - 1} = \frac{\sqrt[3]{3} - 1}{2}$$

$(\frac{\sqrt[3]{3} - 1}{2} + 1)^3 = ?$

$\frac{10\sqrt{x^7}}{x}$ (4)

$\frac{10\sqrt{x^9}}{x^3}$ (3)

مثال: گویا شده‌ی کسر $\frac{1}{\sqrt[5]{x\sqrt{x}}}$ کدام است؟

$10\sqrt{x}$ (2)

$\frac{10\sqrt{x^3}}{x^3}$ (1)

$$\frac{1}{\sqrt[10]{x^2x}} = \frac{1}{\sqrt[10]{x^3}} \times \frac{\sqrt[10]{x^7}}{\sqrt[10]{x^7}} = \frac{\sqrt[10]{x^7}}{x}$$

مثال: کسر $\frac{4}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}}$ برابر کدام گزینه است؟

$\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9}$ (2)

$\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9}$ (1)

$4(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})$ (4)

$4(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})$ (3)

$$\frac{4}{\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9}} = 4(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9})$$

مثال: حاصل عبارت $A = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{25} - 2\sqrt[3]{25}$ کدام است؟

$2\sqrt[3]{25}$ (4)

$-3\sqrt[3]{25}$ (3)

$-\sqrt[3]{5}$ (2)

$-\sqrt[3]{25}$ (1)

$$A = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{25} - 2\sqrt[3]{25} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} + \frac{3\sqrt[3]{5}}{5} - 2\sqrt[3]{5} = \frac{2 + 3\sqrt[3]{5} - 10\sqrt[3]{5}}{5} = -\frac{7\sqrt[3]{5}}{5}$$

