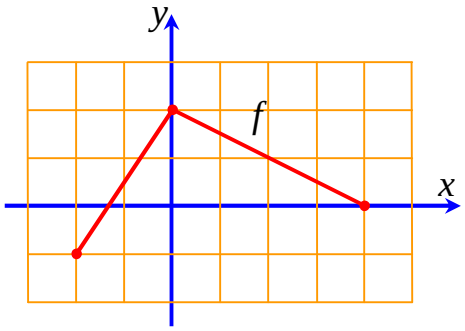
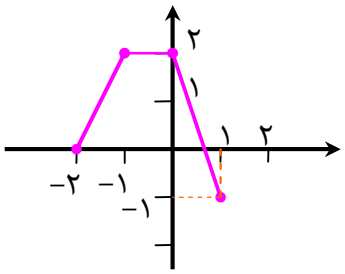
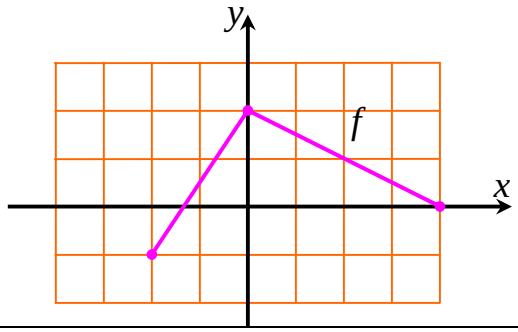
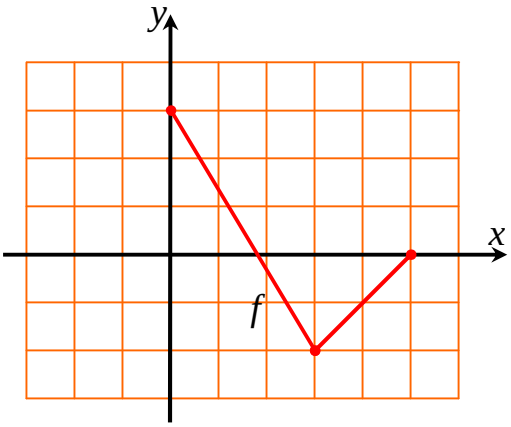
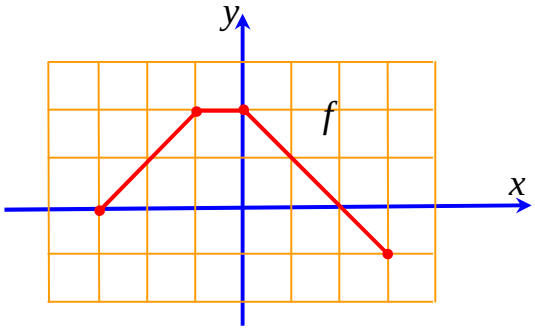
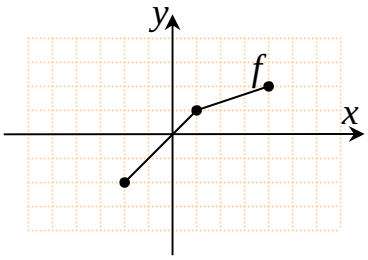
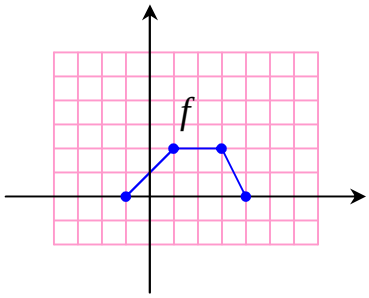
((فصل اوّل : تابع))

***

تبدیل نمودار توابع

۱	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-f(۲x)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.  	دی ۹۷	۱/۵ نمره
۲	نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.  	خرداد ۹۸	۱ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می آید.	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۴	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(۲x)-۱$ را رسم کنید. سپس دامنه‌ی تابع g را تعیین کنید.  	تیر ۹۸	۱/۲۵ نمره

۵	کوتاه پاسخ دهید. الف : در فاصله‌ی $(۰,۱)$ از بین دو تابع $g(x)=x^{۳}$ و $f(x)=x^{۲}$ ، نمودار کدام تابع پایین تر از دیگری قرار دارد؟ ب : نمودار تابع $y=-f(x)$ ، قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به کدام محور است؟	شهریور ۹۸	۰/۵ نمره
۶	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(۳-x)$ را رسم کرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید.  	شهریور۹۸	۱ نمره
۷	نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(۲x+۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.  	دی ۹۸	۱/۲۵ نمره
۸	با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آمده است. نمودار تابع $g(x)=f(۲x)-۱$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.  	خرداد ۹۹	۱ نمره

۹	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. نقطه‌ی $(۲,-۱)$ در تابع $y=f(۲x+۱)-۱$ متناظر با نقطه‌ی ..... در تابع $y=f(x)$ است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۰	اگر نمودار f به صورت مقابل باشد. نمودار تابع $y=f(x-۱)+۲$ زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید.  	خرداد ۹۹ خ	۱/۵ نمره
۱۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. نمودار تابع $y=(x+۲)^۳$ را می توان با ۲ واحد انتقال نمودار تابع $y=x^۳$ به سمت چپ، رسم کرد.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۲	در جاهای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. اگر بازه‌ی $[-۲,۱]$ دامنه‌ی تابع $f(x)$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(۳x+۱)$ برابر ..... است.	شهریور ۹۹	۰/۵ نمره
۱۳	نمودار تابع زیر را به کمک نمودار تابع $y=\cos x$ رسم کنید. $y=\cos ۲x-۱$	شهریور ۹۹	۱ نمره

تابع درجه‌ی سوّم و چند جمله ای

۱	کوتاه پاسخ دهید. درجه‌ی تابع $f(x)=x^۲(۱-x)^۵$ را مشخص کنید.	شهریور ۹۸	۰/۲۵ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. نمودار تابع $y=x^۳$ در بازه‌ی $[۰,۱]$ پایین تر از نمودار تابع $y=x^۲$ قرار دارد.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. چند جمله ای $P(x)=(۲-x)^۲(x+۱)^۳$ یک چند جمله ای از درجه‌ی ۵ است.	شهریور ۹۹	۰/۲۵ نمره

توابع یکنوا

۱	نمودار تابع $f(x)=(x+۱)^۳$ را رسم کنید. سپس تعیین کنید که این تابع در دامنه‌ی خود اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟	دی ۹۷	۰/۷۵ نمره

۲	کوتاه پاسخ دهید. تابع $h(x)=\|x+۲\|$ در چه بازه ای اکیداً صعودی است؟	شهریور۹۸	۰/۲۵ نمره
۳	اگر $\log(x+۱)\le\log(۲x-۳)$ ، حدود x را به دست آورید؟	شهریور۹۸	۰/۵ نمره
۴	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در یک بازه نزولی باشد، آنگاه در این بازه اکیداً نزولی می باشد.	دی ۹۸	۰/۵ نمره
۵	در جاهای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. اگر $(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}\le\frac{۱}{۶۴}$ باشد، حدود x برابر ..... است.	دی ۹۸	۰/۵ نمره
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع $y=f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه در آن فاصله اکیداً صعودی نیز خواهد بود.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۷	نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه ای این تابع اکیداً صعودی و در چه بازه ای اکیداً نزولی است.	خرداد ۹۹	۱ نمره
۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $g(x)=۲^{-x}$ ، تابعی است که در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x)=-x^۲+۲x$ روی بازه‌ی $(-\infty\ ,\ ۳]$ اکیداً صعودی است.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۱۰	جاهای خالی را با عبارت مناسب پرکنید. برای آنکه تابع $y=ax+b$ در دامنه اش هم صعودی باشد و هم نزولی، مقدار a باید برابر با ..... باشد.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در یک بازه نزولی اکید باشد، در این بازه نزولی نیز هست.	شهریور۹۹	۰/۲۵ نمره

تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. اگر باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)=x^{۲}+kx-۱$ بر $x+۱$ برابر ۲ باشد. مقدار k برابر ..... است.	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره
۲	اگر چند جمله ای $f(x)=x^{۲}+ax-۳$ بر $x+۱$ بخش پذیر باشد. باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-۲$ را به دست آورید.	خرداد ۹۸	۰/۷۵ نمره
۳	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)=x^{۳}-۲x$ بر $x-۱$ برابر ۲ برابر با ..... است.	تیر ۹۸	۰/۲۵ نمره
۴	مقدار b و a را طوری تعیین کنید که چندجمله ای $P(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx-۲$ بر $x-۲$ بخش پذیر بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x+۱$ برابر ۳ باشد.	تیر ۹۸	۱ نمره
۵	مقادیر b و a را طوری تعیین کنید که چندجمله ای $P(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+۱$ بر $x-۲$ و $x+۱$ بخش پذیر باشد.	شهریور۹۸	۱ نمره
۶	در چند جمله ای $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+b$ ، مقادیر b و a را چنان بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x-۱$ برابر ۴ باشد و بر $x+۲$ بخش پذیر باشد.	دی ۹۸	۱/۲۵ نمره
۷	مقدار b و a را طوری تعیین کنید که چندجمله ای $x^{۳}+ax^{۲}+bx+۱$ بر $x-۲$ و $x+۱$ بخش پذیر باشد.	خرداد ۹۹	۱ نمره
۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در تقسیم $f(x)=x^{۳}+۲$ بر $p(x)=۲x-۱$ باقی مانده برابر صفر است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۹	در چند جمله ای $y=x^{۳}+ax^{۲}+x+b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x-۱$ برابر با ۴ باشد و بر $x+۲$ بخش پذیر باشد.	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۱۰	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله ای $P(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx-۲$ بر $x-۲$ بخش پذیر بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x+۱$ برابر ۳ باشد.	شهریور۹۹	۱/۵ نمره

اتحاد های تکمیلی

۱	هر یک از چندجمله ای های زیر را برحسب عامل خواسته شده، تجزیه کنید. الف) $x^{۵}+۱$ با عامل $x+۱$ ب) $x^{۶}-۱$ با عامل $x-۱$	دی ۹۷	۱ نمره

۲	چندجمله ای $x^{۶}-۱$ را بر حسب عامل $x+۱$ تجزیه کنید.	خرداد ۹۸	۰/۵ نمره
۳	چند جمله ای $x^{۵}+۱$ را بر حسب عامل $x+۱$ تجزیه کنید.	خرداد ۹۹ خ	۰/۵ نمره

تهیه کننده: جابر عامری

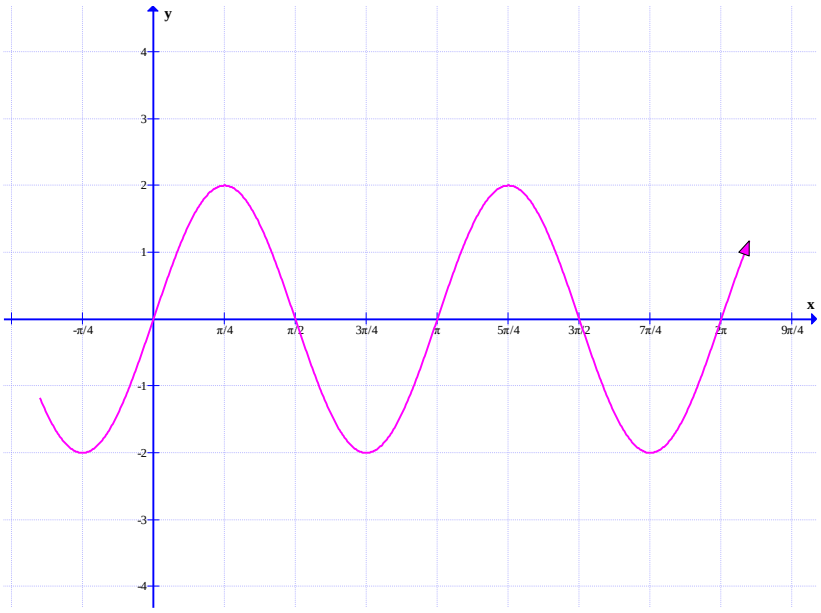
عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

((فصل دوّم : مثلثات))

***

دوره‌ی تناوب

۱	درست یا نادرست بودن جمله‌ی زیر را مشخص کنید. مینیمم تابع $y=-۳\cos(\pi x)+۲$ برابر یک است.	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره
۲	ضابطه‌ی تابعی به فرم $y=a\sin bx+c$ را بنویسید که دوره‌ی تناوب آن π، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن ۳- باشد.	دی ۹۷	۱ نمره
۳	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. دوره‌ی تناوب تابع $y=۳\cos(-\frac{\pi}{۴}x)$ برابر با ..... است.	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۴	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. دوره‌ی تناوب تابع $y=-\frac{۱}{۴}\cos(\pi x)$ برابر با ..... است.	تیر ۹۸	۰/۲۵ نمره
۵	مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y=۱-۲\sin(۳x)$ را به دست آورید.	تیر ۹۸	۰/۵ نمره
۶	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=-۳\cos(\pi x)+۱$ را مشخص کنید.	شهریور۹۸	۱/۵ نمره
۷	ضابطه‌ی تابعی به صورت $y=a\sin bx+c$ را بنویسید که دوره‌ی تناوب آن π، مقدار ماکزیمم آن ۶ و مقدار مینیمم آن ۲- باشد.	دی ۹۸	۱/۵ نمره
۸	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید. دوره‌ی تناوب تابع $y=۸\cos(\frac{x}{۳})$ برابر با ..... است.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۹	مقدار ماکزیمم و می نیمم تابع $y=۱+۲\sin ۷x$ را به دست آورید.	خرداد ۹۹	۱ نمره

۱۰	معادله‌ی منحنی رو به رو را به صورت $y = a\cos(bx)$ یا $y = a\sin(bx)$ بیان کنید.  	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۱۱	جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید. دوره‌ی تناوب و مقدار مینیمم تابع $y = ۲\sin\frac{\pi}{۲}x - ۱$ به ترتیب برابر با ..... و ..... است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۲	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و تابع $y = \sqrt{۵} - \pi\cos\frac{۱}{۲}x$ را محاسبه کنید.	شهریور۹۹	۱ نمره

تابع تانژانت

۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. دوره‌ی تناوب تابع تانژانت برابر با ..... است.	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره
۲	درست یا نادرست بودن جمله‌ی زیر را مشخص کنید. تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره
۳	درست یا نادرست بودن جمله‌ی زیر را مشخص کنید. نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ که در آن $k \in Z$ در دامنه‌ی تابع تانژانت قرار ندارند.	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۴	کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟ الف : تابع تانژانت در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است؟ ب : نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و $k \in Z$ در دامنه‌ی تابع تانژانت قرار دارند.	شهریور ۹۸	۰/۵ نمره

۵	جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید. دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y = \tan x$ برابر ..... است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۶	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. مقدار تابع تانژانت در $x = \frac{\pi}{۲}$ تعریف نشده است.	شهریور۹۹	۰/۲۵ نمره

معادلات مثلثاتی

۱	معادله‌ی مثلثاتی $\cos ۳x - \cos x = ۰$ را حل کنید.	دی ۹۷	۱/۲۵ نمره
۲	معادله‌ی $\cos ۲x + \cos x + ۱ = ۰$ را حل کنید.	خرداد ۹۸	۱/۵ نمره
۳	معادله‌ی $\sin ۲x - \cos x = ۰$ را حل کنید.	تیر ۹۸	۱/۲۵ نمره
۴	معادله‌ی $\sin ۳x = \sin ۲x$ را حل کنید.	شهریور۹۸	۱ نمره
۵	معادله‌ی $۲\cos ۳x - \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید.	دی ۹۸	۱/۵ نمره
۶	معادله‌ی $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$ را حل کنید.	خرداد ۹۹	۱/۵ نمره
۷	مثلثی با مساحت $۸\sqrt{۲}$ سانتی متر مربع است. اگر اندازه‌ی هر ضلع آن۴ و ۸ سانتی متر باشد، آنگاه چند مثلث با این خاصیت وجود دارد؟	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۸	معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید. $۲\sin^۲ x + ۹\cos x + ۳ = ۰$	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۹	معادله‌ی مثلثاتی $\cos ۳x - \cos x = ۰$ را حل کنید.	شهریور۹۹	۱/۷۵ نمره

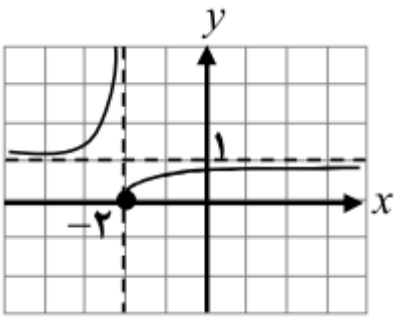
تهیه کننده : جابر عامری

فصل سوّم

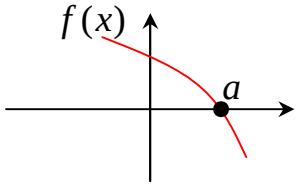
((حدهای نامتناهی،حد در بینهایت))

***

حدهای نامتناهی و حد در بی نهایت

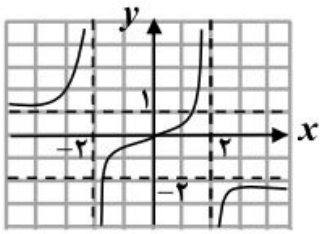
۱	حدود زیر را به دست آورید. الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{۲x+۱}{۴-x^۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۴x^۵+۳x^۳+۱}{-۳x^۵+۳x^۲+۳}$	دی ۹۷	۱/۵ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{x+۱}{۹-x^۲}$ برابر با $-\infty$ است.	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۳	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. حاصل حد $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۳x+۵}{x-۲}$ برابر با ..... است.	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۴	حدود زیر را به دست آورید. الف) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} \frac{x^۲+x}{x^۲+۲x+۱}$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{۵x^۳+۲x-۱}{-۲x^۳+۴}$	تیر ۹۸	۱/۲۵ نمره
۵	با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آورده شده است. به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-} f(x)=....$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=....$  	شهریور ۹۸	۰/۵ نمره
۶	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{x^۲-۱}{(x-۱)^۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-۲x^۳+x-۱)$ پ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^۳+۱}{۲x^۳-۴x}$	شهریور ۹۸	۱/۷۵ نمره

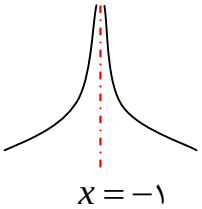
سئوالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوّم درس حسابان۲ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی فیزیک

۷	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(۳-۲x-۵x^{۴})$ برابر با ..... است.	دی ۹۸	۰/۵ نمره
۸	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}}\frac{[x]-۲}{۳-x}$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{۳x+۱}{x-۵}-\frac{۲}{x})$	دی ۹۸	۱/۵ نمره
۹	حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\frac{x^{۲}+x}{x^{۲}}$ ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^{۲}-x+۱}{۴x^{۳}+۲x-۱}$	خرداد ۹۹	۲ نمره
۱۰	نمودار تابع f به صورت مقابل است.  الف : حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to a^{+}}\frac{-۲x}{f(x)}$ ب) $\lim\limits_{x\to a^{-}}\frac{-۲x}{f(x)}$ ب : نمودار تابع $y=\frac{-۲x}{f(x)}$ در اطراف نقطه‌ی $x=a$ چگونه است؟	خرداد ۹۹ خ	۱/۲۵ نمره
۱۱	حد های زیر را به دست آورید. الف) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}}\frac{[x]-۲}{۳-x}$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-۲x^{۲}}{۴x^{۳}+۲x-۱}$	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۱۲	حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{x+۱}{\tan x}$ ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}+۱}{x^{۳}+۲x^{۲}+۱}$	شهریور۹۹	۱/۵ نمره

مجانب افقی و مجانب قائم

۱	مجانب های قائم و افقی تابع $f(x)=\frac{۳x}{x^{۳}-۱}$ را بیابید.	دی ۹۷	۱/۵ نمره
۲	کدام یک از خطوط $x=-۱$ و $x=۳$ مجانب قائم $f(x)=\frac{x^{۲}-۴x+۳}{x^{۲}-۲x-۳}$ می باشد؟ دلیل پاسخ خود را بنویسید.	خرداد ۹۸	۱/۵ نمره

۳	با توجه به نمودار تابع f که در زیر آمده است. معادلات مجانب های افقی تابع را بنویسید.  	خرداد ۹۸	۰/۵ نمره
۴	مجانب های قائم و افقی تابع $f(x)=\frac{۱+۲x^{۲}}{۱-x^{۲}}$ را بیابید.	تیر ۹۸	۱/۲۵ نمره
۵	مجانب قائم و افقی نمودار تابع $y=\frac{x+۳}{۲-x}$ را بنویسید.	شهریور ۹۸	۰/۷۵ نمره
۶	مجانب قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+x}{x^{۲}-x}$ را بنویسید.	دی ۹۸	۱ نمره
۷	نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که همه‌ی شرایط زیر را دارا باشد. الف : $f(۱)=f(-۲)=۰$ ب : $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=+\infty$ ج : خط $y=-۱$ مجانب افقی آن باشد.	خرداد ۹۹	۰/۵ نمره
۸	مجانب های قائم و افقی نمودار تابع $y=\frac{x}{x^{۲}-۴}$ را در صورت وجود بدست آورید.	خرداد ۹۹	۲ نمره
۹	نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که همه‌ی شرایط زیر را دارا باشد. الف : $f(۱)=f(-۲)=۰$ ب : $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=+\infty$ ج : خط $y=-۱$ مجانب افقی آن باشد.	خرداد ۹۹ خ	۱/۲۵ نمره
۱۰	مجانب های افقی و قائم تابع زیر را به دست آورید. $y=\frac{۲x+۵}{\lvert x\rvert-۱}$	خرداد ۹۹ خ	۱/۵ نمره
۱۱	مجانب های قائم و افقی نمودار تابع $y=\frac{۱+۲x^{۲}}{۱-x^{۲}}$ را در صورت وجود به دست آورید.	شهریور۹۹	۲ نمره

۱۲	نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+۱}{x^{۳}+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟	شهریور۹۹	۱ نمره
۱۳	اگر رفتار تابع $f(x)=\dfrac{x+۳}{x^{۲}+bx+c}$ در اطراف نقطه‌ی $x=-۱$ به صورت شکل زیر باشد، مقادیر b و c را به دست آورید.  $x=-۱$	شهریور۹۹	۱ نمره

((فصل چهارم : مشتق))

***

مفهوم مشتق

۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. مشتق تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۱}$ در نقطه ای به طول یک روی منحنی تابع، عدد ..... است.	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره
۲	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. مشتق تابع $f(x)=\dfrac{x}{x+۱}$ در نقطه ای به طول ۲ روی منحنی تابع، عدد ..... است.	تیر ۹۸	۰/۲۵ نمره
۳			

محاسبه‌ی مشتق تابع در یک نقطه

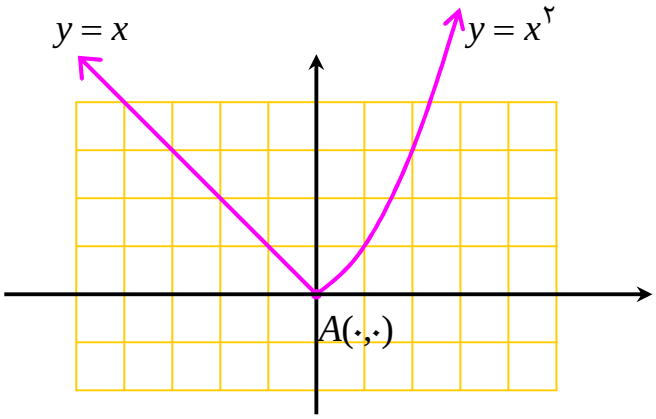
۱	اگر $f(x)=x^۲-۳x$ باشد. با استفاده از تعریف $f'(۱)$ را حساب کنید.	تیر۹۸	۱ نمره
۲	با استفاده از تعریف مشتق، معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را در نقطه‌ی $x=۳$ به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۵ نمره
۳	اگر $f(x)=x^۲-۳x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق $f'(۱)$ را حساب کنید.	شهریور۹۹	۱/۲۵ نمره

مشتق پذیری و پیوستگی

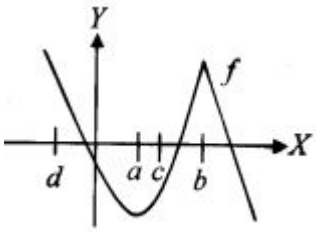
۱	مشتق پذیری تابع $f(x)=\|x-۲\|$ را در $x=۲$ بررسی کنید.	دی ۹۷	۱ نمره
۲	نشان دهید، نقطه‌ی به طول $x=-۱$ ، نقطه‌ی گوشه ای برای تابع $f(x)=\|x^۲+x\|$ می باشد.	خرداد ۹۸	۱/۷۵ نمره

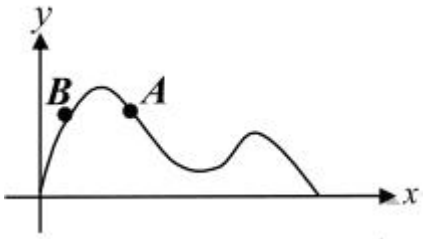
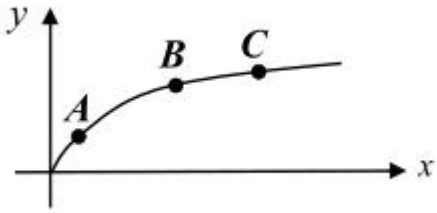
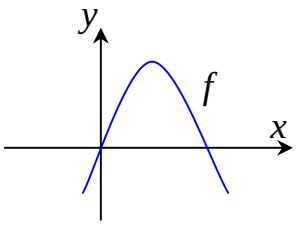
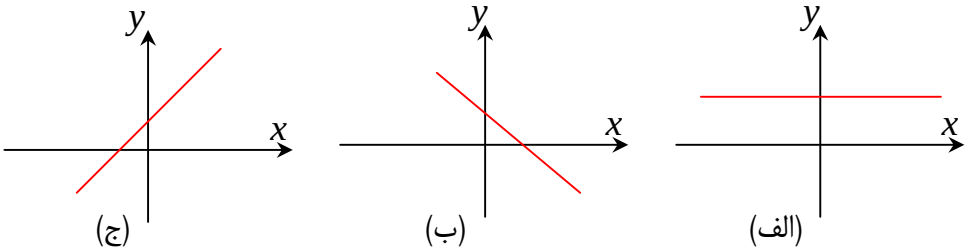
سئوالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل چهارم درس حسابان۲ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی فیزیک

۳	**قضیه :** ثابت کنید اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد،آنگاه f در $x=a$ پیوسته است.	خرداد ۹۸	۱/۲۵ نمره
۴	نشان دهید $x=۰$ مماس قائم برای تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ است.	تیر ۹۸	۰/۷۵ نمره
۵	مشتق پذیری تابع $f(x)=\|x^۲-۴\|$ را در $x=۲$ بررسی کنید.	شهریور ۹۸	۲ نمره
۶	مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید. $f(x)=\begin{cases} x^۲+۳ & x\geq ۱ \\ ۳x+۱ & x<۱ \end{cases}$	دی ۹۸	۱/۲۵ نمره
۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، در آنگاه f در a مشتق پذیر هم نیست.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۸	مشتق پذیری تابع $f(x)=\|x^۲-۱\|$ را در $x=۱$ بررسی کنید.	خرداد ۹۹	۲ نمره
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x)=\|x\|$ در نقطه‌ی $x=۰$ مشتق پذیر نیست.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۰	جای خالی را کامل کنید. خط $x=۱$ بر منحنی $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ ، ..... است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره

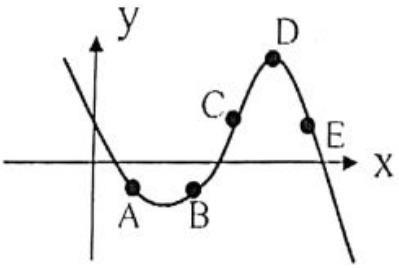
۱۱	با محاسبه‌ی مشتق چپ و راست در نقطه‌ی A، نشان دهید که تابع در نقطه‌ی A مشتق پذیر نیست.  	خرداد ۹۹ خ	۱/۵ نمره
۱۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، آنگاه در این نقطه مشتق پذیر است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۳	تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x>۱ \\ x^{۳}-۲x & x\le ۱ \end{cases}$ در $x=۱$ مشتق پذیر است. حاصل b و a را به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۱۴	مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\le ۰ \\ x & x>۰ \end{cases}$ را در $x=۰$ بررسی کنید.	شهریور۹۹	۲ نمره
۱۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. خط $x=۱$ مماس قائم منحنی $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ است.	شهریور ۹۹	۰/۲۵ نمره

تعبیر هندسی مشتق

۱	با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف : طول نقطه ای که مماس در آن افقی باشد. ب : طول نقطه ای که مشتق در آن مقداری منفی است. پ : طول نقطه ای که تابع در آن مشتق پذیر نیست.  	دی ۹۷	۰/۷۵ نمره

۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را با توجه به شکل داده شده، مشخص کنید. در شکل روبرو، شیب خطوط مماس در نقاط A و B مثبت است.  	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۳	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. با توجه به شکل روبرو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی ..... بزرگتر از شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی B است.  	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۴	نمودار تابع f در شکل روبرو آمده است. با بیان دلیل، مشخص کنید کدامیک از نمودار های زیر، نمودار مشتق تابع f است.   	خرداد ۹۸	۰/۷۵ نمره

<table>
<tr>
<td>۵</td>
<td>
نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب ارائه شده در جدول نظیر کنید.



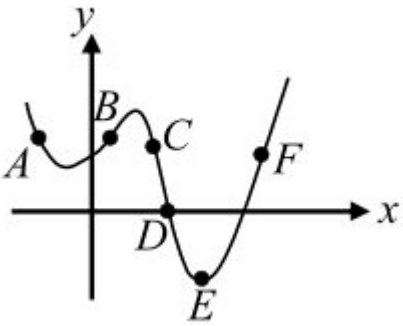
نقطه	شیب
	۰
	۲
	۰/۵
	−۰/۵
</td>
<td>تیر ۹۸</td>
<td>۱ نمره</td>
</tr>
<tr>
<td>۶</td>
<td>
با توجه به نمودار داده شده، گزینه‌ی مناسب را انتخاب کنید.

i) در کدام نقطه، مماس افقی بر نمودار رسم می شود؟ الف) B ب) E

ii) شیب خط مماس در نقطه‌ی F چه علامتی دارد؟ الف) مثبت ب) منفی

iii) شیب خط مماس بر نمودار، در نقطه‌ی D نسبت به نقطه‌ی B چگونه است؟

الف) بیشتر ب) کمتر

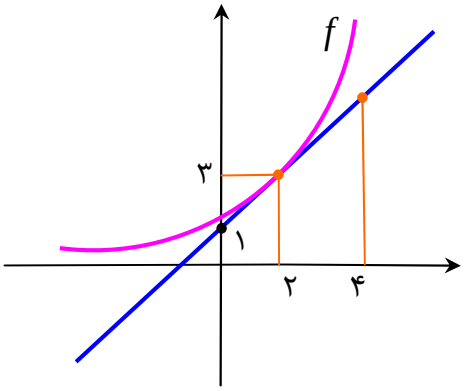


</td>
<td>شهریور ۹۸</td>
<td>۰/۷۵ نمره</td>
</tr>
</table>

۷ در شکل روبرو نمودار تابع $f(x)$ و خط مماس بر منحنی آن در نقطه‌ی $x=۲$ داده شده است.

الف : مشتق تابع $f(x)$ ، در نقطه‌ی $x=۲$ را بیابید.

ب : معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع در نقطه‌ی A را بنویسید.

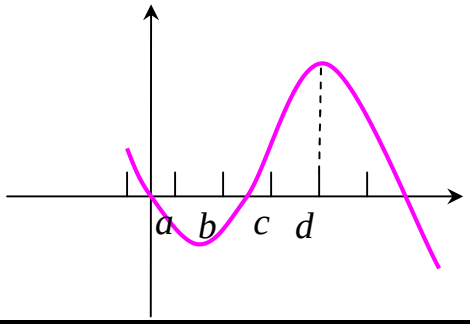


دی ۹۸ — ۱ نمره

۸ معادله‌ی خط مماس بر منحنی $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$ را در نقطه‌ی $A(۲, f(۲))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

خرداد ۹۹ — ۱/۵ نمره

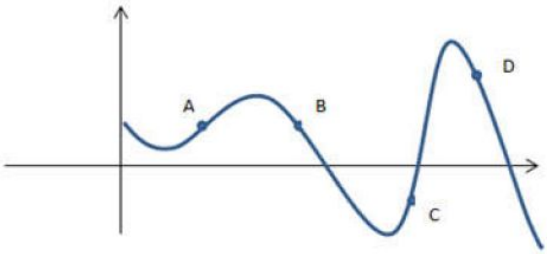
۹ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل زیر ، نقاط a و b و c و d را با مشتق های داده شده در جدول نظیر کنید.



x	$f(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	−۰/۵

خرداد ۹۹ خ — ۱ نمره

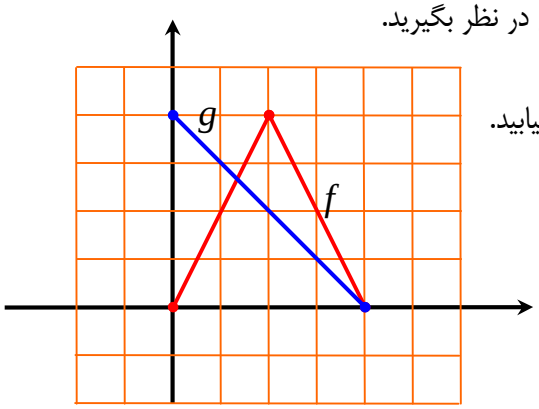
۱۰ با توجه به نمودار زیر جدول را کامل کنید.



شیب	−۲	−۱	۰/۵	۲
نقطه				

خرداد ۹۹ خ — ۱ نمره

محاسبه‌ی مشتق

۱	اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند $f(۲)=۳$ و $f'(۲)=۱$ و $g(۲)=-۳$ و $g'(۲)=۲$ مقادیر $(fg)'(۲)$ و $(f+g)'(۲)$ را به دست آورید.	دی ۹۷	۱/۲۵ نمره
۲	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. اگر $f'(۲)=-۱$ و $g'(۲)=۳$ ، در این صورت $(۲f+۳g)'(۲)$ برابر با ..... است.	دی ۹۸	۰/۵ نمره
۳	نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید. اگر $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(۱)$ را بیابید.  	دی ۹۸	۱ نمره
۴	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید. اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$، در این صورت $(۳f+۲g)'(۱)$ برابر با ..... است.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۵	اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند و $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مقادیر $(۳f+۲g)'(۱)$ را به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره

مشتق گیری از توابع

۱	مشتق توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y=\dfrac{x^۲+۱}{x^۳+۲x-۵}$ ب) $y=\cos^۲(-۳x+۱)$	دی ۹۷	۲ نمره
۲	مشتق توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y=\dfrac{x^۲-۱}{x^۳+۲x+۱}$ ب) $y=\cos^۳(۲x)$	خرداد ۹۸	۱/۷۵ نمره
۳	مشتق توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y=\dfrac{x^۲-۱}{۵x^۳-۳x+۱}$ ب) $y=\sin^۲(۲x+۱)$	تیر ۹۸	۲ نمره

۴	مشتق توابع زیر را به دست آورید. الف) $f(x)=(۲x^{۳}+\sqrt[۳]{x}-۱)^{۴}$ ب) $g(x)=\cos(\frac{x}{x^{۲}+۱})$	شهریور ۹۸	۲/۲۵ نمره
۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y=\frac{۲x+۳}{x^{۳}-۲x^{۲}}$ ب) $y=\sin^{۳}(۲x+۱)$	دی ۹۸	۱/۷۵ نمره
۶	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=\frac{x^{۲}-۳x+۱}{-۳x+۲}$ ب) $g(x)=\sqrt{x}(۳x^{۲}+۵)$ پ) $h(x)=\sin^{۳}x+\cos^{۲}x$	خرداد ۹۹	۳ نمره
۷	مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (ساده کردن الزامی نمی باشد.) الف) $f(x)=(x^{۲}+۱)^{۳}(۵x-۱)$ ب) $f(x)=\frac{۵\cos x}{۱-\sin x}$	خرداد ۹۹ خ	۲/۲۵ نمره
۸	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) ب) $g(x)=\sin ۳x+\cos^{۲}(۴x^{۳}-۲)$ الف) $f(x)=۲\sqrt{x}(۵x^{۲}-۳x)$	خرداد ۹۹ خ	۲ نمره
۹	مشتق هر یک از توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^{۳}+۱)$ ب) $g(x)=(x^{۲}+۳x+۱)^{۷}$ پ) $h(x)=\frac{x^{۲}-۵x+۷}{-۲x+۹}$	شهریور۹۹	۳ نمره

مشتق تابع مرکب و قاعده زنجیری

۱			

مشتق پذیری روی یک بازه

۱	نمودار تابع زیر را رسم کرده و مشتق پذیری f را روی بازه‌ی $[-۲,۰]$ بررسی کنید. $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x+۱ & -۱\le x<۲ \end{cases}$	تیر ۹۸	۱/۲۵ نمره

مشتق مرتبه دوّم

۱	اگر $f(x)=\sin^۲ x-\cos ۲x$ مقدار $f''(\frac{\pi}{۶})$ را حساب کنید.	شهریور ۹۹	۱ نمره

آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه ای تغییر

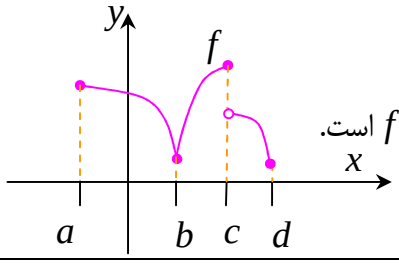
۱	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+t^۲$ گرم است. آهنگ جرم توده ی باکتری در لحظه‌ی $t=۹$ چقدر است؟	دی ۹۷	۰/۷۵ نمره
۲	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^۳-۲x$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ و آهنگ تغییر لحظه ای تابع f را در $x=۱$ محاسبه کنید.	خرداد ۹۸	۱ نمره
۳	یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۳t^۲$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t=۴$ چقدر است؟	تیر ۹۸	۰/۷۵ نمره
۴	آهنگ تغییر لحظه ای تابع $f(x)=۲x^۲+۵x+۱$ در نقطه‌ی $x=۲$ چند برابر آهنگ تغییر لحظه ای آن در $x=-۱$ است؟	شهریور ۹۸	۱ نمره
۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. سرعت لحظه ای در $t=۲$ برای متحرکی با معادله‌ی حرکت $f(t)=t^۲+۳t$ برابر ۷ است.	دی ۹۸	۰/۵ نمره
۶	معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^۲-t+۱۰$ بر حسب متر در بازه‌ی زمانی $[۰,۵]$ بر حسب ثانیه داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[۰,۵]$ برابر است؟	خرداد ۹۹	۱/۵ نمره

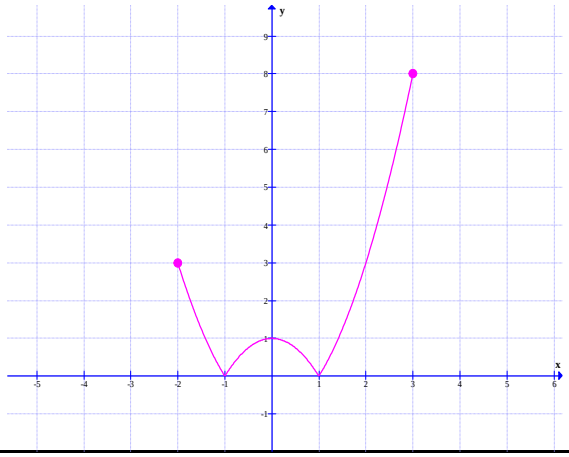
۷	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. آهنگ لحظه ای تغییر تابع $g(x)=۲\sin ۲x$ نسبت به x در $x=\frac{\pi}{۲}$ برابر ..... است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. آهنگ متوسط تغییر با شیب قاطع و آهنگ لحظه ای تغییر با شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۹	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+t^{۲}$ گرم است. الف : جرم این توده باکتری در بازه‌ی زمانی $۳\le t\le ۴$ به چه سرعتی افزایش می یابد؟ ب : آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t=۹$ چقدر است؟	خرداد ۹۹ خ	۱/۲۵ نمره
۱۰	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. سرعت لحظه ای در $t=۹$ برای متحرکی با معادله‌ی حرکت $f(t)=\sqrt{t}$ برابر ..... است.	شهریور۹۹	۰/۵ نمره

((فصل پنجم : کاربردهای مشتق))

***

اکسترمم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. اگر تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ صعودی باشد، علامت مشتق تابع f در این بازه ..... است.	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره
۲	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۲x+۴}$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ تعیین کنید.	خرداد ۹۸	۱/۵ نمره
۳	تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}$ در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟ راه حل خود را بنویسید.	خرداد ۹۸	۱/۲۵ نمره
۴	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. اگر تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی (a,b) صعودی باشد، علامت مشتق تابع f در این بازه ..... است.	تیر ۹۸	۰/۲۵ نمره
۵	درست یا نادرست بودن جملات زیر را با توجه به نمودار تابع f که در ذیل آورده شده، مشخص کنید. الف) نقطه ای به طول b مینیمم نسبی تابع f نیست. ب) نقطه ای به طول c یک نقطه‌ی بحرانی برای تابع f است. 	تیر ۹۸	۰/۵ نمره
۶	مقادیر اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ بیابید.	تیر ۹۸	۱/۷۵ نمره

۷	مقادیر اکسترمم های نسبی و مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}+x^{۲}$ را در بازه‌ی $[-۲,۳]$ به دست آورید.	شهریور ۹۸	۱/۷۵ نمره
۸	اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=۲x^{۳}+۳x^{۲}-۱۲x$ را در بازه‌ی $[-۱,۲]$ مشخص کنید.	دی ۹۸	۱/۲۵ نمره
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a)=۰$ و هم $f(a)=۰$	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۱۰	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. بزرگترین بازه ای از R که تابع $h(x)=x^{۳}-۱۲x+۴$ در آن نزولی اکید باشد، بازه‌ی ..... است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۱	تابع $f(x)=\|x^{۲}-۱\|$ در بازه‌ی $[-۲,۳]$ در نمودار زیر رسم شده است. الف : نقاط اکسترمم های نسبی تابع را در صورت وجود بیابید. ب : نقاط اکسترمم مطلق تابع را در صورت وجود بیابید. پ : آیا تابع f در بازه‌ی $[۰,۳]$ مشتق پذیر است؟ چرا؟ 	خرداد ۹۹ خ	۲ نمره
۱۲	نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}$ را مشخص کنید.	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۱۳	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۲}+\|x+۱\|$ را در بازه‌ی $[-۲,۲]$ بیابید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۷۵ نمره
۱۴	اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=۲x^{۳}+۳x^{۲}-۱۲x$ را در بازه‌ی $[-۱,۳]$ مشخص کنید.	شهریور ۹۹	۲ نمره

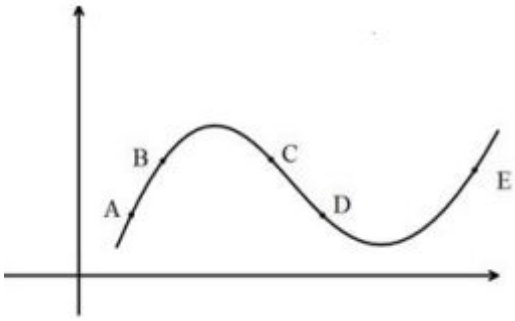
۱			

آزمون مشتق اوّل

۱	ضرایب a و b را در تابع $f(x)=-x^{۴}+ax+b$ طوری تعیین کنید که در نقطه‌ی (۱,۲) ماکزیمم نسبی داشته باشد.	دی ۹۷	۱/۵ نمره
۲	ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^{۳}+ax+b$ طوری تعیین کنید که در نقطه‌ی (۱,۲) ماکزیمم نسبی داشته باشد.	تیر ۹۸	۱ نمره
۳	اگر نقطه‌ی (۲,۱) نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^{۳}+bx^{۲}+d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۲۵ نمره

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه‌ی عطف

۱	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x)=-x^{۳}+۳x^{۲}+۱$ را به دست آورید.	دی ۹۷	۱ نمره
۲	مقادیر a و b را در تابع $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}-۱$ چنان بیابید که $A(۱,۱)$ نقطه‌ی عطف منحنی باشد.	خرداد ۹۸	۱/۲۵ نمره
۳	جهت تعقر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+۳x+۱$ را به دست آورید.	تیر ۹۸	۱ نمره
۴	ابتدا جهت تقعر تابع $y=\frac{x+۱}{x-۱}$ را مشخص کرده، سپس وجود نقطه‌ی عطف آن را بررسی کنید.	شهریور ۹۸	۱/۵ نمره

۵	شکل زیر را در نظر بگیرید. تعیین کنید که در کدام یک از پنج نقطه‌ی مشخص شده در نمودار الف : $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی اند. ب : $f'(x)$ منفی و $f''(x)$ مثبت است.  	دی ۹۸	۱ نمره
۶	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۱$ را مشخص کنید.	خرداد ۹۹	۲ نمره
۷	مقادیر b و a را در تابع $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+۱$ به ترتیب کدام یک از موارد زیر است. اگر $f(۱)=۲$ و $x=\frac{۱}{۲}$ طول نقطه‌ی عطف آن باشد. الف : $b=-۲$ و $a=۱$ ب : $b=-۴$ و $a=۴$ ج : $b=۴$ و $a=۴$ د : $b=۳$ و $a=-۲$	خرداد ۹۹ خ	۰/۵ نمره
۸	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x)=-x^{۳}+۳x^{۲}+۱$ را به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۲۵ نمره

رسم نمودار توابع

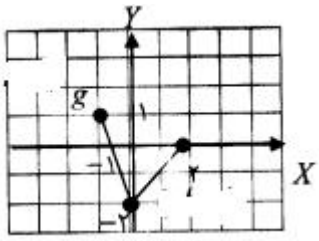
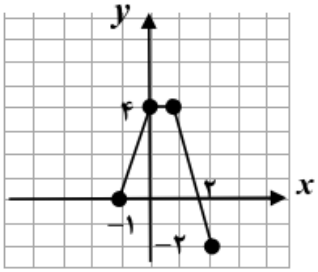
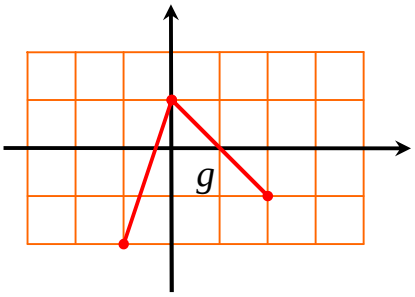
۱	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$ را رسم کنید.	دی ۹۷	۱/۷۵ نمره
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ را رسم کنید.	خرداد ۹۸	۱/۷۵ نمره
۳	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x+۲}$ را رسم کنید.	تیر ۹۸	۱/۵ نمره

۴	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۱$ را رسم کنید.	شهریور ۹۸	۱/۲۵ نمره
۵	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x}{x-۱}$ را رسم کنید.	دی ۹۸	۱/۷۵ نمره
۶	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ را رسم کنید.	خرداد ۹۹	۲ نمره
۷	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ را رسم کنید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۷۵ نمره
۸	جدول رفتار و نمودار تابع $y=x^{۳}+۳x^{۲}+۱$ را رسم کنید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۷۵ نمره
۹	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=x^{۳}-۳x+۱$ را رسم کنید.	شهریور۹۹	۲ نمره

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

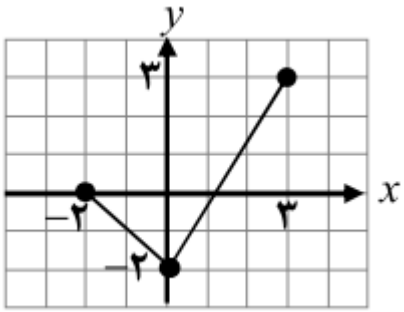
فصل اوّل حسابان ۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

تبدیل نمودار توابع

۱	$D_f=[-۱,۲]$ و $R_f=[-۲,۱]$ 
۲	$D_f=[-۱,۲]$ و $R_f=[-۲,۴]$ 
۳	نادرست
۴	برای رسم نمودار تابع g، ابتدا انقباض افقی برای $k=۲$ در راستای محور طول ها سپس انتقال یک واحد رو به پایین در راستای محور عرض ها $D_g=[-۱,۲]$ 
۵	الف : $g(x)=x^۳$ ب : محور طول ها

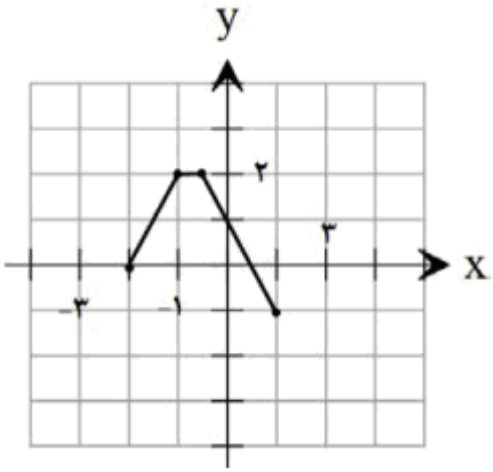
۶

$D_g = [-۲,۳]$



۷

دامنه $D = [-۲,۱]$ برد $R = [-۱,۲]$



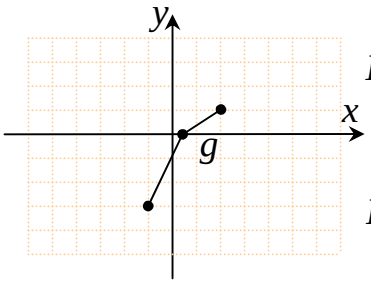
۸

ابتدا مختصات نقاط مهم تابع f را نوشته، سپس طول هر نقطه را نصف و عرض هر نقطه را یک واحد کم می کنیم.

$f:$	x	-۲	۱	۴
	y	-۲	۱	۲

$\rightarrow$

$g:$	x	-۱	۰/۵	۲
	y	-۳	۰	۱

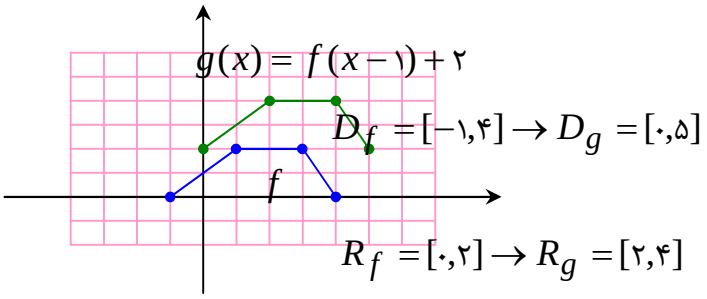


$Dg = [-۱,۲]$

$Rg = [-۳,۱]$

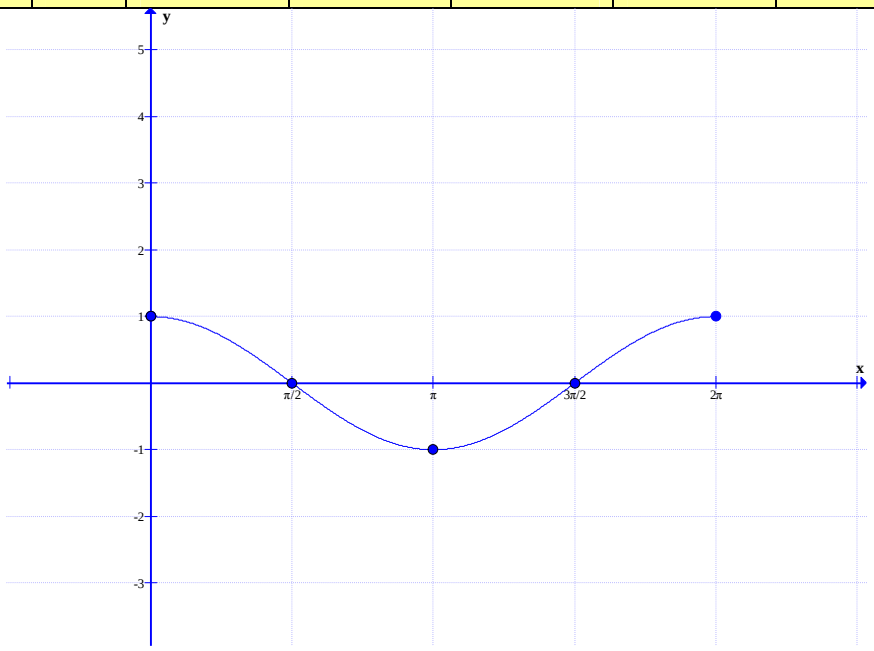
۹

$(۵,۰)$

۱۰	طبق قوانین تبدیلات ، کافی است نمودار تابع f را یک واحد به جلو و سپس دو واحد به سمت بالا منتقل کنید. 
۱۱	درست
۱۲	$[-۱,۰]$

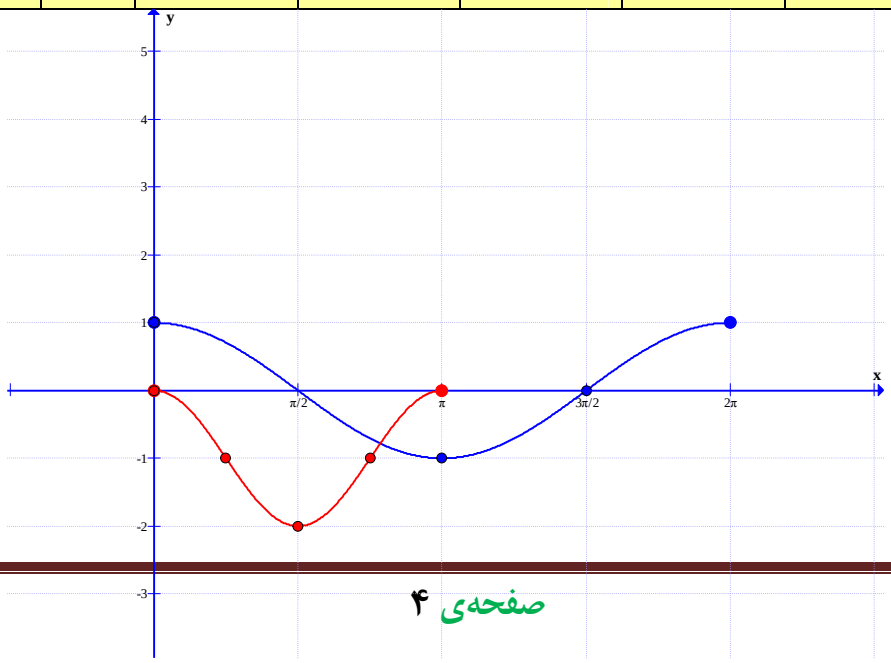
۱۳ برای رسم نمودار تابع $f(x)=\cos x$ ابتدا نقاط مهم فاصله‌ی داده شده را در نظر می گیریم.

f	x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
	y	۱	۰	-۱	۰	۱



حال برای رسم نمودار تابع $g(x)=\cos ۲x-۱$ کافی است که طول نقاط تـابع $f(x)=\cos x$ را نـصف و عرض نقاط را یک واحد کم کنیم.

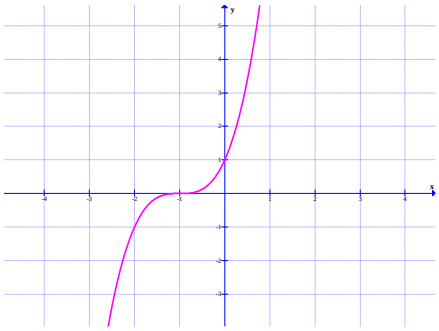
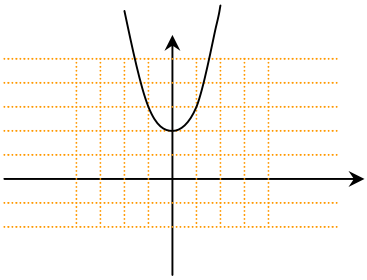
g	x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π
	y	۰	-۱	-۲	-۱	۱



تابع درجه سوّم و چند جمله ای

۱	۷
۲	نادرست
۳	درست

توابع یکنوا

۱	اکیداً صعودی 
۲	$(۲,+\infty)$
۳	$x+۱\leq ۲x-۳ \rightarrow x\geq ۴$
۴	نادرست
۵	$[\frac{۸}{۳},+\infty)$
۶	نادرست
۷	نمودار این تابع با دو واحد انتقال نمودار تابع $f(x)=x^۲$ به سمت بالا بدست می آید که یک سهمی می باشد. رأس سهمی نقطه‌ی $(۰,۲)$است. لذا بزرگترین بازه ای که تابع در آن صعودی اکید است بازه‌ی $(-\infty,۰)$ و بزرگترین بازه ای که تابع درآن نزولی اکید است بازه‌ی $(۰,+\infty)$ است. توجه این بازه ها را از طرف صفر هم می توان بسته نوشت. 

۸	درست
۹	نادرست
۱۰	صفر
۱۱	درست

تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

۱	-۲
۲	$f(-۱)=۰ \to ۱-a-۳=۰ \to a=-۲$ $f(۲)=۴-۴-۳=-۳$
۳	-۱
۴	$P(۲)=۰ \to ۴a+۲b=-۶ \quad , \quad P(-۱)=۰ \to a-b=۶$ $\begin{cases} ۲a+b=-۳ \\ a-b=۶ \end{cases} \to a=۱ \ , \ b=-۵$
۵	$P(x)=x^۳+ax^۲+bx+۱$ $x-۲=۰ \to x=۲$ $\Rightarrow f(۲)=۰ \to ۸+۴a+۲b+۱=۰ \to ۴a+۲b=-۹$ $x+۱=۰ \to x=-۱$ $\Rightarrow f(-۱)=-۱+a-b+۱=۰ \to a-b=۰$ $\Rightarrow a=b=-\frac{۳}{۲}$

۶	$x-۱=۰ \to x=۱ \Rightarrow p(۱)=۱+a+b$ $\xrightarrow{p(۱)=۴} ۱+a+b=۴ \to a+b=۳$ $x+۲=۰ \to x=-۲ \Rightarrow p(-۲)=-۸+۴a+b$ $\xrightarrow{p(-۲)=.۰} -۸+۴a+b=۰ \to ۴a+b=۸$ $\begin{cases} a+b=۳ \\ ۴a+b=۸ \end{cases} \to a=\frac{۵}{۳} \quad , \quad b=\frac{۴}{۳}$
۷	$p(x)=x^۳+ax^۲+bx+۱$ $x-۲=۰ \to x=۲$ $\Rightarrow p(x)\big\|_{x=۲}=(۲)^۳+a(۲)^۲+b(۲)+۱=۸+۴a+۲b+۱=۹+۴a+۲b$ $\xrightarrow{r=۰} ۹+۴a+۲b=۰ \to ۴a+۲b=-۹$ $x+۱=۰ \to x=-۱$ $\Rightarrow p(x)\big\|_{x=-۱}=(-۱)^۳+a(-۱)^۲+b(-۱)+۱=-۱+a-b+۱=a-b$ $\xrightarrow{r=۰} a-b=۰$ $\begin{cases} ۴a+۲b=-۹ \\ a-b=۰ \end{cases} \to a=\frac{-۳}{۲} \quad , \quad b=\frac{-۳}{۲}$
۸	نادرست
۹	$x-۱=۰ \to x=۱$ $y\big\|_{x=۱}=۴ \to (۱)^۳+a(۱)^۲+(۱)+b=۴ \to a+b=۲$ $x+۲=۰ \to x=-۲$ $y\big\|_{x=-۲}=۰ \to (-۲)^۳+a(-۲)^۲+(-۲)+b=۰ \to -۸+۴a-۲+b=۰ \to ۴a+b=۱۰$ $\begin{cases} a+b=۲ \\ ۴a+b=۱۰ \end{cases} \to a=\frac{۸}{۳} \quad , \quad b=\frac{-۲}{۳}$

$x-۲=۰ \to x=۲ \xrightarrow{P(x)=x^۳+ax^۲+bx-۲} P(۲)=۸+۴a+۲b-۲=۰$ $\to ۴a+۲b=-۶ \to ۲a+b=-۳$ $x+۱=۰ \to x=-۱ \xrightarrow{P(x)=x^۳+ax^۲+bx-۲} P(-۱)=-۱+a-b-۲=۳ \to a-b=۶$ $\to \begin{cases} ۲a+b=-۳ \\ a-b=۶ \end{cases} \to a=۱\ ,\ b=-۵$	۱۰

اتحاد های تکمیلی

$x^۵+۱=(x+۱)(x^۴-x^۳+x^۲-x+۱)$ $x^۶-۱=(x-۱)(x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)$	۱
$x^۶-۱=(x+۱)(x^۵-x^۴+x^۳-x^۲+x-۱)$	۲
$x^۵+۱=(x+۱)(x^۴-x^۳+x^۲-x+۱)$	۳

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل دوّم حسابان۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

دوره‌ی تناوب

۱	نادرست
۲	$\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}=\pi \rightarrow \lvert b\rvert=۲$ $\begin{cases}\lvert a\rvert+c=۳\\ -\lvert a\rvert+c=۳\end{cases}\rightarrow \lvert a\rvert=۳\ ,\ c=۰$ هر یک از توابع $y=۳\sin(۲x)$ یا $y=-۳\sin(۲x)$ می توانند جواب باشند.
۳	$T=\frac{۲\pi}{\lvert -\frac{\pi}{۴}\rvert}=\frac{۸\pi}{\pi}=۸$
۴	۲
۵	$\max(f)=۳$ و $\min(f)=-۱$
۶	$T=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$ $\max(f)=\lvert -۳\rvert+۱=۴$ $\min(f)=-\lvert -۳\rvert+۱=-۲$
۷	$\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}=\pi \rightarrow \lvert b\rvert=۲ \rightarrow b=\pm ۲$ $\begin{cases}\lvert a\rvert+c=۳\\ -\lvert a\rvert+c=۳\end{cases}\rightarrow \lvert a\rvert=۴\ ,\ c=۲$ هر یک از توابع $y=۴\sin(۲x)+۲$ یا $y=-۴\sin(۲x)+۲$ یا $y=۴\sin(-۲x)+۲$ یا $y=-۴\sin(-۲x)+۲$ می توانند باشند.

۸	۶π
۹	$\max(y)=\|a\|+c=۲+۱=۳$ $\min(y)=-\|a\|+c=-۲+۱=-۱$
۱۰	نمودار تابع از مبدأ مختصات می گذرد، لذا بهتر است تابع به صورت سینوسی باشد. $y=a\sin(bx)$ دوره‌ی تناوب نمودار تابع برابر π است. لذا : $T=\frac{۲\pi}{\|b\|}=\pi \rightarrow b=\pm ۲$ $\rightarrow y=a\sin(\pm ۲x)\rightarrow y=\pm a\sin(۲x)$ نمودار تابع از نقطه‌ی $(\frac{\pi}{۴},۲)$ می گذرد، پس : $\xrightarrow{y=\pm a\sin(۲x)} ۲=\pm a\sin(۲(\frac{\pi}{۴}))\rightarrow ۲=\pm a\sin(\frac{\pi}{۲})\xrightarrow{\sin(\frac{\pi}{۲})=۱} a=\pm ۲$ که با توجه به نمودار مقدار $a=-۲$ ، قابل قبول نیست. لذا معادله‌ی تابع در نهایت به شکل زیر خواهد شد. $\rightarrow y=۲\sin(۲x)$
۱۱	$T=\frac{۲\pi}{\|b\|}=\frac{۲\pi}{\|\frac{\pi}{۲}\|}=۴$ و $\min(y)=-\|a\|+c=-۲+(-۱)=-۳$
۱۲	$T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$ $\max(y)=\|-\pi\|+\sqrt{۵}=\pi+\sqrt{۵}$ $\min(y)=-\|-\pi\|+\sqrt{۵}=-\pi+\sqrt{۵}$

تابع تانژانت

۱	π

۲	نادرست
۳	درست
۴	الف : درست ب : نادرست
۵	$T=\frac{\pi}{\lvert b\rvert}=\frac{\pi}{\lvert ۱\rvert}=\pi$
۶	درست

معادلات مثلثاتی

۱	$\cos ۳x=\cos x\rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi+x\rightarrow x=k\pi\\ ۳x=۲k\pi-x\rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\end{cases}$
۲	$۲\cos^{۲}x-۱+\cos x+۱=۰\rightarrow ۲\cos^{۲}x+\cos x=۰\rightarrow \cos x(۲\cos x+۱)=۰$ $\cos x=۰\rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $۲\cos x+۱=۰\rightarrow \cos x=-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\alpha=\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}}x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$
۳	$\sin ۲x-\cos x=۰\rightarrow ۲\sin x\cos x-\cos x=۰\rightarrow \cos x(۲\sin x-۱)=۰$ $\rightarrow\begin{cases}\cos x=۰\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ ۲\sin x-۱=۰\rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۶}}\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}\end{cases}$
۴	$\sin ۳x=\sin ۲x\rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi+۲x\rightarrow x=۲k\pi\qquad k\in Z\\ ۳x=(۲k+۱)\pi-۲x\rightarrow x=\frac{(۲k+۱)}{۵}\pi\end{cases}$
۵	$\cos ۳x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۶}}۳x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\pm\frac{\pi}{۱۲}$

$\sin ۳x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۴}}\begin{cases}۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\to x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۱۲}\\ ۳x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}\to x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}\end{cases}\quad (k\in Z)$	۶
فرض کنیم که چنین مثلثی وجود داشته باشد. لذا $S=۸\sqrt{۲}\xrightarrow{۰<\theta<\pi}\frac{۱}{۲}(۴)(۸)\sin\theta=۸\sqrt{۲}\to\sin\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۴}}\begin{cases}\theta=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\\ \theta=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۴}\end{cases}$ حال مقدار θ مجاز را تعیین می کنیم. k: ۰ ، ۱ ، ۲ θ: $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ ، بیش از حد مجاز ، بیش از حد مجاز لذا دو مثلث با این شرایط وجود دارد.	۷
$۲(۱-\cos^۲ x)+۹\cos x+۳=۰\to -۲\cos^۲ x+۹\cos x+۵=۰$ $\xrightarrow{\Delta=۸۱+۴۰=۱۲۱}\begin{cases}\cos x=\frac{-۹+۱۱}{-۴}\to\cos x=-\frac{۱}{۲}\\ \cos x=\frac{-۹-۱۱}{-۴}\to\cos x=-۵\end{cases}$ غیر ممکن $\cos x=-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\alpha=\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}}x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\quad k\in Z$	۸
$\cos ۳x=\cos x\to\begin{cases}۳x=۲k\pi+x\\ ۳x=۲k\pi-x\end{cases}\to\begin{cases}۲x=۲k\pi\\ ۴x=۲k\pi\end{cases}\to\to\begin{cases}x=k\pi\\ x=\frac{k\pi}{۲}\end{cases}\quad (k\in Z)$	۹

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل سوّم حسابان۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

حدهای نامتناهی و حد در بی نهایت

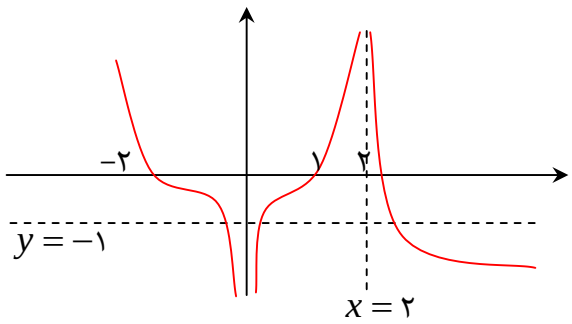
الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{۲x+۱}{۴-x^۲} = \frac{۵}{۰^-} = -\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۴x^۵+۳x^۳+۱}{-۳x^۵+۳x^۲+۳} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۴x^۵}{-۳x^۵} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۴}{-۳} = -\frac{۴}{۳}$	۱
درست	۲
۳	۳
الف) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} \frac{x^۲+x}{x^۲+۲x+۱} = \lim\limits_{x\to (-۱)^-} \frac{x(x+۱)}{(x+۱)^۲} = \lim\limits_{x\to (-۱)^-} \frac{x}{x+۱} = +\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{۵x^۳+۲x-۱}{-۲x^۳+۴} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{۵x^۳}{-۲x^۳} = -\frac{۵}{۲}$	۴
الف) $+\infty$ ب) ۱	۵
الف) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{x^۲-۱}{(x-۱)^۲} = \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)^۲} = \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{x+۱}{x-۱} = +\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-۲x^۳+x-۱) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^۳(-۲+\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{x^۳}) = \lim\limits_{x\to -\infty} (-۲x^۳) = +\infty$ پ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^۳+۱}{۲x^۳-۴x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^۳}{۲x^۳} = \frac{۱}{۲}$	۶
$-\infty$	۷

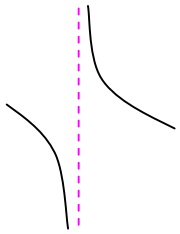
الف) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{[x]-۲}{۳-x} = \frac{[۳^+]-۲}{۳-۳^+} = \frac{۳-۲}{۰^-} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{۳x+۱}{x-۵} - \frac{۲}{x}) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۳x+۱}{x-۵} - \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۲}{x}$ $= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۳x}{x} - \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۲}{x} = ۳-۰ = ۳$	۸
الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{x^۲+x}{x^۲} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{x(x+۱)}{x^۲} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{x+۱}{x} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{۲x^۲-x+۱}{۴x^۳+۲x-۱} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{۲x^۲}{۴x^۳} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{۱}{۲x} = \frac{۱}{+\infty} = ۰$	۹
الف) $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{-۲x}{f(x)} = \frac{-۲a}{۰^-} = +\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{-۲x}{f(x)} = \frac{-۲a}{۰^+} = -\infty$ تابع $y = \frac{-۲x}{f(x)}$ در اطراف نقطه‌ی $x = a$ حد ندارد و رفتار بی کران دارد.	۱۰
الف) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{[x]-۲}{۳-x} = \lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{۳-۲}{۳-x} = \lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{۱}{۳-x} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-۲x^۲}{۴x^۳+۲x-۱} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-۲x^۲}{۴x^۳} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-۱}{۲x} = \frac{-۱}{+\infty} = ۰$	۱۱

۱۲	الف : $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{x+۱}{\tan x}=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\frac{\pi}{۲}+۱}{+\infty}=۰\\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{x+۱}{\tan x}=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{\frac{\pi}{۲}+۱}{-\infty}=۰\end{array}\right\}\to\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{x+۱}{\tan x}=۰$$ ب : $$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲+۱}{x^۳+۲x^۲+۱}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲}{x^۳}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

مجانب افقی و مجانب قائم

۱	$x^۳-۱=۰\to x^۳=۱\to x=۱$ این عدد ریشه‌ی صورت تابع نیست، لذا خط $x=۱$ مجانب قائم است. $$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳x}{x^۳-۱}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳x}{x^۳}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۳}{x^۲}=۰$$ لذا خط $y=۰$ مجانب افقی است.
۲	$$\lim\limits_{x\to-۱}f(x)=\lim\limits_{x\to-۱}\frac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۲x-۳}=\infty$$ $$\lim\limits_{x\to۳}f(x)=\lim\limits_{x\to۳}\frac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۲x-۳}=\lim\limits_{x\to۳}\frac{(x-۳)(x-۱)}{(x-۳)(x+۱)}=\frac{۱}{۲}$$ لذا طبق تعریف خط $x=-۱$ مجانب قائم منحنی f است. ولی خط $x=۳$ مجانب قائم تابع نمی باشد. **روش دوّم :** مقدار $x=-۱$ ریشه‌ی مخرج است ولی ریشه صورت نمی باشد، لذا خط $x=-۱$ مجانب قائم منحنی f است. ولی مقدار ریشه‌ی مخرج و صورت است . پس خط $x=۳$ مجانب قائم تابع نمی باشد.
۳	$y=-۲$ و $y=۱$

۴	مجانب های قائم $۱-x^۲=۰ \to x=۱ \quad , \quad x=-۱$ مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۱+۲x^۲}{۱-x^۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲}{-x^۲}=-۲\to y=-۲$
۵	مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+۳}{۲-x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{-x}=-۱\to y=-۱$ مجانب قائم $۲-x=۰\to x=۲$
۶	$x^۲-x=۰\to x(x-۱)=۰\to x=۱ \quad , \quad x=۰$ خط $x=۱$ مجانب قائم است ولی ریشه‌ی $x=۰$ ، ریشه‌ی صورت است و لذا نمی تواند مجانب قائم باشد. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲+x}{x^۲-x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲}{x^۲}=۱$ لذا خط $y=۱$ مجانب افقی است.
۷	نمودار های متفاوتی با این شرایط می توان رسم کرد. برای مثال : 
۸	$x^۲-۴=۰\to x^۲=۴\to x=\pm۲$ $D_f=R-\{+۲,-۲\}$ مجانب های قائم (ریشه های صورت نیستند.) $x^۲-۴=۰\to x=\pm۲$ مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^۲-۴}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{x}=۰\to y=۰$
۹	تکرار سئوال۷

۱۰	$D_f = R - \{+۱, -۱\}$ $\lvert x\rvert - ۱ = ۰ \to \lvert x\rvert = ۱ \to x = \pm ۱$ مجانب های قائم (ریشه های صورت نیستند.) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۲x+۵}{\lvert x\rvert - ۱} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۲x+۵}{x-۱} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۲x}{x} = ۲ \to y = ۲$ مجانب افقی $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۲x+۵}{\lvert x\rvert - ۱} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۲x+۵}{-x-۱} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۲x}{-x} = -۲ \to y = -۲$ مجانب افقی
۱۱	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{۱+۲x^۲}{۱-x^۲} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{۲x^۲}{-x^۲} = -۲ \to y = -۲$ مجانب افقی $۱ - x^۲ = ۰ \to -x^۲ = -۱ \to x^۲ = ۱ \to x = \pm ۱$ مجانب های قائم
۱۲	$x^۳ + x = ۰ \to x = ۰ \to \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{x+۱}{x^۳+x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{x+۱}{x^۳+x} = -\infty \end{cases}$  $x = ۰$
۱۳	معادله‌ی $x^۲ + bx + c = ۰$ دارای یک ریشه است. لذا : $x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{b}{۲} = -۱ \to b = ۲$ از طرفی $x = -۱ \xrightarrow{x^۲+bx+c=۰} (-۱)^۲ + b(-۱) + c = ۰ \xrightarrow{b=۲} ۱ - ۲ + c = ۰ \to c = ۱$

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل چهارم حسابان۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

مفهوم مشتق

۱	۱
۲	-۳
۳	

محاسبه‌ی مشتق تابع در یک نقطه

۱	$f'(۰)=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x^۲-۳x+۲)-(۰)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۱}(x-۲)=۱-۲=-۱$
۲	$f(x)=\sqrt{x-۲}\to f(۳)=\sqrt{۳-۲}=۱$ $f'(۳)=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x-۲}-۱}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x-۲}-۱}{x-۳}\times\frac{\sqrt{x-۲}+۱}{\sqrt{x-۲}+۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{\sqrt{x-۲}-۱}{x-۳}\times\frac{\sqrt{x-۳}+۱}{\sqrt{x-۳}+۱}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{(x-۲)-۱}{x-۳}\times\frac{۱}{\sqrt{x-۲}+۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x-۳}{x-۳}\times\frac{۱}{\sqrt{x-۲}+۱}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۱}{\sqrt{x-۲}+۱}=\frac{۱}{\sqrt{۳-۲}+۱}=\frac{۱}{۲}$ $m=\frac{۱}{۲}$ شیب خط مماس $y=m(x-x_۰)-y_۰$ $y=\frac{۱}{۲}(x-۳)-۱\to y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۵}{۲}$ معادله خط مماس

$f'(۱)=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x^۲-۳x)-(-۲)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}(x-۲)=-۱$	۳

مشتق پذیری و پیوستگی

تابع در نقطه‌ی داده شده مشتق پذیر نیست. زیرا: $f(۲)=۰$ $f'_+(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{\lvert x-۲\rvert-۰}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x-۲}=۱$ $f'_-(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{\lvert x-۲\rvert-۰}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱$ و $f'_+(۲)\neq f'_-(۲)$ می باشد.	۱
تابع f در $x=-۱$ پیوسته است. $f(-۱)=(-۱)^۲+(-۱)=۱-۱=۰$ $f'_+(-۱)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}\frac{\lvert x^۲+x\rvert-۰}{x+۱}=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}\frac{-x(x+۱)}{x+۱}=۱$ $f'_-(-۱)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\frac{\lvert x^۲+x\rvert-۰}{x+۱}=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\frac{x(x+۱)}{x+۱}=-۱$ مشتق های راست و چپ تابع هر دو متناهی و نابرابرند. پس $x=-۱$ نقطه‌ی گوشه ای تابع است.	۲

۳	کافی است که نشان دهیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim\limits_{x\to a}(x-a)(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})$ $=\lim\limits_{x\to a}(x-a)\times\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\circ\times f'(a)=\circ$ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=\circ\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$
۴	$f'(\cdot)=\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{\sqrt[۳]{x}-\cdot}{x-\cdot}=\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}=+\infty$
۵	$f'_+(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{\lvert x^۲-۴\rvert-\circ}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x-۲}$ $=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}(x+۲)=۴$ $f'_-(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{\lvert x^۲-۴\rvert-\circ}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{-(x^۲-۴)}{x-۲}$ $=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}-(x+۲)=-۴$ و چون $f'_+(۲)\neq f'_-(۲)$ پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۶	$f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{(x^۲+۳)-۴}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x+۱)=۲$ $f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{(۳x+۱)-۴}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{۳x-۳}{x-۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{۳(x-۱)}{x-۱}=۳$ و چون $f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$ پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.
۷	درست
۸	مشتق راست $f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{\lvert x^۲-۱\rvert-۰}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x+۱)=۲$ مشتق چپ $f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{\lvert x^۲-۱\rvert-۰}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{-(x^۲-۱)}{x-۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}-(x+۱)=-۲$ و چون $f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$ تابع در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق پذیر نیست.
۹	درست
۱۰	مماس قائم

۱۱	$f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x^۲}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}x=۰$ $f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}۱=۱$ و چون مشتقات چپ و راست تابع در نقطه‌ی نابرابرند، پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.
۱۲	نادرست

۱۳ تابع در $x=۱$ پیوسته است.

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(ax+b)=a+b$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۳-۲x)=۱-۲=-۱$

مقدار $f(۱)=(۱)^۳-۲(۱)=۱-۲=-۱$

$\Rightarrow a+b=-۱\to b+۱=-a$

مشتق راست و چپ تابع در $x=۱$ برابرند.

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(ax+b)-(-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{ax+b+۱}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{ax-a}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{a(x-۱)}{x-۱}=a$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x^۳-۲x)-(-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۳-۲x+۱}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x^۲+x-۱)(x-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}(x^۲+x-۱)=۱+۱-۱=۱$$

$f'_+(۱)=f'_-(۱)\to a=۱$

$a+b=-۱\xrightarrow{a=۱}b=-۲$

روش دوّم

$$f(x)=\begin{cases}ax+b & x>۱\\ x^۳-۲x & x\le ۱\end{cases}\quad\to\quad f'(x)=\begin{cases}a & x>۱\\ ۳x^۲-۲ & x\le ۱\end{cases}$$

$f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+} f'(x)=a$ و $f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۳x^۲-۲)=۱$

$f'_+(۱)=f'_-(۱)\to a=۱$

$a+b=-۱\xrightarrow{a=۱}b=-۲$

۱۴	$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = f(۰) = ۰$ $\left.\begin{array}{l} f'_+(۰) = \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{x^۲ - ۰}{x - ۰} = \lim\limits_{x\to ۰^+} x = ۰ \\ f'_-(۰) = \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{x^۲ - ۰}{x - ۰} = \lim\limits_{x\to ۰^-} x = ۰ \end{array}\right\} \to f'_+(۰) = f'_-(۰)$ لذا تابع داده شده در $x = ۰$ مشتق پذیر است.
۱۵	نادرست

تعبیر هندسی مشتق

۱	الف : a ب : d پ : b
۲	نادرست
۳	A
۴	نمودار (ب) : سهمی نمودار داده شده رو به پایین است. پس ضریب $x^۲$ منفی است. لذا در مشتق تابع ضریب x منفی خواهد بود. در نتیجه نمودار مشتق، خطی با شیب منفی است.
۵	نقطه: D — شیب: ۰ نقطه: C — شیب: ۲ نقطه: B — شیب: ۰/۵ نقطه: A — شیب: −۰/۵
۶	i) ب (E) ii) الف (مثبت) iii) ب (کمتر)
۷	الف) $A\left\vert\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.$, $B\left\vert\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right. \to m = f'(۲) = \dfrac{۳-۱}{۲-۰} = ۱$ ب) $y - ۳ = ۱(x - ۲) \to y = x + ۱$

۸

$f(۲)=۱۶$

$f'(x)=-۲x+۱۰ \rightarrow \quad f'(۲)=۶$ شیب خط مماس

معادله‌ی خط مماس $y-۱۶=۶(x-۲) \rightarrow y=۶x+۴$

۹

x	$f(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	−۰/۵

۱۰

با توجه به شیب خط مماس در نقاط تعیین شده

شیب	−۲	−۱	۰/۵	۲
نقطه	D	B	A	C

محاسبه‌ی مشتق

۱

$(f+g)'(۲)=f'(۲)+g'(۲)=۱+۲=۳$

$(fg)'(۲)=f'(۲)g(۲)+f(۲)g'(۲)=(۱)(-۳)+(۳)(۲)=-۳+۶=۳$

۲

۷

۳

$A\left|\begin{matrix}۲\\۴\end{matrix}\right.,\ B\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. \longrightarrow m=f'(۱)=\frac{۴-۰}{۲-۰}=۲ \quad , \quad f(۱)=۲$

$C\left|\begin{matrix}۰\\۴\end{matrix}\right.,\ D\left|\begin{matrix}۴\\۰\end{matrix}\right. \longrightarrow m=g'(۱)=\frac{۴-۰}{۰-۴}=-۱ \quad , \quad g(۱)=۳$

$h'(۱)=\frac{f'(۱)g(۱)-f(۱)g'(۱)}{g^{۲}(۱)}=\frac{(۲)(۳)-(۲)(-۱)}{۹}=\frac{۸}{۹}$

۴

۱۹

۵

$(۳f+۲g)'(۱)=۳f'(۱)+۲g'(۱)=۳(۳)+۲(۵)=۱۹$

مشتق گیری از توابع

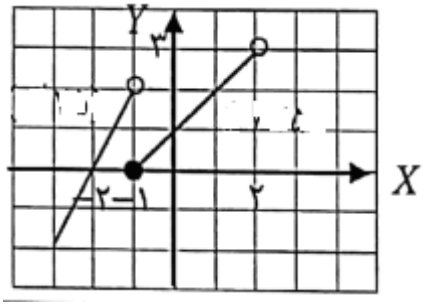
الف) $y=\dfrac{۲x(x^{۳}+۲x-۵)-(x^{۲}+۱)(۳x^{۲}+۲)}{(x^{۳}+۲x-۵)^{۲}}$ ب) $y=-۳\times ۲\cos(-۳x+۱)(-\sin(-۳x+۱))$	۱
الف) $y=\dfrac{۲x(x^{۳}+۲x+۱)-(x^{۲}-۱)(۳x^{۲}+۲)}{(x^{۳}+۲x+۱)^{۲}}$ ب) $y=-۶\times \sin(۲x)\cos^{۲}(۲x)$	۲
الف) $y=\dfrac{۲x(۵x^{۳}-۳x+۱)-x^{۲}(۱۵x^{۲}-۳)}{(۵x^{۳}-۳x+۱)^{۲}}$ ب) $y=۳\times ۲\cos(۲x+۱)\sin^{۲}(۲x+۱)$	۳
الف) $f'(x)=۴(۶x^{۲}+\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}})(۲x^{۳}+\sqrt[۳]{x}-۱)^{۳}$ ب) $f'(x)=-\dfrac{(۱)(x^{۲}+۱)-۲x(x)}{(x+۱)^{۲}}\times \sin(\dfrac{x}{x^{۲}+۱})$	۴
الف) $y'=\dfrac{۲(x^{۳}-۲x^{۲})-(۳x^{۲}-۴x)(۲x+۳)}{(x^{۳}-۲x^{۲})^{۲}}$ ب) $y'=۳\times ۲\cos(۲x+۱)\sin^{۲}(۲x+۱)$	۵
الف) $f'(x)=\dfrac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^{۲}-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^{۲}}$ ب) $g'(x)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x^{۲}+۵)+(۶x)\sqrt{x}$ پ) $h'(x)=۳\cos x\sin^{۲}x-۲\sin x\cos x$	۶

الف) $f'(x)=۳(۲x)(x^{۲}+۱)^{۲}(۵x-۱)+۵(x^{۲}+۱)^{۳}$ ب) $f'(x)=\dfrac{-۵\sin x(۱-\sin x)-(\cos x)(۵\cos x)}{(۱-\sin x)^{۲}}$	۷
الف) $f(x)=u.v\rightarrow f'(x)=u'.v+v'.u$ $u=۲\sqrt{x}\rightarrow u'=۲\times\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}=\dfrac{۱}{\sqrt{x}}$ $v=۵x^{۲}-۳x\rightarrow v'=۱۰x-۳$ $f'(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x}}(۵x^{۲}-۳x)+۲\sqrt{x}(۱۰x-۳)$ ب) $g(x)=\sin ۳x+\cos^{۲}(۴x^{۳}-۲)$ $g'(x)=۳\cos ۳x-۲(۱۲x^{۲})\sin(۴x^{۳}-۲)\cos(۴x^{۳}-۲)$	۸
الف) $f'(x)=(\dfrac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}})(x^{۳}+۱)+(۳x^{۲})(\sqrt{۳x+۲})$ ب) $g'(x)=۷(۲x+۳)(x^{۲}+۳x+۱)^{۶}$ پ) $h'(x)=\dfrac{(۲x-۵)(-۲x+۹)-(-۲)(x^{۲}-۵x+۷)}{(-۲x+۹)^{۲}}$	۹

مشتق تابع مرکب و قاعده زنجیری

	۱

مشتق پذیری روی یک بازه

۱	تابع f در $x=-۱$ پیوسته نیست، لذا در این نقطه مشتق پذیر هم نیست. در نتیجه در بازه‌ی $[-۲,۰]$ مشتق نیز پذیر نیست. 

مشتق مرتبه دوّم

۱	$f'(x)=۲\sin x\cos x+۲\sin ۲x=\sin ۲x+۲\sin ۲x=۳\sin ۲x$ $f''(x)=۶\cos ۲x\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۶}}f''(\frac{\pi}{۶})=۶\cos ۲(\frac{\pi}{۶})=۶\cos(\frac{\pi}{۳})=۶\times\frac{۱}{۲}=۳$

آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه ای تغییر

۱	$m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۲t\to m'(۹)=\frac{۱}{۲\sqrt{۹}}+۲(۹)=\frac{۱}{۶}+۱۸=\frac{۱۰۹}{۶}$
۲	$f(x)=x^۳-۲x\to\begin{cases}f(۲)=(۲)^۳-۲(۲)=۸-۴=۴\\ f(۰)=(۰)^۳-۲(۰)=۰\end{cases}$ آهنگ تغییر متوسط $\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}=\frac{۴-۰}{۲}=۲$ $f'(x)=۳x^۲-۲\xrightarrow{x=۱}f'(۱)=۳(۱)^۲-۲=۱$ آهنگ تغییر لحظه ای
۳	$m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۴t\to m'(۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}+۴(۴)=\frac{۱}{۴}+۱۶=\frac{۶۵}{۴}$
۴	$f'(x)=۴x+۵\Rightarrow\begin{cases}f'(-۱)=۱\\ f'(۲)=۱۳\end{cases}$ ۱۳ برابر
۵	درست

۶	$f(۵)=(۵)^۲-(۵)+۱۰=۲۵-۵+۱۰=۳۰$ $f(۰)=(۰)^۲-(۰)+۱۰=۱۰$ سرعت متوسط $\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰}=\frac{۳۰-۱۰}{۵}=۴$ سرعت لحظه ای $f'(t)=۲t-۱$ $f'(t)=۴\rightarrow ۲t-۱=۴\rightarrow t=\frac{۵}{۲}$
۷	۴-
۸	درست
۹	الف) $m(t)=\sqrt{t}+t^۲\rightarrow\begin{cases}m(۳)=\sqrt{۳}+(۳)^۲=۹+\sqrt{۳}\\ m(۴)=\sqrt{۴}+(۴)^۲=۲+۱۶=۱۸\end{cases}$ $\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{m(۴)-m(۳)}{۴-۳}=۱۸-(۹+\sqrt{۳})=۹-\sqrt{۳}$ ب) $m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۲t\rightarrow m'(۹)=\frac{۱}{۲\sqrt{۹}}+۲(۹)=\frac{۱}{۶}+۱۸=\frac{۱۰۹}{۶}$
۱۰	$\frac{۱}{۶}$

تهیه کننده :

جابر عامری عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل پنجم حسابان۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

اکسترمم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

۱	مثبت
۲	$f'(x)=\frac{۲x-۲}{۲\sqrt{x^۲-۲x+۴}}\xrightarrow{f'(x)=۰}۲x-۲=۰\to x=۱$ $f(۱)=\sqrt{۳}$ مینیمم مطلق $f(۰)=f(۲)=۲$ ماکزیمم مطلق
۳	$f'(x)=\frac{۲x}{(x^۲+۱)^۲}\xrightarrow{f'(x)=۰}x=۰$ x: $-\infty$ ، ۰ ، $+\infty$ $f'(x)$: - ، ۰ ، + $f(x)$: ↘ ، ۰ ، ↗ تابع در فاصله‌ی $(-\infty,۰)$ نزولی و در فاصله‌ی $(۰,+\infty)$ صعودی است.
۴	مثبت
۵	الف) نادرست ب) درست
۶	$f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x\to f'(x)=x^۲-۱\xrightarrow{f'(x)=۰}x^۲-۱=۰\to x=\pm۱$ $\to\begin{cases}x=۰\to f(۰)=۰\\x=۱\to f(۱)=-\frac{۲}{۳}\\x=-۱\to f(-۱)=\frac{۲}{۳}\\x=۲\to f(۲)=\frac{۲}{۳}\end{cases}$ لذا $f(-۱)=f(۲)=\frac{۲}{۳}$ ماکزیمم مطلق و $f(۱)=-\frac{۲}{۳}$ مینیمم مطلق است.

۷

$$f'(x)=x^{۲}+۲x \xrightarrow{f'(x)=۰} x=۰\ ,\ x=-۲$$

$$f(۰)=۰ \quad , \quad f(-۲)=\frac{۲}{۳} \quad , \quad f(۳)=۱۸$$

لذا ماکزیمم مطلق تابع برابر ۱۸ و مینیمم مطلق آن صفر می باشد.

x		-۲		۰	
f'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
f	$\nearrow$	$\frac{۴}{۳}$	$\searrow$	۰	$\nearrow$

همچنین مینیمم نسبی تابع صفر می باشد.

۸

$$f'(x)=۶x^{۲}+۶x-۱۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} \begin{cases} x=۱ \\ x=-۲ \end{cases}$$

ریشه‌ی $x=-۲$ قابل قبول نمی باشد.

$$f(-۱)=۱۳\ ,\ \ f(۲)=۴\ ,\ \ f(۱)=-۷ \ \Rightarrow \min:(۱\ ,-۷)\ ,\ \ \max:(-۱\ ,۱۳)$$

۹ نادرست

۱۰ $(-۲,۲)$

۱۱

الف : نقاط اکسترمم های نسبی تابع عبارتند از $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ و $(-۱,۰)$

ب : نقاط اکسترمم های مطلق تابع عبارتند از $(۳,۸)$ و $(۱,۰)$ و $(-۱,۰)$

پ : خیر، زیر در نقطه‌ی $(۱,۰)$ از این فاصله مشتق پذیر نیست.

۱۲

$x^{۲}+۱=۰ \rightarrow x^{۲}=-۱$ معادله ریشه ندارد. $\Rightarrow \quad D_f=R$

$$f'(x)=\frac{۱(x^{۲}+۱)-۲x(x)}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{-x^{۲}+۱}{(x^{۲}+۱)^{۲}} \xrightarrow{f'(x)=۰} -x^{۲}+۱=۰ \rightarrow x^{۲}=۱$$

$\rightarrow x=۱ \quad , \quad x=-۱$ نقاط بحرانی

۱۳

x	$-۲\le x<-۱$	$-۱\le x\le ۲$
$f(x)$	$f(x)=x^۲-x-۱$	$f(x)=x^۲+x+۱$
$f'(x)$	$f'(x)=۲x-۱$	$f'(x)=۲x+۱$
$f'(x)=۰$	$x=\frac{۱}{۲}$ غیر قابل قبول	$x=-\frac{۱}{۲}$

و چون $f'_+(-۱)\neq f'_-(-۱)$ ، لذا تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ مشتق پذیر نیست.

اکنون عرض نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ و $x=-\frac{۱}{۲}$ و $x=-۱$ را تعیین و مقایسه می کنیم.

$x=-۲\to f(-۲)=(-۲)^۲+|-۲+۱|=۴+۱=۵$

$x=۲\to f(۲)=(۲)^۲+|۲+۱|=۴+۳=۷$ ماکزیمم مطلق

$x=-\frac{۱}{۲}\to f(-\frac{۱}{۲})=(-\frac{۱}{۲})^۲+|-\frac{۱}{۲}+۱|=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$ مینیمم مطلق

$x=-۱\to f(-۱)=(-۱)^۲+|-۱+۱|=۱$

۱۴

$f'(x)=۶x^۲+۶x-۱۲\xrightarrow{f'(x)=۰}۶x^۲+۶x-۱۲=۰\xrightarrow{\div ۶}x^۲+x-۲=۰$

$\to x=۱\quad,\quad x=-۲$

$$\left.\begin{array}{l} f(-۱)=۱۳\\ f(۱)=-۷\\ f(۳)=۴۵\end{array}\right\}\to \min:(۱,-۷)\quad,\quad \max:(۳,۴۵)$$

بهینه سازی

۱

آزمون مشتق اوّل

$f(x)=-x^{۴}+ax+b \to f'(x)=-۴x^{۳}+a \xrightarrow{f'(۱)=۰} -۴+a=۰ \to a=۴$ $f(۱)=۲ \to -۱+۴+b=۲ \to b=-۱$	۱
$f(x)=x^{۳}+ax+b \to f'(x)=۳x^{۲}+a \xrightarrow{f'(۱)=۰} ۳+a=۰ \to a=-۳$ $f(x)=x^{۳}+ax+b \xrightarrow{f(۱)=۲} ۱+a+b=۲ \xrightarrow{a=-۳} b=۴$	۲
$f(x)=x^{۳}+bx^{۲}+d \xrightarrow{f(۲)=۱} ۱=۸+۴b+d \to ۴b+d=-۷$ $f'(x)=۳x^{۲}+۲bx \xrightarrow{f'(۲)=۰} ۰=۱۲+۴b \to b=-۳$ $۴b+d=-۷ \xrightarrow{b=-۳} -۱۲+d=-۷ \to d=۵$	۳

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه‌ی عطف

$f'(x)=-۳x^{۲}+۶x \to f''(x)=-۶x+۶ \xrightarrow{f''(x)=۰} x=۱$ x: $-\infty$ ، ۱ ، $+\infty$ y'': $+$ ، ۰ ، $-$ y: $\cup$ ، ۳ ، $\cap$ عطف نقطه‌ی عطف $(۱,۳)$	۱
$f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}-۱ \xrightarrow{f(۱)=۱} a+b-۱=۱ \to a+b=۲$ $f'(x)=۳ax^{۲}+۲bx \to f''(x)=۶ax+۲b \xrightarrow{f''(۱)=۰} ۶a+۲b=۰$ $\to \begin{cases} a+b=۲ \\ ۶a+۲b=۰ \end{cases} \to a=-۱ \ , \ b=۳$	۲

۳

$$f(x)=x^{۳}+۳x+۱\rightarrow f'(x)=۳x^{۲}+۳\rightarrow f''(x)=۶x$$

$$\xrightarrow{f''(x)=۰}۶x=۰\rightarrow x=۰$$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
y''	$-$	۰	$+$
y	$\cap$	۱	$\cup$
		عطف	

نقطه‌ی عطف $(۰,۱)$

۴

$$y'=\frac{-۲}{(x-۱)^{۲}}\quad,\quad y''=\frac{۴}{(x-۱)^{۳}}$$

$$x-۱=۰\rightarrow x=۱$$

در بازه‌ی $(۱,+\infty)$ تقعر رو به بالا و در بازه‌ی در بازه‌ی $(-\infty,۱)$ تقعر رو به پایین است.

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f''	$-$		$+$
f	۱ $\cap$ $-\infty$		$+\infty$ $\cup$ ۱

تابع نقطه‌ی عطف ندارد.

۵

الف : نقطه‌ی C ب : نقطه‌ی D

۶

$$f'(x)=۳x^{۲}+۶x$$

$$f''(x)=۶x+۶\xrightarrow{f''(x)=۰}۶x+۶=۰\rightarrow x=-۱$$

$$f(-۱)=(-۱)^{۳}+۳(-۱)^{۲}+۱=-۱+۳+۱=۳$$

لذا نقطه‌ی $(-۱,۳)$ نقطه‌ی عطف نمودار تابع است. جهت تقعر را نیز می توان به صورت زیر تعیین کرد.

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
y''	$-$	۰	$+$
y	$-\infty$ ∩	۳ عطف	$+\infty$ ∪

۷

$$f'(x)=۳ax^{۲}+۲bx\rightarrow f''(x)=۶ax+۲b$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}}۶a(\frac{۱}{۲})+۲b=۰\rightarrow ۳a+۲b=۰$$

$$f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+۱\xrightarrow{f(۱)=۲}a(۱)^{۳}+b(۱)^{۲}+۱=۲\rightarrow a+b=۱$$

$$\begin{cases}۳a+۲b=۰\\ a+b=۱\end{cases}\rightarrow a=-۱\quad,\quad b=۳$$

۸

$$f'(x)=-۳x^{۲}+۶x\rightarrow f''(x)=-۶x+۶\xrightarrow{f''(x)=۰}-۶x+۶=۰\rightarrow x=۱$$

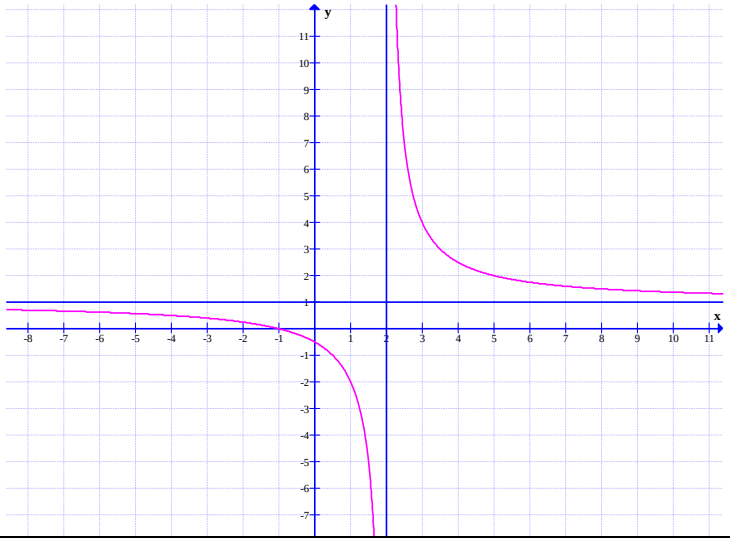
x	$-\infty$	۱	$+\infty$
y''	$+$	۰	$-$
y	$+\infty$ ∪	۳ عطف	$-\infty$ ∩

رسم نمودار توابع

۱

$y' = \dfrac{-۳}{(x-۲)^۲}$ و مجانب افقی $y = ۱$ و مجانب قائم $x = ۲$

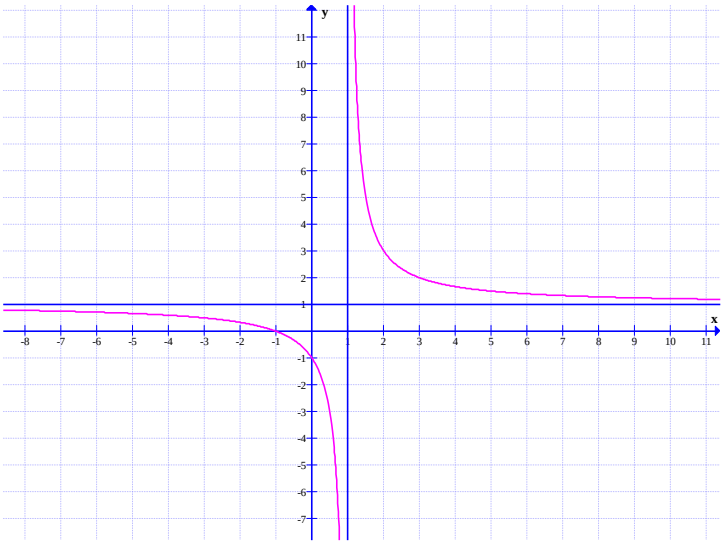
x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y'		—	‖	—	
y	۱	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۱



۲

$y' = \dfrac{-۲}{(x-۱)^۲} < ۰$ و مجانب افقی $y = ۱$ و مجانب قائم $x = ۱$

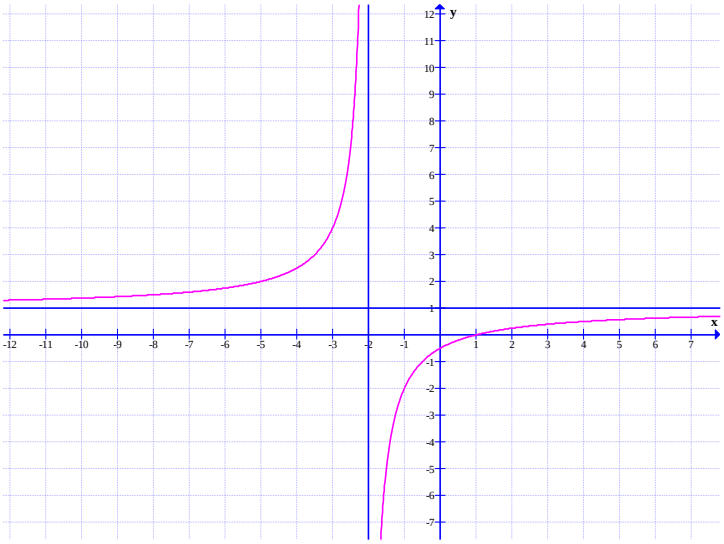
x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		—	‖	—	
y	۱	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۱



۳

$y' = \frac{۳}{(x-۲)^۲}$ و مجانب افقی $y = ۱$ و مجانب قائم $x = -۲$

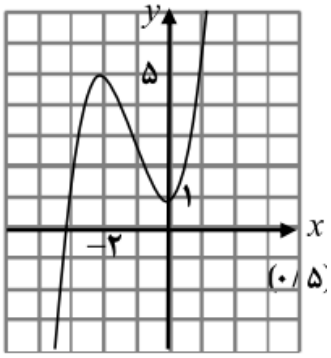
x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$+$	
y	۱	$\nearrow$	$+\infty \|\|$	$\nearrow$	۱



۴

$y' = ۳x^۲ + ۶x \xrightarrow{y'=۰} x = ۰ \ , \ x = -۲$

x	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
f'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	۵	$\searrow$	۱	$\nearrow$	$+\infty$
			ماکزیمم		مینیمم		

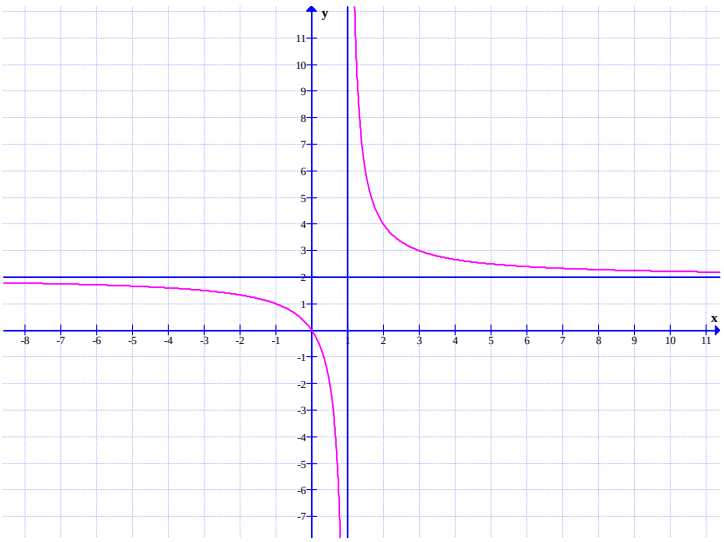


۵

$$f'(x)=\frac{-۲}{(x-۱)^{۲}}<۰$$

مجانب قائم $x=۱$ و مجانب افقی $y=۲$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	
f	۲	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	۲

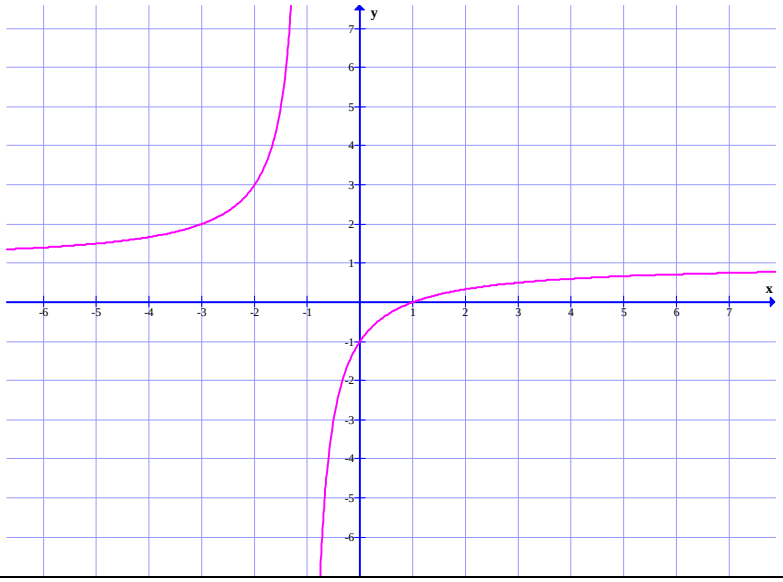


۶

مجانب قائم $x=-۱$ مجانب افقی $x=۱$

$$f'(x)=\frac{۱(x+۱)-۱(x-۱)}{(x+۱)^۲}=\frac{۲}{(x+۱)^۲}>۰$$

x	$-\infty$	-۱	$+\infty$
y'	$+$		$+$
	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$



۷

مجانب قائم $x-۱=۰ \to x=۱$

$D_f = R-\{۱\}$

مجانب افقی

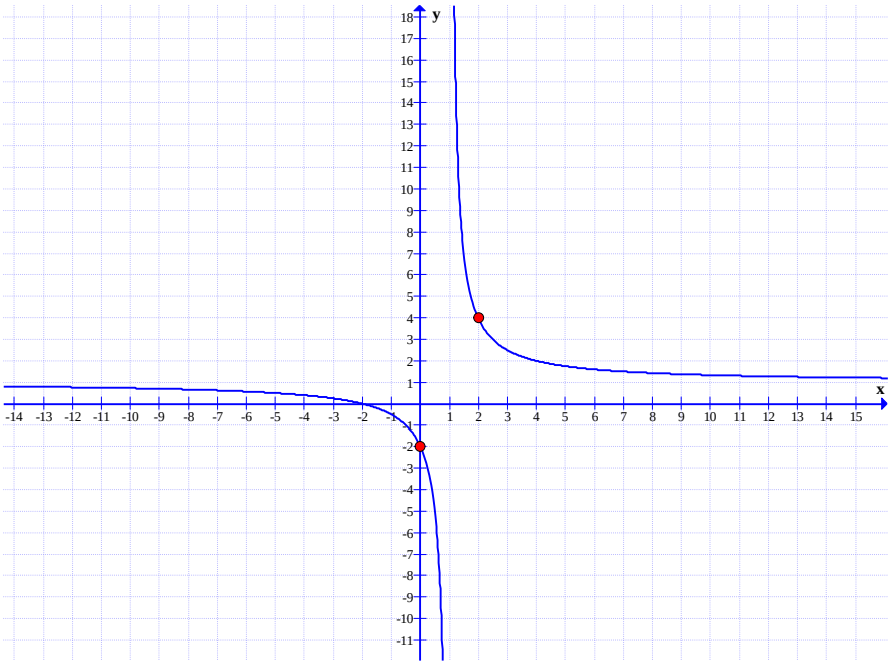
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+۲}{x-۱} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x} = ۱ \to y=۱$$

$$f'(x) = \frac{۱(x-۱)-۱(x+۲)}{(x-۱)^۲} = \frac{-۳}{(x-۱)^۲} < ۰$$

نقاط کمکی $(۰,-۲)$ و $(۲,۴)$

جدول تغییرات

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		—		—	
y	-۱	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۱



۸

$D_f = R$

$y = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۱ \rightarrow y' = ۳x^{۲} + ۶x \xrightarrow{y'=۰} ۳x^{۲} + ۶x = ۰ \rightarrow ۳x(x+۲) = ۰$

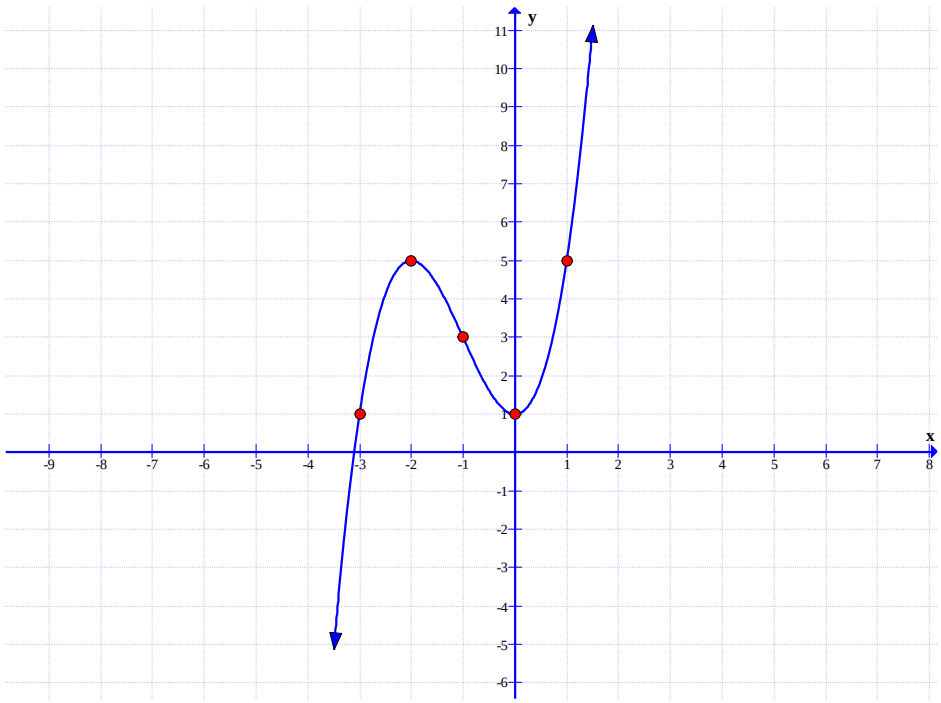
$\rightarrow x = ۰ \quad , \quad x = -۲$

$y'' = ۶x + ۶ \xrightarrow{y''=۰} ۶x + ۶ = ۰ \rightarrow x = -۱$

x	$-\infty$	-۲	-۱	۰	$+\infty$
y'	+	۰	-	۰	+
y	$-\infty$	۵	۳	۱	$+\infty$
	↗	max	↘	min	↗

$x = -۳ \rightarrow y = -۲۷ + ۲۷ + ۱ = ۱ \rightarrow A(-۳,۱)$ نقطه‌ی کمکی

$x = ۱ \rightarrow y = ۱ + ۳ + ۱ = ۵ \rightarrow B(۱,۵)$ نقطه‌ی کمکی

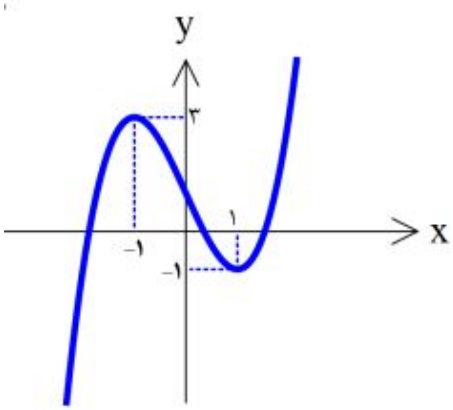


۹

$y' = ۳x^۲ - ۳ \xrightarrow{y'=۰} ۳x^۲ - ۳ = ۰ \rightarrow x = \pm ۱$ نقاط بحرانی

$y'' = ۶x \xrightarrow{y''=۰} ۶x = ۰ \rightarrow x = ۰$ نقطه‌ی عطف

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
y''		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
y	$-\infty$	↗	۳	↘	۱	↘	-۱	↗	$+\infty$
			max				min		



تهیه کننده:

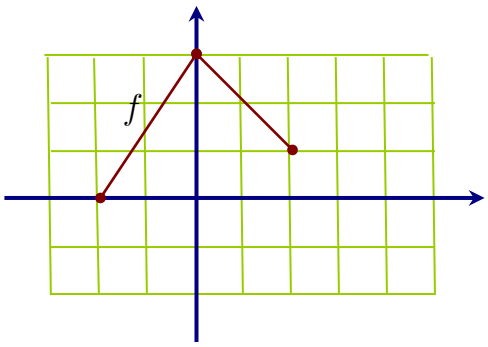
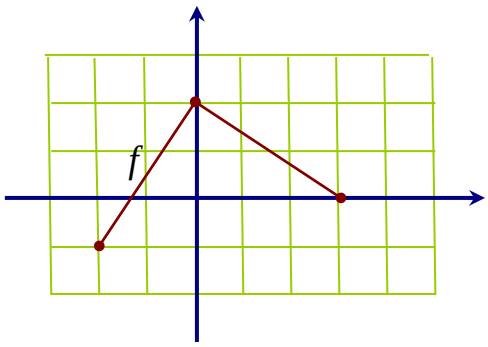
جابر عامری عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

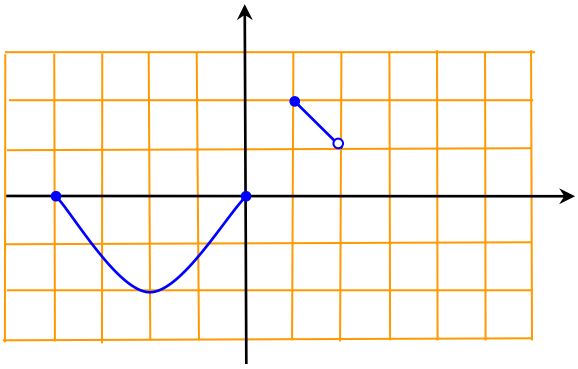
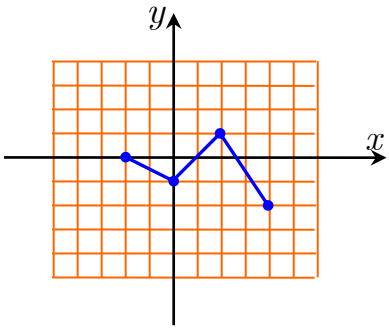
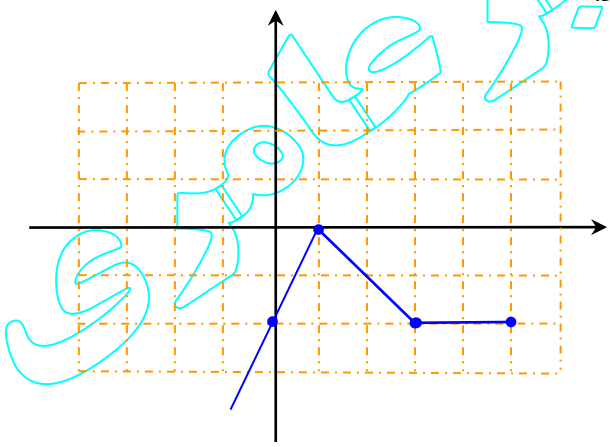
فصل اوّل

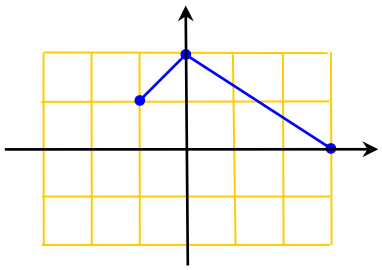
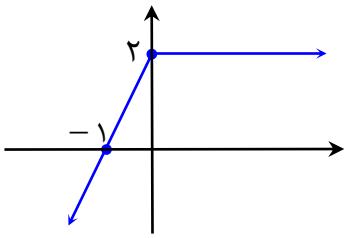
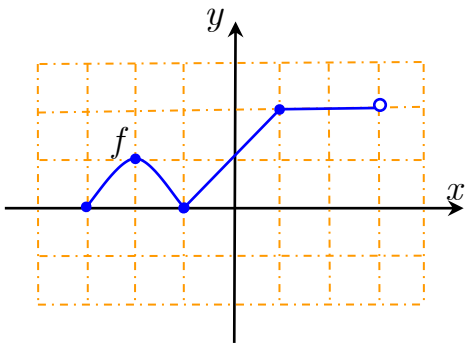
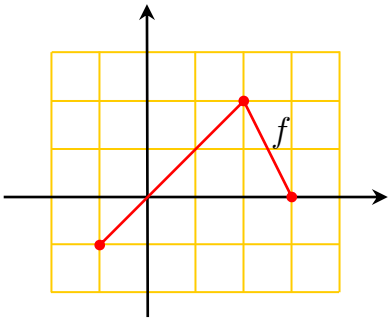
((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۱ : تبدیل نمودار توابع

۱	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(x-۱)$ را رسم کرده و دامنه تابع g را تعیین کنید.  	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۲	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید. (خارج کشور)  	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۳	الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازه‌ی $[۰,۴]$ رسم کنید. ب) به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۴	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. الف) نقطه‌ی $(-۸,۶)$ روی نمودار $y=f(x)$ با نقطه‌ی $(-۸,۱۲)$ روی نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ متناظر است. ب) نمودار تابع $y=-(x-۳)^۳$ را می‌توان با ۳ واحد انتقال نمودار $y=-x^۳$ به سمت راست رسم کرد.	دی ۱۴۰۱	۰/۵ نمره

۵	جای خالی را با عدد یک کلمه‌ی مناسب کامل کنید. اگر برد تابع $y=\sqrt{x}$ بازه‌ی $[0,2]$ باشد، برد تابع $y=2+\sqrt{x-2}$ برابر ..... است.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۶	نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(1-x)+1$ را رسم کنید. 	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره
۷	نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x)=-3f(\frac{x}{2})+2$ را رسم کرده و سپس برد تابع $g(x)$ را تعیین کنید.  	دی ۱۴۰۲	۱ نمره
۸	نمودار تابع $f(x)$ در زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(2x-1)$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید. 	خرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره
۹	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. اگر نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در راستای محور xها، دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم و آن را $g(x)$ بنامیم. آن‌گاه نمودار تابع $g^{-1}(x)$ از ناحیه‌ی ..... محورهای مختصات نمی‌گذرد.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره

۱۰	الف) اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y=f(۲x+۱)$ را به کمک آن رسم کنید. ب) اگر دامنه‌ی تابع g بازه‌ی $[-۲,۴]$ باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $k(x)=۳g(-۲x)$ را به دست آورید.		مرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۱۱	نمودار تابع $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. الف) نمودار تابع $g(x)=-۳f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید. ب) مقدار $g(۵)$ را به دست آورید.		دی ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۲	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر تابع $g(x)=۳f(\frac{۱}{۲}x)+۱$ باشد، آن‌گاه؛ الف) دامنه و برد تابع g را به صورت بازه بنویسید. ب) اگر $A=(-۲,۱)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آن‌گاه نقطه‌ی متناظر A، روی نمودار تابع g را بنویسید.		خرداد ۱۴۰۴	۱/۵ نمره
۱۳	در شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-۲f(\frac{x}{۲})+۱$ را رسم کنید.		شهریور ۱۴۰۴	۱ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل اوّل

((حسابان۲))

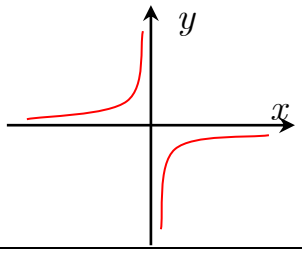
***

درس ۱ : توابع چندجمله‌ای

۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. تابع $f(x)=(x-۲)^۳+۱$ را در نظر بگیرید. نمودار $f^{-۱}$ از ناحیه‌ی ..... محورهای مختصات عبور نمی‌کند.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره

توابع یکنوا (توابع صعودی و نزولی)

۱	ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x$ را رسم نمایید. سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) تابع $y=-\log_۵^x+۲$ در دامنه‌ی خود یک تابع اکیداً یکنوا است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۳	نمودار $f(x)=(x-۱)^۳+۱$ را رسم کنید. سپس نزولی یا صعودی بودن تابع را در دامنه‌ی آن بررسی کنید. (خارج از کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۴	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. اگر تابع در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع در آن فاصله ..... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۵	اگر $(\frac{۱}{۳})^{۲x+۱}\leq\frac{۱}{۲۷}$ باشد. حدود x را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع $f(x)=x^۲-۴x$ روی بازه‌ی $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۷	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. اگر مقدار a برابر ..... باشد، تابع $f(x)=ax+b$ هم صعودی و هم نزولی است.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۸	نمودار تابع $g(x)=x^۳-۳x^۲+۳x$ را به کمک انتقال نمودار تابع $f(x)=x^۳$ رسم کنید. سپس یکنوایی تابع $g(x)$ را در تمام دامنه‌ی خود، بررسی کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۱ نمره
۹	اگر $(\frac{۱}{۵})^{۲x+۱}\leq\frac{۱}{۱۲۵}$ باشد، حدود x را بیابید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره

۱۰	با توجه به نمودار تابع مقابل، تعیین کنید: الف) تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً یکنوا است. ب) آیا تابع در کل دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا است؟ 	شهریور ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۱۱	ابتدا نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}(x-۲)^۳ & x\geq ۱\\ -۲ & ۰\leq x<۱\\ \lvert x+۱\rvert & x<۰\end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، تابع $f+g$ نیز در آن فاصله اکیداً نزولی است.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۱۳	نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & x<۰\\ x^۲ & x>۰\end{cases}$ را رسم کنید. بزرگترین بازه‌ای که این تابع در آن اکیداً صعودی است را بنویسید.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره
۱۴	نمودار تابع $f(x)=-(x-۲)^۳+۱$ را به کمک نمودار تابع $y=x^۳$ رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن تابع f را بررسی کنید.	دی ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۵	اگر $(\frac{۱}{۲})^{۲x-۳}\leq(\frac{۱}{۲})^{x+۱}$ باشد، حدود x را به دست آورید.	دی ۱۴۰۳	۰/۵ نمره
۱۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x)=(۱-x)^۳$، تابعی اکیداً نزولی است.	خرداد ۱۴۰۴	۰/۲۵ نمره
۱۷	اگرتوابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است.	شهریور ۱۴۰۴	۱ نمره

تقسیم و بخش‌پذیری چندجمله‌ای

۱	باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=۸x^۳-۴x^۲+۲$ را بر $۲x+۱$ به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای‌های $p(x)=x^۳+ax+۱$ و $q(x)=۲x^۲-x+۱$ بر $x+۱$ یکسان می‌باشد، مقدار a را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=x^۴+kx^۲-۳$ بر $x+۱$ برابر ۲ باشد، k را تعیین کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۴	در چندجمله‌ای $P(x)=x^۳+ax^۲+b$، مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ برابر -۱ و $P(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره

۵	اگر چند جمله ای $x^{۲}+ax-۸$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۶	مقادیر a و b را چنان بیابید که عبارت $P(x)=x^{۳}-ax+b$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x+۱$ برابر ۳ باشد.	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره
۷	اگر باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=۳x^{۲}+mx+۲m+۱$ بر $x-۲$ برابر ۳ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=mx^{۲}-mx+۳$ بر $x+۲$ را تعیین کنید.	دی ۱۴۰۲	۱ نمره
۸	اگر چندجمله‌ای $P(x)=x^{۳}+mx+۲$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x+۱$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره
۹	اگر چندجمله‌ای $p(x)=x^{۳}+kx^{۲}+۲$ بر $x-k$ بخش‌پذیر باشد، مقدار k را بیابید.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره
۱۰	اگر چندجمله‌ای $P(x)=x^{۲}+a-۲$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد. مقدار a را بیابید.	دی ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۱	مقدار a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x)=۲x^{۳}+ax^{۲}-bx+۲$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x-۱$ برابر ۲ باشد.	خرداد ۱۴۰۴	۱/۲۵ نمره
۱۲	اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=۲x^{۳}+mx-۱$ بر $x+۲$ برابر با ۱- باشد، مقدار m را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۴	۱ نمره

اتحادهای جبری تکمیلی و کاربرد

۱	چندجمله‌ای $x^{۵}+۳۲$ را بر حسب عامل $x+۲$ تجزیه کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	عبارت $\frac{x^{۵}+۱}{x+۱}$ را ساده کنید.	دی ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. عبارت $x^{۱۶}+۱$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۴	چند جمله‌ای $x^{۵}-۱$ را طوری تجزیه کنید که $x-۱$ یک عامل آن باشد.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۵ نمره
۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر n عدد طبیعی زوج و a عدد حقیقی باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای $x^{n}+a^{n}$ بر $x+a$ بخش‌پذیر است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

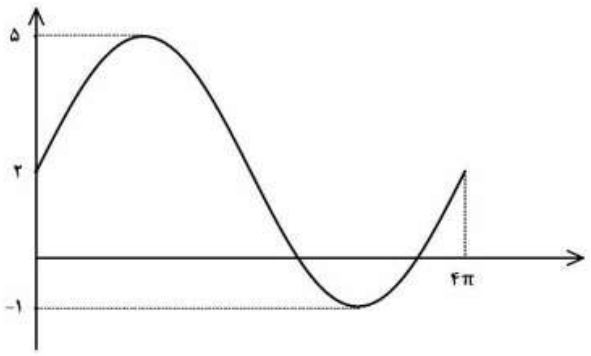
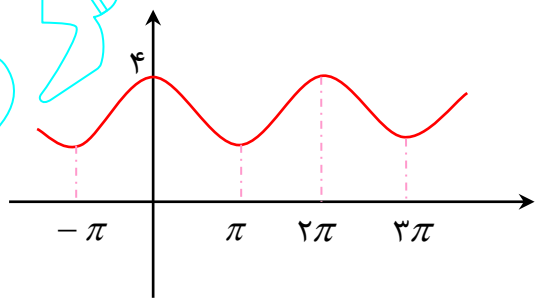
جابر عامری

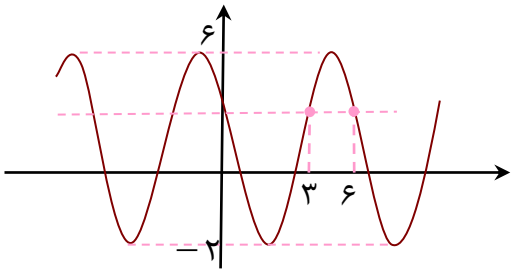
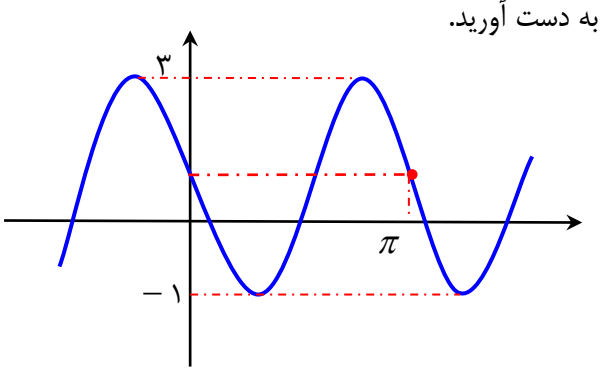
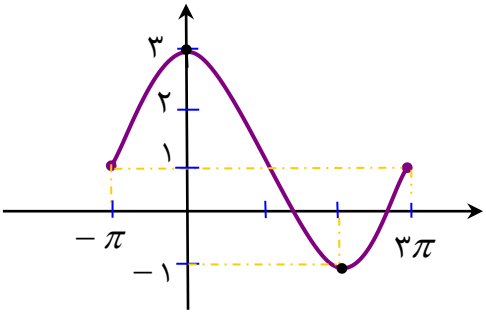
فصل دوم

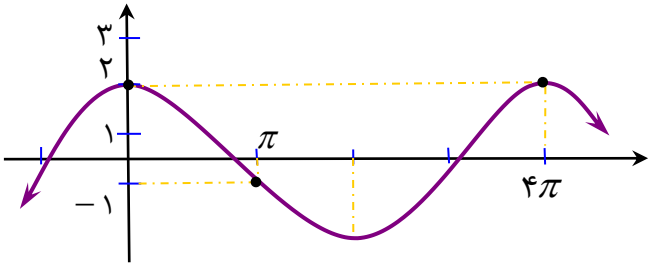
((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۱ : تناوب و توابع متناوب

۱	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. دوره‌ی تناوب تابع $y = ۷\sin(\frac{-\pi}{۲}x) + ۲$ برابر ..... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	ضابطه‌ی تابعی به فرم $y = a\sin bx + c$ را بنویسید که دوره‌ی تناوب آن ۳ ، مقدار ماکزیمم آن ۹ و مقدار مینیمم آن ۳ باشد. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه‌ی $y = a\sin bx + c$ است. مقادیر a و b و c و ضابطه‌ی آن را مشخص نمایید.  	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	نمودار تابع $f(x) = a + \cos bx$ به صورت زیر است. حاصل $a+b$ را به دست آورید. $(b > ۰)$  	دی ۱۴۰۱	۱ نمره
۵	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. دوره‌ی تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = ۳\sin ۲x$ ، به ترتیب برابر ..... و ..... است.	دی ۱۴۰۱	۰/۵ نمره

۶	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. اگر دوره‌ی تناوب تابع $y=\sin bx$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد، مقدار b برابر ..... است.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۷	ضابطه‌ی تابعی به صورت $y=a\cos bx+c$ را بنویسید که دوره‌ی تناوب آن ۲ ، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن ۱− باشد.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. دوره‌ی تناوب تابع $f(x)=۵\cos\frac{x}{۲}+۱$ برابر با ۴π است	دی ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۹	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه‌ی $f(x)=a\sin(bx)+c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه‌ی آن را بنویسید.  	دی ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۰	نمودار داده شده در شکل زیر مربوط به تابع با ضابطه‌ی $y=a\sin bx+c$ است. با فرض $a>۰$ ، مقادیر a و b و c را به دست آورید.  	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۱	نمودار داده شده در شکل مقابل مربوط به تابع با ضابطه‌ی $y=a\cos(bx)+c$ است. اگر $b<۰$ باشد، مقادیر a و b و c را به دست آورید. (راه حل نوشته شود.)  	مرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره

۱۲	قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=a\cos bx+c$ به صورت زیر است. مقادیر a و b و c را بیابید. 	دی ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره
۱۳	دوره‌ی تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=۲-۳\sin ۴x$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۴	۰/۵ نمره
۱۴	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y=۲\sin(۳x)-۱$ را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۴	۰/۷۵ نمره

معرفی تابع تانژانت

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) در بازه‌ی $\frac{۳\pi}{۲}<\theta<۲\pi$، مقدار $\tan\theta$ از مقدار $\sin\theta$ کوچکتر است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید. (خارج کشور) برد تابع تانژانت ($y=\tan x$) برابر ..... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع تانژانت در هر بازه‌ای که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۴	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. دامنه‌ی تابع $y=\tan(۳x)$ برابر ..... است.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع تانژانت ($f(x)=\tan x$)، در بازه‌ی $(-\pi,\pi)$ تابعی صعودی است.	دی ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y=\tan x$ در مجموعه‌ی $[۰,۲\pi]-\{\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\}$، اکیداً صعودی است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۷	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. برد تابع $y=\tan x$ با دامنه‌ی $[\frac{\pi}{۲},\pi]-\{\frac{\pi}{۲}\}$ برابر ..... است.	دی ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دامنه‌ی تابع $y=\tan x$، برابر با مجموعه‌ی $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq ۲k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ است.	خرداد ۱۴۰۴	۰/۲۵ نمره
۹	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. الف) اگر $\tan\alpha=m+۲$ و $۰\le\alpha\le\frac{\pi}{۴}$، آن‌گاه بیشترین مقدار ممکن m برابر با ..... است.	شهریور ۱۴۰۴	۰/۲۵ نمره

فصل دوم

((حسابان ۲))

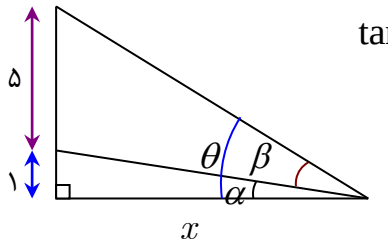
❋❋❋

درس ۲ : معادلات مثلثاتی

۱	معادله‌ی مثلثاتی $\sin ۲x - \cos x = ۰$ را حل کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۲	معادله‌ی مثلثاتی $\sin ۲x - \cos x = ۰$ را حل کنید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۳	معادله‌ی مثلثاتی $۲\cos^۲ x - \cos x = ۰$ را حل کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۴	معادله‌ی مثلثاتی $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$ را در بازه‌ی $۰ \le x \le \pi$ حل کنید.	دی ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۵	معادله‌ی $\sin x \cos x = \frac{۱}{۴}$ را حل کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۱ نمره
۶	جواب معادله‌ی مثلثاتی $۴\sin x + ۲\sqrt{۳} = ۰$ را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۷	معادله‌ی مثلثاتی $\sqrt{۳}\tan ۳x - ۱ = ۰$ را حل کنید.	دی ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۸	معادله‌ی $\sin ۲x = \sin x$ را حل کنید.	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۹	معادله‌ی مثلثاتی $\tan ۵x = \tan x$ را حل کنید. سپس جواب هایی از آن را که در بازه‌ی $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ قرار دارند، مشخص کنید.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره
۱۰	معادله‌ی مثلثاتی $\cos x(۲\cos x - ۷) = ۴$ را حل کنید.	دی ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره
۱۱	جواب‌های کلی معادله‌ی مثلثاتی را به $۲ + ۳\sin x = \cos ۲x$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۴	۱/۵ نمره
۱۲	معادله‌ی مثلثاتی $\sin(۲\pi + x)\cos x = ۰$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.	شهریور ۱۴۰۴	۱/۲۵ نمره

علی رضا علوی

روابط مثلثاتی

۱	نشان دهید در شکل زیر رابطه‌ی بین زاویه‌ی β و x به صورت زیر است. $\tan\beta = \frac{۵x}{x^۲+۶}$ 	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۲	اگر $\tan\alpha = \frac{۲}{۳}$ و $\tan\beta = -۱$ باشد، آنگاه مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنید.	خرداد ۱۴۰۴	۰/۷۵ نمره
۳	اگر $\tan(\alpha+\beta) = -۲$ و $\tan\alpha = ۱$، آن‌گاه مقدار را محاسبه کنید.	شهریور ۱۴۰۴	۰/۷۵ نمره

تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل سوم

((حسابان۲))

***

درس ۱ : حدهای نامتناهی

۱	حد زیر را در صورت وجود بیابید. $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۲-۴}{(x-۲)^۲}$	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	حد زیر را در صورت وجود بیابید. (خارج کشور) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} \frac{x^۲+x}{x^۲+۲x+۱}$	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۳	حدود زیر را بیابید. الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{[x]-۲}{x-۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} \frac{۲}{\tan x}$	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۴	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \left(\frac{x+۱}{\tan x}\right)$ برابر ..... است.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۵	اگر $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{ax-۳}{(۲-x)^۳} = +\infty$ باشد، حدود a را تعیین کنید.	دی ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۶	حدود توابع زیر در صورت وجود بیابید. الف) $\lim\limits_{x\to (\frac{۱}{۲})^-} \frac{۵x}{\lvert ۲x-۱\rvert}$ ب) $\lim\limits_{x\to (-۳)^-} \frac{x+۳}{x^۲+۶x+۹}$	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۷	حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. $\lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{[x]-۱}{(x-۱)^۲}$	شهریور ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.	دی	۰/۲۵

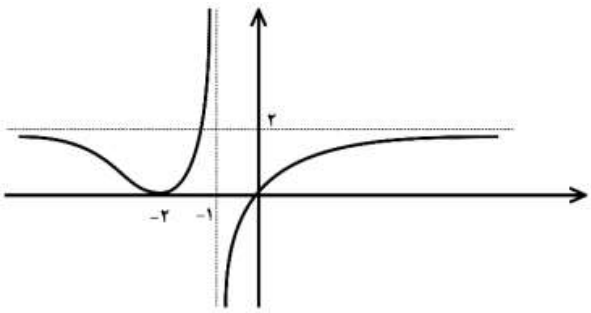
	حاصل حد $\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{1}{\sin x}$ برابر با $-\infty$ است.	۱۴۰۲	نمره
۹	حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. $\lim\limits_{x\to(-5)^-}\frac{x^2+2x-15}{x^2+10x+25}$	دی ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۱۰	حد زیر را محاسبه کنید. (نماد [ ] علامت جزء صحیح است.) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{[2x]-1}{x-1}$	خرداد ۱۴۰۳	۰/۵ نمره
۱۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\tan x$ برابر ..... است.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۱۲	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x+1}{\tan x}$ برابر ..... است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۱۳	حد زیر را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x+1}{(x-3)^2}$	مرداد ۱۴۰۳	۰/۵ نمره
۱۴	حد زیر را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin^2 x+x}{x^2}$	دی ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره
۱۵	حاصل حد زیر را در صورت وجود به دست آورید. ([ ] نماد جزء صحیح است.) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{[x]+\cos x}{\sin x}$	خرداد ۱۴۰۴	۰/۷۵ نمره
۱۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=5$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=5$.	شهریور ۱۴۰۴	۰/۲۵ نمره
۱۷	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. حاصل حد $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{\lvert x\rvert}$ ، برابر با ..... است.	شهریور ۱۴۰۴	۰/۲۵ نمره
۱۸	حاصل حد زیر را به دست آورید. ([ ] نماد جزء صحیح است.) $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{[x]-3}{3-x}$	شهریور ۱۴۰۴	۰/۷۵ نمره

فصل سوم

((حسابان۲))

❋❋❋

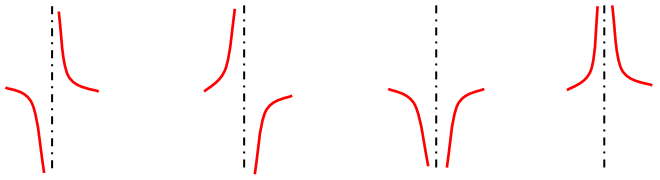
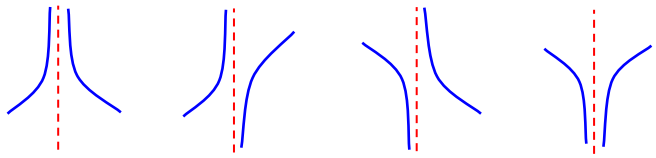
درس ۲ : حد در بی‌نهایت

۱	حد زیر را در صورت وجود بیابید. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{۲x-x^{۳}}{۲x-۱}$	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} (۵-۳x-۴x^{۳})$ برابر ..... است. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۳	حد زیر را به دست آورید. (خارج کشور) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{۵x^{۳}+۲x-۱}{-۲x^{۳}+۴}$	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	حد زیر را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^{۲}+۲x+۱}{۴x-۱}$	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۵	با توجه به نمودار تابع f، موارد زیر را به دست آورید. الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ ب) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۱)^{+}} f(x) \\ \lim\limits_{x\to(-۱)^{-}} f(x) \end{cases}$  	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۶	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. اگر $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{mx^{۲}+x}{۲x^{۲}+۳}=۷$ آنگاه m برابر عدد ..... است.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۵ نمره

۷	حد زیر را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{۴}+۳x-۱}{۲+x-x^{۴}}$	شهریور ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۸	حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۴-x+x^{۲}}{۵-۲x^{۲}}$	دی ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۹	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x^{۲}-۳x}{۱-x^{۲}}$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-۳x^{۳}+۲x+۱)$	خرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۰	حد زیر را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{۳}-۴x^{۲}}{-x^{۳}\lvert x\rvert-۲}$	مرداد ۱۴۰۳	۰/۵ نمره
۱۱	حد زیر را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-۷}{x^{۵}-۴x+۳}$	دی ۱۴۰۳	۰/۵ نمره
۱۲	حد زیر را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۴x^{۳}+۵x+۲}{۷x^{۳}+۳x^{۲}}$	خرداد ۱۴۰۴	۰/۵ نمره
۱۳	حاصل حد زیر را به دست آورید. ([ ] نماد جزء صحیح است.) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۴x^{۳}+۲x^{۲}+۱}{۱+۸x-x^{۲}}$	شهریور ۱۴۰۴	۰/۷۵ نمره

خطوط مجانب نمودار تابع (مجانب‌های افقی و قائم)

۱	مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\dfrac{۱-x^{۲}}{x^{۲}+x}$ را در صورت وجود بیابید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۲	مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۲x^{۲}}{x^{۲}-۴}$ را بنویسید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	اگر خط $y=۲$ مجانب افقی تابع $f(x)=\dfrac{ax^{۲}+۱}{۲x^{۲}-۳x}$ باشد. مقدار a را بیابید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۴	مجانب افقی تابع $f(x)=\dfrac{x-۴x^{۳}}{x^{۳}+۵}$ را به دست آورید.	دی ۱۴۰۱	۱ نمره

۵	کدام شکل وضعیت نمودار تابع $f(x)=\frac{۲[x]}{۴-x}$، در نزدیکی مجانب قائم آن است؟ دلیل خود را بنویسید.  (الف) (ب) (پ) (ت)	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۶	مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\frac{۳x-۵}{x^۲+۲}$ را در صورت وجود بیابید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۷	جای خالی را با عدد یک کلمه‌ی مناسب کامل کنید. مجانب‌های افقی تابع $y=\frac{\lvert x\rvert+۱}{۲x-۱}$ برابر ..... و ..... است.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۵ نمره
۸	مجانب قائم منحنی تابع $f(x)=\frac{۱}{x-\lvert x\rvert}$ را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره
۹	مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\frac{x^۲-۱}{۴-۳x-x^۲}$ را در صورت وجود بیابید.	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۱۰	مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x^۳+۲x}$ را به دست آورده و سپس وضعیت نمودار تابع را در نزدیکی مجانب قائم آن نمایش دهید.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره
۱۱	مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\frac{x-۳}{x^۲-۹}$ را در صورت وجود به دست آورید. سپس وضعیت نمودار تابع f را در همسایگی مجانب قائم آن نمایش دهید.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۷۵ نمره
۱۲	تابع $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۳-۱}$ را در نظر بگیرید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف) مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x)$ را به دست آورید. ب) وضعیت نمودار $f(x)$ را در همسایگی مجانب قائم آن نمایش دهید.	دی ۱۴۰۳	۱/۷۵ نمره
۱۳	از بین شکل‌های زیر، کدام شکل وضعیت نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۱-\cos x}$ را در همسایگی $x=۰$، نمایش می‌دهد. (فقط شماره‌ی شکل را در پاسخ‌برگ بنویسید.)  (۱) (۲) (۳) (۴)	خرداد ۱۴۰۴	۰/۲۵ نمره

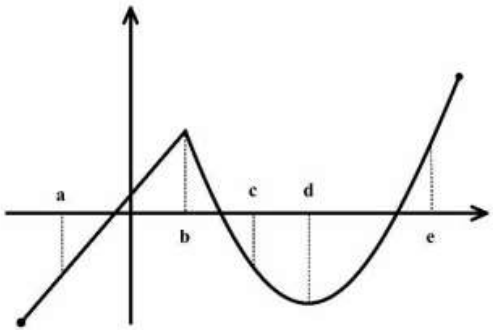
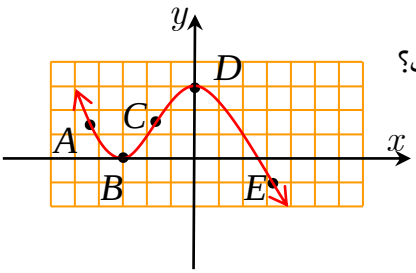
۱۴	مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{۵x+۲}{x^{۲}-۴}$ را در صورت وجود به دست آوریـد. (راه‌حـل نوشته شود.)	خرداد ۱۴۰۴	۱/۵ نمره
۱۵	مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x)=\frac{-۴x+۳}{۲x+۱}$ را در صورت وجود به دست آروید. (راه حل نوشته شود.)	شهریور ۱۴۰۴	۱ نمره

فصل چهارم

((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۱ : آشنایی با مفهوم مشتق

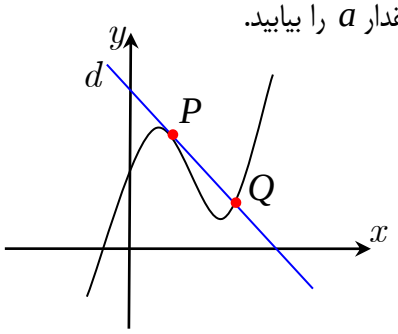
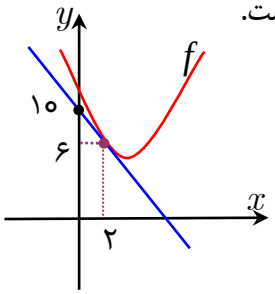
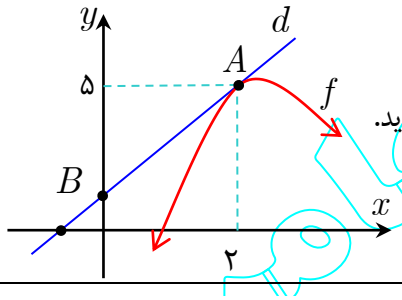
۱	با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل از بین نقاط مشخص شده مطلوب است، طول نقطه‌ای که: الف : تابع در آن مشتق‌پذیر نیست. ب : مماس در آن موازی محور طول‌ها است. پ : مشتق و مقدار تابع در آن مثبت است.  	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۲	با توجه به نمودار تابع مقابل : الف) در کدام نقطه، مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟ ب) در کدام نقطه، مقدار تابع و مقدار مشتق تابع صفر است؟ پ) در بین نقاط داده شده،کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟ ت) شیب نقاط D و A را با هم مقایسه نمایید.  	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره

مشتق تابع در یک نقطه

۱	اگر $f(x)=x^{۲}-۳x$ باشد، با استفاده از تعریف، $f'(۱)$ را حساب کنید. (خارج از کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $f'(۱)=۲$ و $g'(۱)=-۳$ باشد، حاصل $(۳f+g)'(۱)$ برابر ۹ است.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۳	جای خالی را با توجه به عبارت‌های داخل پرانتز، کامل کنید. مشتق تابع $f(x)=\sqrt{۲}$ در $x=۱$ ، برابر ..... است. (صفر ، یک)	خرداد ۱۴۰۴	۰/۲۵ نمره

شیب و معادله‌ی خط مماس

۱	معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x=۰$ واقع بر نمودار تابع را بنویسید.	دی ۱۴۰۱	۱ نمره

۲	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. اگر $f'(۴)=۲$ و $f(۴)=-۱$، خط مماس بر نمودار f در $x=۴$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ..... قطع می‌کند.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. خط $x=۲$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۲}$ در نقطه‌ی $(۲,۰)$ است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۴	مطابق شکل روبرو خط d در نقطه‌ی $P(۱,۳)$ بر نمودار تابع f مماس و در نقطه‌ی $Q(۲a+۱,a)$ آن را قطع می‌کند. اگر $f'(۱)=-۱$، مقدار a را بیابید.  	دی ۱۴۰۳	۱ نمره
۵	مطابق شکل روبه‌رو، خط d بر نمودار تابع f در نقطه‌ی $(۲,۶)$ مماس است. حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲)-f(۲+h)}{۳h}$ را به دست آورید.  	خرداد ۱۴۰۴	۰/۷۵ نمره
۶	در شکل زیر، خط d بر نمودار تابع f در نقطه‌ی $A(۲,۵)$ مماس است. اگر $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲)-f(۲+h)}{h}=-۲$ آن‌گاه معادله‌ی خط d و عرض نقطه‌ی B را به دست آورید.  	شهریور ۱۴۰۴	۱ نمره

فصل چهارم

((حسابان۲))

***

درس ۲ : مشتق‌پذیری و پیوستگی

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه، مشتق چپ و راست نامتناهی باشد، آنگاه $f'(a)$ وجود ندارد.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	مشتق پذیری تابع $f(x)=\|۲x-۴\|$ را در $x=۲$ بررسی کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) اگر خط $x=a$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $(a,f(a))$ باشد، آنگاه $f'(x)$ موجود است.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	نشان دهید $x=۰$ ، مماس قائم برای تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ است. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۵	مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\geq ۱ \\ ۳x-۱ & x<۱ \end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۶	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ..... ، آنگاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست.	دی ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع $f(x)=[x]$ در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق‌پذیر است	خرداد ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۸	مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x-۴ & x<۱ \\ ۲x^۲-۳ & x\geq ۱ \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۹	با استفاده از تعریف مشتق تابع، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۲}$ را در نقطه‌ی $x=۲$ بررسی نمایید.	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره
۱۰	تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+x & x\leq ۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. مشتق‌پذیری تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.	دی ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره

۱۱	مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} \lvert x\rvert & x<0 \\ x^2 & x\geq 0 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۱۲	اگر $f(x)=\lvert x\rvert(x-2)$ باشد. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع f را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید.	مرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۳	مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$ را در نقطه‌ی $x=2$ با استفاده از تعریف مشتق بررسی کنید.	دی ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۴	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) نقطه‌ی $x=0$ یک نقطه‌ی گوشه‌ای $f(x)=\sqrt[3]{x}$ تابع است. ب) تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$، در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌پذیر است.	دی ۱۴۰۳	۰/۵ نمره
۱۵	به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & ; x\geq 1 \\ 4x & ; x<1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.	خرداد ۱۴۰۴	۱/۲۵ نمره
۱۶	با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x\lvert x-1\rvert$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.	شهریور ۱۴۰۴	۱/۲۵ نمره

تابع مشتق

۱	با استفاده از تعریف مشتق، نشان دهید، اگر $f(x)=\sqrt{x}$، آنگاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره

محاسبه‌ی مشتق توابع

۱	مشتق توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(-3x^2+x)^5(2x)$ ب) $g(x)=5\tan x+\sin x^2$ پ) $h(x)=\frac{2}{x}$	خرداد ۱۴۰۱	۲/۵ نمره
۲	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (خارج کشور) الف) $y=\frac{3x^2}{x^3-5x+2}$ ب) $y=\cos^4(3x-2)$	خرداد ۱۴۰۱	۲ نمره
۳	مشتق توابع زیر را به دست اورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(4x^2-5x)^3(\sqrt{x}+1)$ ب) $g(x)=\frac{9x+1}{x-x^2}$ پ) $h(x)=\sin(3x^2)$	شهریور ۱۴۰۱	۱/۷۵ نمره
۴	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)	دی ۱۴۰۱	۲/۲۵ نمره

		الف) $f(x)=\sqrt{۷x}(۳x^{۲}+۲)$ ب) $g(x)=\cos^{۳}(۲x)-\frac{۱}{x}$	
۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(۵x^{۳}-x)^{۹}(\sqrt{۲x+۱})$ ب) $g(x)=\frac{۴\tan x}{۳x^{۲}-۱}$	خرداد ۱۴۰۲	۲ نمره
۶	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(x^{۴}+۲x)(\sqrt{x})$ ب) $g(x)=۳\tan x-\sin^{۳}(۲x)$	شهریور ۱۴۰۲	۲ نمره
۷	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست.) الف) $f(x)=\frac{۵\tan x}{۱-\sin x}$ ب) $g(x)=\cos^{۷}(x^{۲})$ پ) $h(x)=(۳x+۵)^{۶}$	دی ۱۴۰۲	۲/۲۵ نمره
۸	اگر $f(x)=۲x^{۳}+۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشند، حاصل $(f+g)'(۴)+(f\times g)'(۱)$ را به دست آورید.	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۹	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(x^{۳}+۱)^{۲}(\sqrt{۳x+۲})$ ب) $g(x)=\sin^{۲}۳x+\tan(x^{۲})$	خرداد ۱۴۰۳	۲ نمره
۱۰	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=\frac{\sqrt{x+۱}}{x^{۳}-۶x+۱}$ ب) $g(x)=۲\tan x+\cos^{۵}(۲x^{۳})$	مرداد ۱۴۰۳	۲/۲۵ نمره
۱۱	اگر $f(۲)=۷$ و $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{۲x-۴}=۵$ باشد. مشتق تابع $g(x)=xf(x)$ را در $x=۲$ به دست آورید.	مرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۲	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-۵x}{x-۳}$ ب) $g(x)=(\cos^{۳}x)(\tan x)$	دی ۱۴۰۳	۲ نمره
۱۳	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(۱+\sin ۵x)^{۳}$ ب) $g(x)=(x^{۳}-۵x)(\sqrt{x^{۲}+۱})$	خرداد ۱۴۰۴	۱/۷۵ نمره
۱۴	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(\sqrt{x}+۳x)^{۷}$ ب) $g(x)=\cos^{۳}۴x$	شهریور ۱۴۰۴	۱/۷۵ نمره

معادله‌ی خط مماس

۱	معادله‌ی مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^{۳}-۸$، در نقطه‌ی تقاطع آن با محور xها، را بنویسید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۲	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. خط ..... مماس قائم منحنی تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ است.	شهریور ۱۴۰۴	۰/۲۵ نمره

مشتق تابع مرکب و قاعده‌ی زنجیری

۱	اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ و $f(۱)=۱$، مقدار مشتق $(f+g)of$ در $x=۱$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره

مشتق مراتب بالاتر

۱	اگر تابع $f(x)=\cos ۲x$ باشد، مقدار $f''(\frac{\pi}{۸})$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. اگر $f(x)=x^{۳}+۴x^{۲}-۱$ باشد، حاصل $f''(-۱)$ برابر ..... است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۳	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. مشتق دوم تابع $y=\sin x$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ برابر ..... است.	دی ۱۴۰۳	۰/۵ نمره
۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $f(x)=\sin x$، آن‌گاه $f'(\frac{\pi}{۲})=f''(\pi)$	شهریور ۱۴۰۴	۰/۲۵ نمره

مشتق‌پذیری در یک فاصله

۱	نمودار تابع زیر را رسم کرده و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌ی $[-۲,۰]$ بررسی کنید. (خارج کشور) $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x+۱ & -۱\le x<۲ \end{cases}$	خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع f روی بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه‌ی این بازه مشتق‌پذیر باشد.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره

فصل چهارم

((حسابان۲))

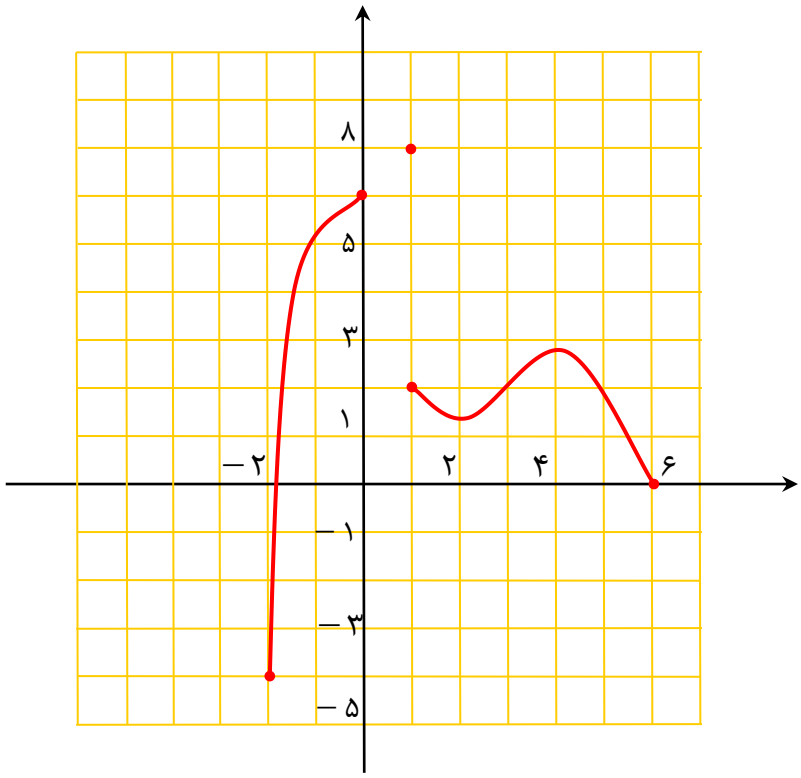
❋❋❋

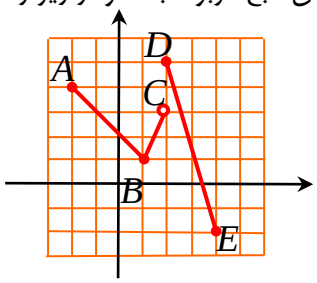
درس ۳ : مفهوم آهنگ تغییر و کاربرد آن

۱	اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله‌ی متحرک به صورت $f(t)=t^{۳}-t$ بر حسب متر باشد. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است؟	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۲	یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t^{۲}$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t=۴$ چقدر است؟ (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۳	معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t)=۲t^{۲}-t+۳$ بر حسب متر است. (t بر حسب ثانیه است.) الف : سرعت متوسط تابع در بازه‌ی $[۰,۳]$ را به دست آورید. ب : سرعت لحظه‌ای تابع را در $t=۴$ به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۴	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t$ گرم است. در چه لحظه‌ای، آهنگ رشد جرم توده باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه‌ی زمانی $۰\le t\le ۴$ می‌شود؟	دی ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۵	در تابعی با ضابطه‌ی $f(t)=\frac{۱۲۰}{t}+۵$ ، مجموع آهنگ لحظه ای تغییر در لحظه‌ی $t=۲$ و آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t)$ در بازه‌ی $[۴,۶]$ را بیابید.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۶	تابعی با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۳x-۶}{x^{۲}+۲}$ را در نظر بگیرید؛ الف) آهنگ تغییر متوسط در بازه‌ی $[-۲,۰]$ را بدست آورید. ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=-۱$ را بدست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر لحظه‌ای آن همواره مثبت است.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۸	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+۵}$ را وقتی متغیر از $x=-۱$ به $x=۴$ تغییر می‌کند، به دست آورید.	دی ۱۴۰۲	۰/۷۵ نمره

۹	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم ارتفاع این جسم (برحسب متر) از سطح زمین در هر لحظه از معادله‌ی $h(t)=-۵t^{۲}+۴۰t$ به دست می‌آید. (t برحسب ثانیه) الف) سرعت متوسط جسم در بازه‌ی زمانی $[۳,۴]$ را به دست آورید. ب) لحظه‌ای را معلوم کنید که سرعت جسم برابر ۲۰ (متر بر ثانیه) است.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۱۰	تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. الف) آهنگ متوسط رشد در بازه‌ی $[۰,۲۵]$ را به دست آورید. ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک در ۴۹ ماهگی را به دست آورید.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره
۱۱	تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-۴x+۱$ مفروض است. در نقطه‌ی $x=a$، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع کمتر از آهنگ تغییر متوسط آن در بازه‌ی $[۰,۳]$ است. محدوده‌ی a را بیابید.	دی ۱۴۰۳	۱/۲۵ نمره
۱۲	الف) اگر تابع f، تابعی با دامنه‌ی اعداد حقیقی باشد و $f(۳)=۸+f(۱)$، آن‌گاه آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه‌ی $[۱,۳]$ به دست آورید. ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ را در نقطه‌ی $x=۲۷$، به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۴	۱ نمره
۱۳	معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^{۲}-۳t+۱۲$ بر حسب متر در بازه‌ی زمانی $[۱,۶]$ داده شده است. الف) سرعت متوسط متحرک را در بازه‌ی $[۱,۶]$ به دست آورید. ب) سرعت لحظه‌ای متحرک را در لحظه‌ی $t=۲$ محاسبه کنید.	شهریور ۱۴۰۴	۱ نمره

درس ۱ : اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. هر نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x)$، یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	با توجه به نمودار داده شده، به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید. ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید. پ) طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی را بنویسید. ت) طول نقطه‌ی مینیمم نسبی را بنویسید.  	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ بیابید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه‌ی c باشد که به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم، $f(x) \leq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک ..... تابع f می‌نامیم.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره

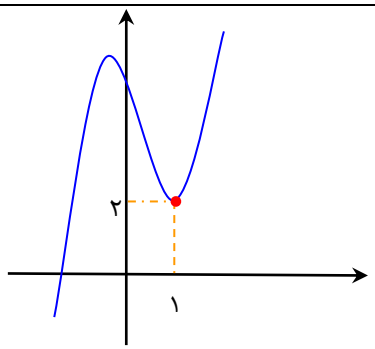
۵	طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع مربوط به نمودار زیر را مشخص کنید. 	خرداد ۱۴۰۲	۱ نمره
۶	با رسم جدول تغییرات، تعیین کنید که تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۴}+x^{۲}+۱$، در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟	خرداد ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $f'(c)=۰$ باشد، آنگاه $x=c$ یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی است.	خرداد ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۸	اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=x^{۵}-۵x$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۹	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}$ را روی بازه‌ی $[-۲,۳]$ بیابید.	دی ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۱۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابعی وجود ندارد که برای آن شرایط $f(x)=۰$ و $f'(x)=۰$ برقرار باشد.	دی ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره
۱۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $x=c$ طول یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f باشد، آنگاه $f'(c)=۰$	خرداد ۱۴۰۳	۰/۲۵ نمره
۱۲	مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۳}-۱۲x$ در بازه‌ی $[-۱,۳]$ را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۱۳	نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع $f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}$ را در بازه‌ی $[-۱,۳]$ در صورت وجود بیابید.	مرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۱۴	جاهای خالی را با توجه به عبارت‌های داخل پرانتز، کامل کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.) ب) نقطه‌ای به طول $x=۲$، نقطه‌ی ..... تابع $f(x)=[x]$ است. (ماکزیمم نسبی ، مینیمم نسبی)	خرداد ۱۴۰۴	۰/۲۵ نمره
۱۵	مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=-\frac{۲}{۳}x^{۳}-x^{۲}+۴x+۱$ را در بازه‌ی $[-۳,۲]$ به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۴	۲ نمره
۱۶	مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x)=-\frac{۱}{۳}x^{۳}+x$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۴	۱/۵ نمره

حل مسائل بهینه‌سازی

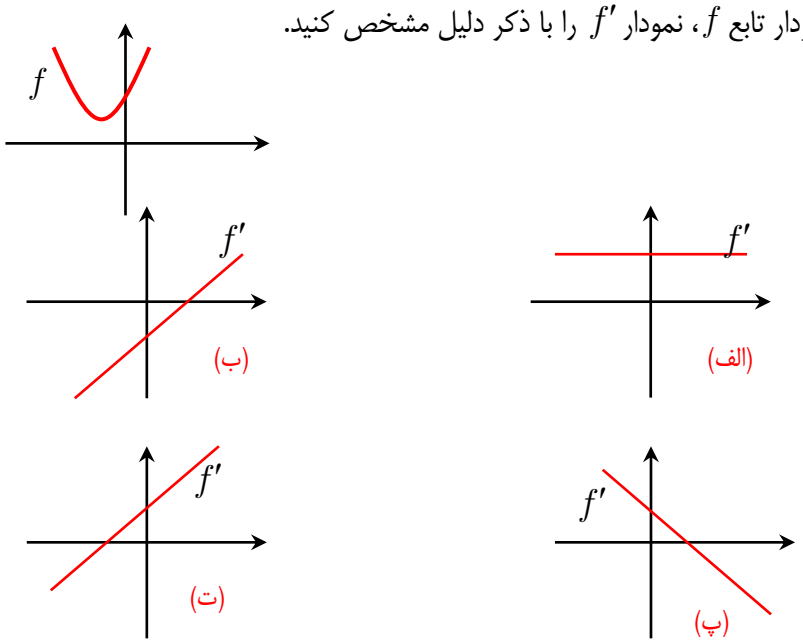
۱	یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.	دی ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره

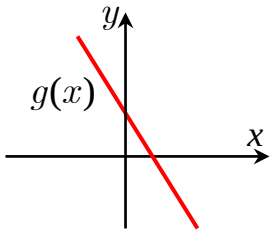
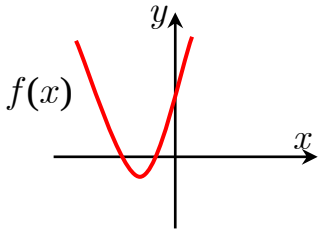
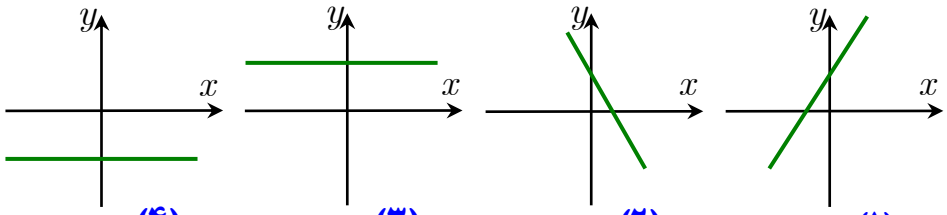
۲	یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۲ سانتی‌متر باشد. طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.	دی ۱۴۰۳	۱/۵ نمره

حل مسائل پارامتری

۱	اگر نقطه‌ی $A(-۱,۱)$ نقطه‌ی عطف تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^۳+bx^۲+۲$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۲	ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^۳+ax-b$ طوری پیدا کنید که نقطه‌ی $(۱,۲)$ اکسترمم نسبی تابع باشد.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	نمودار تابع $f(x)=x^۳+ax+b$ به صورت مقابل است. مقادیر a و b را بیابد. 	دی ۱۴۰۳	۱ نمره
۴	مقادیر a و b را در تابع $f(x)=x^۳+ax^۲+bx$ طوری به دست آورید که $x=۲$، طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی و $x=۰$، طول نقطه‌ی عطف این تابع باشد.	خرداد ۱۴۰۴	۱/۲۵ نمره
۵	اگر $x=۱$ طول نقطه‌ی عطف و $x=-۲$ طول یکی از نقاط بحرانی تابع $f(x)=ax^۳+bx^۲+۲۴x$ باشد. مقادیر a و b را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۴	۱/۵ نمره

نمودار تابع مشتق

۱	با توجه به نمودار تابع f، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید. 	دی ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۲	نمودار توابع f و g به صورت زیر است.	خرداد	۰/۵

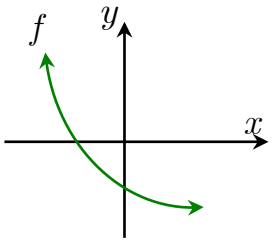
نمره	۱۴۰۴	 **(ب)**  **(الف)** نمودار مشتق هر کدام از توابع f و g را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید. سپس شماره‌ی مربوط به آن را در پاسخ برگ بنویسید. (دو نمودار اضافه است.)  **(۴)** **(۳)** **(۲)** **(۱)**

فصل پنجم

((حسابان ۲))

***

درس ۲ : جهت تقعر نمودار یک تابع

۱	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. اگر برای هر x در بازه‌ی I : $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به ..... دارد.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) در نقطه‌ی عطف، علامت $f''(x)$ تغییر می کند.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر برای تابع f داشته باشید $f''(c) = 0$ آنگاه همواره نقطه‌ی $(c, f(c))$ نقطه‌ی عطف تابع است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۴	ابتدا تقعر تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ را در دامنه‌ی آن بررسی نمایید و سپس نقطه‌ی عطف آن را در صورت وجود، به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۵	نمودار تابع f در شکل روبرو رسم شده است. اگر f' و f'' به ترتیب مشتق اول و دوم این تابع باشند، آن‌گاه به ازای هر x از دامنه‌ی تابع f، کدام گزینه درست است؟  الف) $f'(x) < 0$ و $f''(x) < 0$ ب) $f'(x) < 0$ و $f''(x) > 0$ ج) $f'(x) > 0$ و $f''(x) < 0$ د) $f'(x) > 0$ و $f''(x) > 0$	شهریور ۱۴۰۲	۰/۲۵ نمره

نقطه‌ی عطف

۱	جهت تقعر و مختصات نقطه‌ی عطف تابع $f(x) = x(x^2 - 3) + 1$ را تعیین کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر تابع اکیداً صعودی، نقطه‌ی عطف دارد.	شهریور ۱۴۰۴	۰/۲۵ نمره

حل مسائل پارامتری

۱	ضرایب a و b را در تابع $y = x^3 + ax^2 + b$ ، طوری بیابید که نقطه‌ی $(1, 4)$ نقطه‌ی عطف	خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره

	منحنی باشد. (خارج کشور)		
۲	مقادیر a و b و c را در تابع $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+c$ ، طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند. $f(۰)=۱$ و $f(۲)=-۳$ و $x=۱$ طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع f باشد.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۳	نقطه‌ی عطف تابع $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx$، نقطه‌ی $(۱,-۱۱)$ می‌باشد، مقدار a و b را بیابید.	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۴	مقادیر a و b و c را در تابع $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+c$ طوری به دست آورید که در نقطه‌ی $(۳,-۱)$ اکسترمم نسبی داشته باشد و $x=۱$ طول نقطه‌ی عطف آن باشد.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۵	اگر $f(x)=ax^{۳}+۳x^{۲}+۱$ باشد، مقدار a را طوری بیابید که $x=\frac{۱}{۲}$ طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع باشد.	مرداد ۱۴۰۳	۱ نمره

فصل پنجم

((حسابان۲))

***

درس ۳ : رسم نمودار توابع چندجمله‌ای

۱	جدول رفتار و نمودار تابع $y=x^{۳}+۳x^{۲}+۱$ را رسم کنید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-۲x^{۲}+۳x$ را رسم کنید.	دی ۱۴۰۱	۲/۲۵ نمره
۳	جدول رفتار و نمودار تابع $y=\frac{۲}{۳}x^{۳}-x^{۲}$ را رسم کنید.	شهریور ۱۴۰۲	۲ نمره
۴	جدول رفتار و نمودار تابع $y=(x+۲)(x-۴)^{۲}$ را رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۷۵ نمره
۵	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=(x+۱)(x-۲)^{۲}$ را رسم کنید.	دی ۱۴۰۳	۲ نمره
۶	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}+۹x$ را رسم کنید.	شهریور ۱۴۰۴	۲ نمره

توابع هموگرافیک

۱	فرض کنید، محل تقاطع مجانب های تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، نقطه‌ی $(۲,۱)$ باشد. اگر این تابع از نقطه‌ی $(-۱,۰)$ بگذرد، ضابطه‌ی تابع را به دست آورید.	دی ۱۴۰۱	۱ نمره

رسم توابع هموگرافیک

۱	جدول رفتار و نمودار تابع $y=\frac{۲x-۱}{x-۲}$ را رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۲/۵ نمره
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۳}{۱-x}$ را رسم کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۳	جدول رفتار و نمودار تابع $y=\frac{-x}{x+۱}$ را رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۲	۱/۷۵ نمره

۴	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۳}$ را رسم کنید.	دی ۱۴۰۲	۱/۷۵ نمره
۵	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ را رسم کنید.	مرداد ۱۴۰۳	۲ نمره
۶	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x+۴}{x-۱}$ را رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۴	۲ نمره

فصل اوّل

((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۱ : تبدیل نمودار توابع

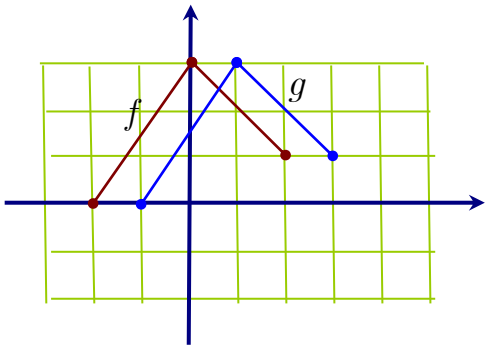
۱

طبق قوانین مربوط به تبدیلات، برای رسم نمودار تابع g کافی است که طول نقاط نمودار تابع f را یک واحد اضافه کنیم. یعنی نمودار f را یک واحد به سمت راست، در راستای افقی حرکت دهیم.

$f:$	x	-۲	۰	۲
	y	۰	۳	۱

$\Rightarrow$

$g:$	x	-۱	۱	۳
	y	۰	۳	۱



حال بر می توان دامنه‌ی تابع g را نیز به شکل بیان $[-۱,۳]$ کرد.

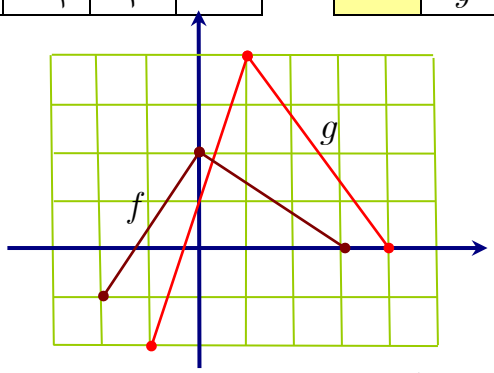
۲

برای رسم نمودار تابع g، طول نقاط نمودار تابع f را یک واحد اضافه می‌کنیم و عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم.

$f:$	x	-۲	۰	۳
	y	-۱	۲	۰

$\Rightarrow$

$g:$	x	-۱	۱	۴
	y	-۲	۴	۰



اکنون با توجه به نمودار g، می‌توان دامنه و برد آن را بدین شکل تعیین کرد.

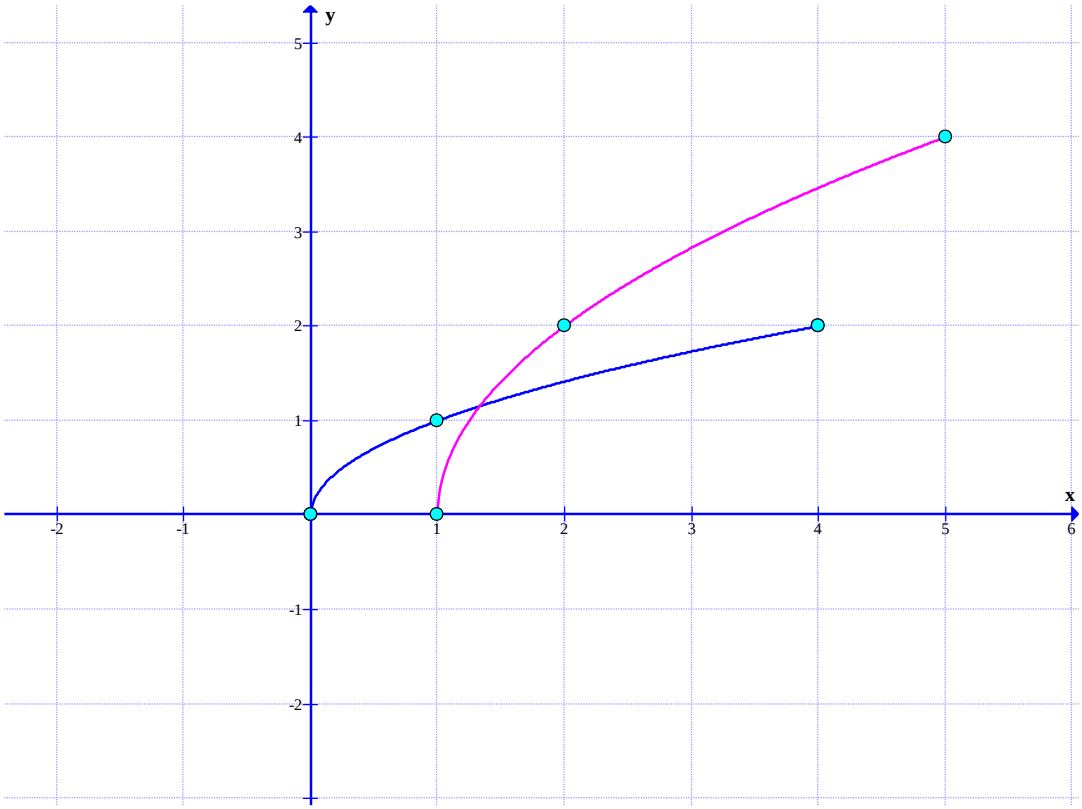
$D_g=[-۱,۴]$ و $R_g=[-۲,۴]$

۳ طول نقاط نمودار تابع f یک واحد اضافه می‌شوند ولی عرض نقاط دو برابر می‌شود.

f	x	۰	۱	۴
	y	۰	۱	۲

$\longrightarrow$

g	x	۱	۲	۵
	y	۰	۲	۴



$D_g=[۱,۵]$ و $R_g=[۰,۴]$

۴ الف) نادرست ب) درست

۵ طبق قوانین مربوط به تبدیلات توابع، کافی است به ابتدا و انتهای بازه‌ی داده شده ، دو واحد اضافه کنید. لذا برد تابع جدید می‌شود: $[۲,۴]$

۶ واضح است که

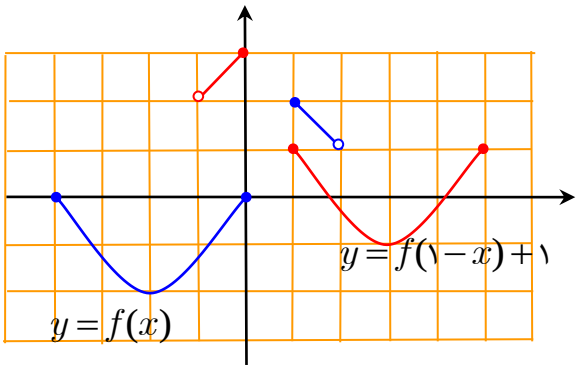
$$y=f(۱-x)+۱\rightarrow y=f(-(x-۱))+۱$$

حال طبق قوانین مربوط به تبدیلات، می‌توان چنین نوشت.

نمودار تابع را یک واحد در راستای قائم به بالا منتقل می‌کنیم. سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم و بعد یک واحد سمت راست در راستای افقی منتقل می‌کنیم.

همچنین به کمک نقاط اصلی نمودار داده شده می‌توان چنین نوشت.

$y=f(x)$	x	-۴	-۲	۰	۱	۲
	y	۰	-۲	۰	۲	۱
$y=f(۱-x)+۱$	x	۵	۳	۱	۰	-۱
	y	۱	-۱	۱	۳	۲

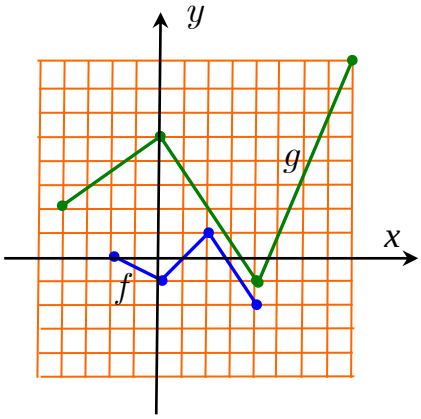


۷ به کمک قوانین مربوط به تبدیلات و با استفاده تنظیم جدول می‌توان نمودار g رسم می‌شود.

f:	x	-۲	۰	۲	۴
	y	۰	-۱	۱	-۲

طول نقاط را دو برابر می‌کنیم. عرض نقاط را ابتدا در -۳ ضرب و سپس با ۲ جمع می‌کنیم.

g:	x	-۴	۰	۴	۸
	y	۲	۵	-۱	۸

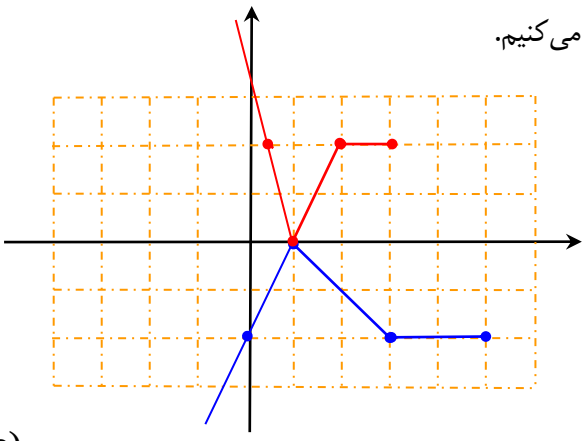


و لذا برد تابع g به صورت زیر خواهد شد. $R_g=[-۱,۸]$

۸ قرار می‌دهیم : $۲x-۱=t \to x=\frac{t+۱}{۲}$. لذا طول نقاط را ابتدا با یک جمع کرده و سپس بر دو تقسیم می‌کنیم.

عرض نقاط نیز را فقط قرینه می‌کنیم.

x	۰	۱	۳	۵
y	-۲	۰	-۲	-۲
$\Downarrow$				
x	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۳
y	۲	۰	۲	۲



$D=(-\infty,۳]\ ,\ [۰,+\infty)$

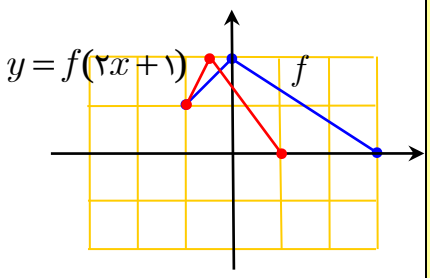
۹ دوم ؛ زیرا

$$f(x)=\sqrt[۳]{x} \to g(x)=\sqrt[۳]{x+۲} \to g^{-۱}(x)=x^{۳}-۲$$

که واضح است نمودار تابع $g^{-۱}(x)=x^{۳}-۲$ از ربع دوم نمی‌گذرد.

۱۰ طبق قوانین تبدیلات، عرض نقاط اصلی نمودار تابع f را ثابت نگه می‌داریم. اما طول آنها را ابتدا یک واحد کمک کرده و سپس نصف می‌کنیم.

$f:$	x	-۱	۰	۳
	y	۱	۲	۰



$y=f(۲x+۱)$	x	-۱	$-۰/۵$	۱
	y	۱	۲	۰

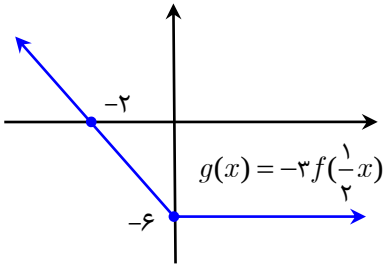
ب) چون طبق قوانین تبدیلات، طول نقاط را در $-\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم. پس همین را روی ابتدا و انتهای دامنه انجام می‌دهیم، لذا :

$D_k=[-۲,۱]$.

۱۱ الف) طبق قوانین تبدیلات، عرض نقاط اصلی نمودار تابع f را در۳- ضرب و طول نقاط را در دو ضرب می‌کنیم. سپس با یافتن نقاط جدید روی دستگاه محورهای مختصات نمودار تابع g به دست می‌آید.

$f:$	x	-۱	۰	۱
	y	۰	۲	۲

$g(x)=-۳f(\frac{۱}{۲}x)$	x	-۲	۰	۲
	y	۰	-۶	-۶



ب) با توجه به نمودار رسم شده برای تابع g، واضح است که $g(۵)=-۶$

۱۲ الف) بنابر قوانین مربوط به تبدیلات، طول هر نقطه‌ی نمودار، فقط دو برابر، ولی عرض آن ابتدا سه برابر و بعد به آن یک واحد اضافه می‌شود. بر این اساس و با توجه به دامنه و برد تابع f می‌توان نوشت؛

$D_f=[-۳,۳)\rightarrow D_g=[-۶,۶)$

$R_f=[۰,۲]\rightarrow R_g=[۱,۷]$

ب) بنابر قوانین مربوط به تبدیلات، طول نقطه‌ی A، فقط دو برابر، ولی عرض نقطه ابتدا سه برابر و بعد به آن یک واحد اضافه می‌شود. از این رو مختصات نقطه‌ی متناظر A می‌شود. $A'(-۴,۴)$

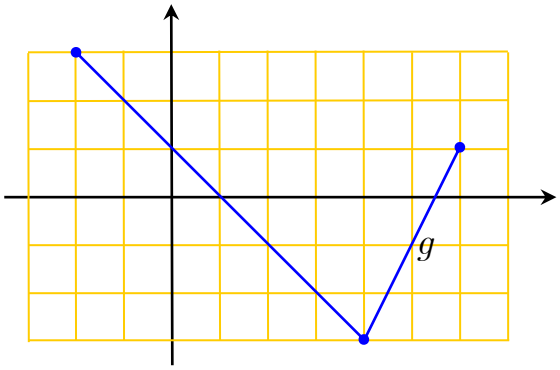
۱۳ طبق قوانین مربوط به تبدیلات بدین شکل عمل می‌کنیم.

طول هر نقطه را دو برابر ولی عرض هر نقطه را ابتدا در ۲- ضرب نموده و سپس با عدد یک جمع می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت.

x	-۱	۲	۳
y	-۱	۲	۰

$\Rightarrow$

x	-۲	۴	۶
y	۳	-۳	۱



تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل اوّل

((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۲ : توابع چندجمله‌ای

۱	چهارم ؛ زیرا اگر نمودار تابع $y=x^{۳}$ را دو واحد به سمت چپ و سپس یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، به سادگی معلوم می شود که $f(x)=(x-۲)^{۳}+۱$ از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد.

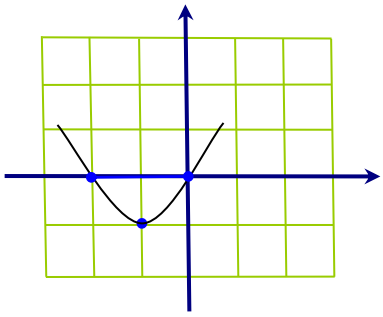
توابع یکنوا (توابع صعودی و نزولی)

۱

تابع $f(x)=x^{۲}+۲x$ یک تابع درجه‌ی دوم است (سهمی) است. برای رسم نمودار تابع ابتدا مختصات رأس سهمی را تعیین می‌کنیم.

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲}{۲(۱)}=-۱\rightarrow f(-۱)=(-۱)^{۲}+۲(-۱)=-۱\rightarrow S(-۱,-۱)$$

$f:$	x	-۲	-۱	۰
	y	۰	-۱	۰



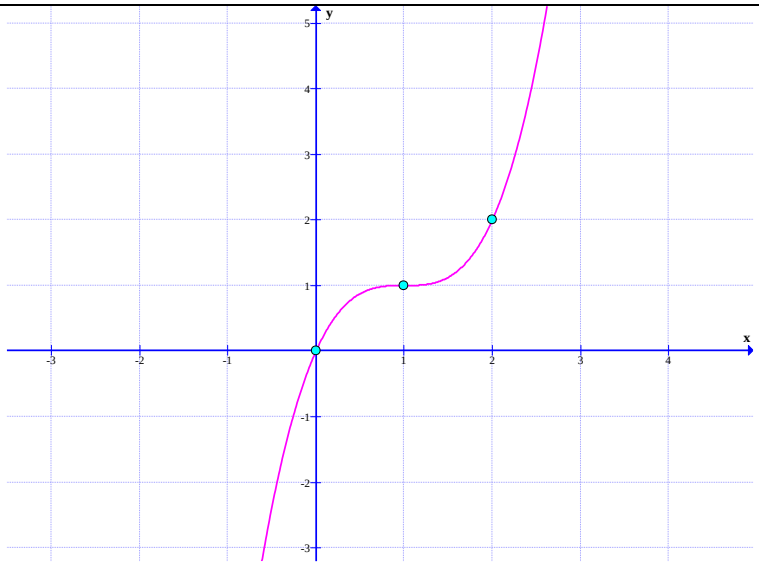
به کمک نمودار به سادگی معلوم است که تابع در فاصله‌ی $(-\infty,-۱]$ نزولی اکید و در فاصله‌ی $[-۱,+\infty)$ صعودی اکید است.

۲

درست، هر تابع لگاریتمی در دامنه‌ی خود یا صعودی اکید و یا نزولی اکید است و لذا اکیداً یکنوا است.

۳

$f:$	x	۰	۱	۲
	y	۰	۱	۲



این تابع در تمام نقاط دامنه‌اش که مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، صعودی اکید است.

۴ ثابت

۵ بنابر اینکه تابع نمایی $f(x)=a^x$ برای حالت $0<a<1$ ، نزولی اکید است. پس :

$$(\frac{1}{3})^{2x+1}\le\frac{1}{27}\to(\frac{1}{3})^{2x+1}\le(\frac{1}{3})^{3}\to 2x+1\ge 3\to x\ge 1$$

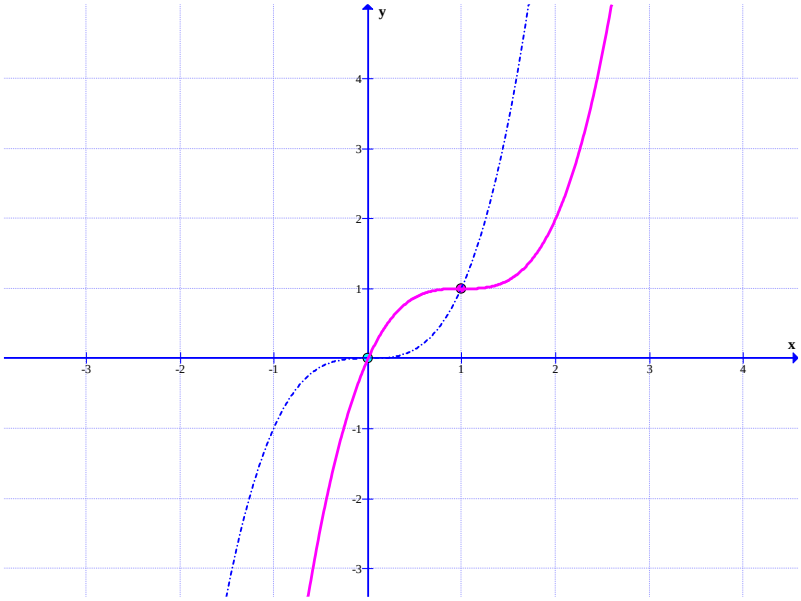
۶ درست

۷ صفر

۸

$$g(x)=x^3-3x^2+3x-1+1\to g(x)=(x-1)^3+1$$

لذا از اینجا معلوم می‌شود که نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد به سمت راست و سپس یک واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم، تا اینکه نمودار $g(x)$ رسم شود.



تابع $g(x)$ اکیدا یکنوا (صعودی اکید) است.

۹

می‌دانیم که تابع $f(x)=(\frac{۱}{۵})^x$، اکیدا نزولی است، پس می‌توان نوشت:

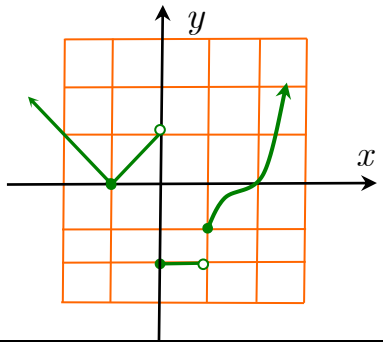
$$(\frac{۱}{۵})^{۲x+۱} \le (\frac{۱}{۵})^۳ \to ۲x+۱ \ge ۳ \to x \ge ۱$$

۱۰

تابع در بازه‌های $(۰,+\infty)$ و $(-\infty,۰)$ اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی) است ولی تابع در کل دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا نیست.

۱۱

برای هر ضابطه، در محدوده‌ی تعیین شده، نقطه‌یابی می‌کنیم. در این صورت، نمودار تابع به صورت زیر خواهد شد.



این تابع در بازه‌ی $[۱,+\infty)$ و $[-۱,۰)$ اکیداً صعودی و در بازه‌ی $(-\infty,-۱]$ اکیداً نزولی است.

۱۲

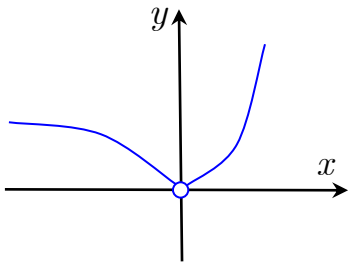
درست ؛ زیرا :

$$\begin{cases} x_۱ < x_۲ \to f(x_۱) < f(x_۲) \\ x_۱ < x_۲ \to g(x_۱) < g(x_۲) \end{cases} \to f(x_۱)+g(x_۱) < f(x_۲)+g(x_۲)$$

$$\to (f+g)(x_۱) < (f+g)(x_۲)$$

۱۳

به کمک نقطه‌یابی برای هر شاخه از تابع فوق، نمودار زیر به دست می‌آید.



اکنون با توجه به این نمودار واضح است که بازه‌ی $(۰,+\infty)$، بزرگترین بازه‌ای است که این تابع در آن اکیداً صعودی می‌باشد.

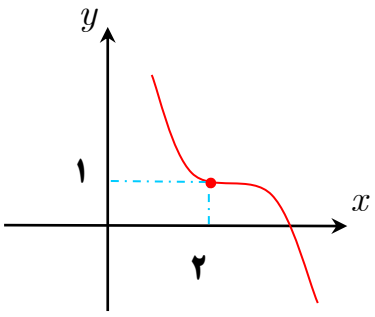
۱۴

طول نقاط نمودار تابع $y=x^۳$ را با دو جمع می‌کنیم ولی عرض نقاط را ابتدا قرینه و سپس با یک جمع می‌کنیم.

$y=x^۳$	x	-۱	۰	۱
	y	-۱	۰	۱

$\Downarrow$

$y=-(x-۲)^۳+۱$	x	۱	۲	۳
	y	۲	۱	۰



	با توجه به نمودار رسم شده، به سادگی معلوم است که تابع همواره نزولی اکید است.
۱۵	تابع $f(x)=(\frac{۱}{۲})^x$ یک تابع نزولی اکید است. لذا : $(\frac{۱}{۲})^{x+۱}\le(\frac{۱}{۲})^{۲x-۳}\to x+۱\ge ۲x-۳\to x\le ۴$
۱۶	درست ؛ زیرا $x_۱<x_۲\to -x_۱>-x_۲\to ۱-x_۱>۱-x_۲$ $\to(۱-x_۱)^۳>(۱-x_۲)^۳\to f(x_۱)>f(x_۲)$ توجه : با رسم نمودار این تابع، یکنوایی آن نیز قابل بررسی است.
۱۷	کافی است طبق تعریف عمل کنیم. فرض کنید a و b دو عدد دلخواه در این فاصله باشند که $a<b$ چون توابع f و g اکیداً صعودی هستند، نتیجه می‌شود که $f(a)<f(b)$ و $g(a)<g(b)$. بنابراین $f(a)+g(a)<f(b)+g(b)$ و از این رو $(f+g)(a)<(f+g)(b)$، پس $f+g$ روی این فاصله تابعی اکیداً صعودی است.

تقسیم و بخش‌پذیری چندجمله‌های

۱	برای تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم، کافی است که ریشه‌ی عبارت $۲x+۱$ را در $P(x)$ جایگزین کنیم. $۲x+۱=۰\to x=-\frac{۱}{۲}$ $R=P(-\frac{۱}{۲})=۸(-\frac{۱}{۲})^۳-۴(-\frac{۱}{۲})^۲+۲=-۱-۱+۲=۰$
۲	$x+۱=۰\to x=-۱\to\begin{cases}p(-۱)=(-۱)^۳+a(-۱)+۱=-a\\ q(-۱)=۲(-۱)^۲-(-۱)+۱=۴\end{cases}$ $\to -a=۴\to a=-۴$
۳	$x+۱=۰\to x=-۱$ $\xrightarrow{P(-۱)=۲}(-۱)^۴+k(-۱)^۲-۳=۲\to k=۴$
۴	$x+۲=۰\to x=-۲$ $P(-۲)=(-۲)^۳+a(-۲)^۲+b=-۱\to ۴a+b=۷$ $x-۱=۰\to x=۱$ $P(۱)=(۱)^۳+a(۱)^۲+b=۰\to a+b=-۱$ $\Rightarrow\begin{cases}۴a+b=۷\\ a+b=-۱\end{cases}\to a=\frac{۸}{۳}\ ,\ b=-\frac{۱۱}{۳}$
۵	$x-a=۰\to x=a$

$R=(a)^{۲}+a(a)-۸=۲a^{۲}-۸\xrightarrow{R=۰}۲a^{۲}-۸=۰\rightarrow a^{۲}=۴\rightarrow a=\pm ۲$	
$x-۲=۰\rightarrow x=۲$ $P(x)=x^{۳}-ax+b\xrightarrow{x=۲}P(۲)=(۲)^{۳}-a(۲)+b$ $\xrightarrow{P(۲)=۰}۸-۲a+b=۰\rightarrow -۲a+b=-۸\ \ (۱)$ $x+۱=۰\rightarrow x=-۱$ $P(x)=x^{۳}-ax+b\xrightarrow{x=-۱}P(-۱)=(-۱)^{۳}-a(-۱)+b$ $\xrightarrow{P(-۱)=۳}-۱+a+b=۳\rightarrow a+b=۴\ \ (۲)$ $\xrightarrow{(۱),(۲)}\begin{cases}-۲a+b=-۸\\ a+b=۴\end{cases}\rightarrow -۳a=-۱۲\rightarrow a=۴\ ,\ b=۰$	۶
$x-۲=۰\rightarrow x=۲$ $P(۲)=۴(۲)^{۲}+۲m+۲m+۱=۴m+۱۳$ $\xrightarrow{P(۲)=۳}۴m+۱۳=۳\rightarrow ۴m=-۱۰\rightarrow m=-\frac{۵}{۲}$ $x+۲=۰\rightarrow x=-۲$ $f(-۲)=-\frac{۵}{۲}(-۲)^{۲}-(-\frac{۵}{۲})(-۲)+۳=-۱۲$	۷
$x-۲=۰\rightarrow x=۲$ $P(x)=x^{۳}+mx+۲\xrightarrow{x=۲}P(۲)=(۲)^{۳}+m(۲)+۲$ $\xrightarrow{P(۲)=۰}۱۰+۲m=۰\rightarrow m=-۵$	۸
$x-k=۰\rightarrow x=k$ $\xrightarrow{p(k)=۰}k^{۳}+k(k)^{۲}+۲=۰\rightarrow ۲k^{۳}=-۲\rightarrow k^{۳}=-۱\rightarrow k=-۱$	۹
$x-a=۰\rightarrow x=a$ $P(a)=۰\rightarrow a^{۲}+a-۲=۰\rightarrow a=۱\ \ or\ \ a=-۲$	۱۰
$x+۲=۰\rightarrow x=-۲$ $p(x)=۲x^{۳}+ax^{۲}-bx+۲\xrightarrow{p(-۲)=۰}۲(-۲)^{۳}+a(-۲)^{۲}-b(-۲)+۲=۰$ $\rightarrow -۱۶+۴a+۲b+۲=۰\rightarrow ۲a+b=۷$ $x-۱=۰\rightarrow x=۱$ $p(x)=۲x^{۳}+ax^{۲}-bx+۲\xrightarrow{p(۱)=۲}۲(۱)^{۳}+a(۱)^{۲}-b(۱)+۲=۲$ $\rightarrow ۲+a-b+۲=۲\rightarrow a-b=-۲$	۱۱

$\Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۷ \\ a-b=-۲ \end{cases} \rightarrow ۳a=۵ \rightarrow a=\frac{۵}{۳} \quad , \quad b=\frac{۱۱}{۳}$	
$x+۲=۰ \rightarrow x=-۲$ $\xrightarrow{p(-۲)=-۱} ۲(-۲)^۳+m(-۲)-۱=-۱$ $\rightarrow -۱۶-۲m-۱=-۱ \rightarrow m=-۸$	۱۲

اتحادهای جبری تکمیلی و کاربرد

$x^۵+۳۲=x^۵+۲^۵=(x+۲)(x^۴-۲x^۳+۴x^۲-۸x+۱۶)$	۱
$\frac{x^۵+۱}{x+۱}=\frac{(x+۱)(x^۴-x^۳+x^۲-x+۱)}{x+۱}=x^۴-x^۳+x^۲-x+۱$	۲
نادرست، زیرا به ازای $x=-۱$ (ریشه‌ی عبارت $x+۱$) مقدار عبارت $x^{۱۶}+۱$ برابر صفر نمی‌شود.	۳
$x^۵-۱=(x-۱)(x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)$	۴
نادرست ؛ زیرا باقی‌مانده برابر صفر نخواهد شد. $x+a=۰ \rightarrow x=-a$ $\rightarrow R=(-a)^n+a^n=a^n+a^n=۲a^n$	۵

تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل دوم

((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۱ : تناوب و توابع متناوب

۱	$T=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}=\frac{\frac{۲\pi}{۱}}{\lvert -\frac{\pi}{۲}\rvert}=\frac{۴\pi}{\pi}=۴$
۲	با فرض اینکه در تابع $y=a\sin bx+c$، مقدار b مثبت باشد، می‌توان نوشت که : $b=\frac{۲\pi}{T}\xrightarrow{b>۰}b=\frac{۲\pi}{۳}$ $a=\pm\frac{\max(f)-\min(f)}{۲}=\pm\frac{۹-۳}{۲}=\pm۳$ $c=\frac{\max(f)+\min(f)}{۲}=\frac{۹+۳}{۲}=۶$ $y=a\sin bx+c\rightarrow\begin{cases}y=۳\sin\frac{۲}{۳}\pi x+۶\\ y=-۳\sin\frac{۲}{۳}\pi x+۶\end{cases}$
۳	$\begin{cases}\lvert a\rvert+c=۵\\ -\lvert a\rvert+c=-۱\end{cases}\rightarrow c=۲\ ,\quad a=\pm۳$ $\begin{cases}T=۴\pi-۰=۴\pi\\ T=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}\end{cases}\rightarrow ۴\pi=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}\rightarrow\lvert b\rvert=\frac{۱}{۲}\rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$ $y=a\sin bx+c\rightarrow y=۳\sin(\frac{x}{۲})+۲\quad,\quad y=-۳\sin(-\frac{x}{۲})+۲$
۴	ابتدا به کمک دوره‌ی تناوب تابع مقدار b را تعیین می‌کنیم. $T=۲\pi-۰=۲\pi$

$\rightarrow b=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۲\pi}=۱$ تابع از نقطه‌ی $(۰,۴)$ می‌گذرد، لذا $f(x)=a+\cos bx \xrightarrow{f(۰)=۴} a+\cos b(۰)=۴ \rightarrow a+۱=۴ \rightarrow a=۳$ و در نهایت خواهیم داشت: $a+b=۳+۱=۴$	
دوره‌ی تناوب $T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$ $\max(f)=\lvert a\rvert+c=\lvert ۳\rvert+۰=۳$	۵
$T=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert} \xrightarrow{T=\frac{\pi}{۳}} \frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}=\frac{\pi}{۳} \rightarrow \lvert b\rvert=۶ \rightarrow b=\pm ۶$	۶
$b=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$ $a=\pm\frac{M-m}{۲}=\pm\frac{۳-(-۱)}{۲}=\pm ۲$ $c=\frac{M+m}{۲}=\frac{۳+(-۱)}{۲}=۱$ $y=a\cos bx+c \rightarrow \begin{cases} y=۲\cos(\pi x)+۱ \\ y=-۲\cos(\pi x)+۱ \end{cases}$	۷
درست، دوره‌ی تناوب این تابع $T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$ برابر است.	۸
$T=۲(۶-۳)=۶ \xrightarrow{T=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}} \frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}=۶ \rightarrow \lvert b\rvert=\frac{\pi}{۳} \xrightarrow{b>۰} b=\frac{\pi}{۳}$ $\max(f)=۶ \rightarrow \lvert a\rvert+c=۶$ $\min(f)=-۲ \rightarrow -\lvert a\rvert+c=۶$ $\rightarrow ۲c=۴ \rightarrow c=۲ \rightarrow \lvert a\rvert=۴$ $f(x)=a\sin(bx)+c \rightarrow \begin{cases} f(x)=۴\sin(\frac{\pi}{۲}x)+۲ \\ f(x)=-۴\sin(\frac{\pi}{۲}x)+۲ \end{cases}$	۹
$\begin{cases} c=۱ \\ \lvert a\rvert=۲ \xrightarrow{a>۰} a=۲ \end{cases}$	۱۰

$T=\pi=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}\to\lvert b\rvert=۲\xrightarrow{b<۰}b=-۲$	
$a=\pm\frac{M-m}{۲}\to a=\pm\frac{۳-(-۱)}{۲}=\pm۲$ $c=\frac{M+m}{۲}\to c=\frac{۳+(-۱)}{۲}=۱$ $T=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}\to\lvert b\rvert=\frac{۲\pi}{T}\to\lvert b\rvert=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{b<۰}۰b=-\frac{۱}{۲}$	۱۱
$T=۴\pi\to\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}=۴\pi\to\lvert b\rvert=\frac{۲\pi}{T}\to\lvert b\rvert=\frac{۱}{۲}$ $f(\pi)=-۱\to a\cos b\pi+c=-۱$ $\xrightarrow{\lvert b\rvert=\frac{۱}{۲}}a\cos\frac{۱}{۲}\pi+c=-۱\xrightarrow{\cos\frac{\pi}{۲}=۰}c=-۱$ $M=۲\to\lvert a\rvert+c=۲\xrightarrow{c=-۱}\lvert a\rvert=۳\xrightarrow{a>۰}a=۳$	۱۲
$Max(f)=\lvert a\rvert+c=\lvert-۳\rvert+۲=۵$ مقدار ماکزیمم $T=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}=\frac{۲\pi}{\lvert ۴\rvert}=\frac{\pi}{۲}$ دوره‌ی تناوب	۱۳
$Max(f)=\lvert a\rvert+c=\lvert ۲\rvert+(-۱)=۱$ مقدار ماکزیمم $Min(f)=-\lvert a\rvert+c=-\lvert ۲\rvert+(-۱)=-۳$ مقدار می‌نیمم $T=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}=\frac{۲\pi}{\lvert ۳\rvert}=\frac{۲\pi}{۳}$ دوره‌ی تناوب	۱۴

معرفی تابع تانژانت

درست، کافی است از این فاصله، زاویه‌ای مانند ۳۰۰ درجه یا همان $\frac{۵\pi}{۳}$ را انتخاب کنیم و سینوس و تانژانت آن را تعیین و مقایسه کنیم. $\sin\frac{۵\pi}{۳}=\sin(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=-\sin(\frac{\pi}{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ $\tan\frac{۵\pi}{۳}=\tan(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=-\tan(\frac{\pi}{۳})=-\sqrt{۳}$ $\sqrt{۳}>\frac{\sqrt{۳}}{۲}\xrightarrow{\times(-۱)}-\sqrt{۳}<-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to\tan\frac{۵\pi}{۳}<\sin\frac{۵\pi}{۳}$	۱
برد تابع تانژانت به صورت $y=\tan x$ مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی است.	۲

۳	درست
۴	$۳x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \rightarrow x \neq \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \ , \ k \in \mathbb{Z}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$
۵	نادرست، تابع تانژانت در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۲}$ از این بازه تعریف نمی‌شود و لذا نمی‌توان در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع در این بازه صحبت کرد.
۶	نادرست ؛ زیرا در این بازه شرایط تابع صعودی را ندارد.
۷	با توجه به نمودار تابع تانژانت، به سادگی معلوم می‌شود که برد این تابع در بازه‌ی داده شده، به صورت $\mathbb{R} - (۰, \sqrt{۳})$ یا $(-\infty, ۰] \cup [\sqrt{۳}, +\infty)$ خواهد بود.
۸	نادرست ؛ دامنه‌ی تابع $y = \tan x$ برابر مجموعه‌ی $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{R}\}$ است.
۹	۱- ؛ زیرا در بازه‌ی داده شده بیشترین مقدار $\tan\alpha$ در نقطه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ است و لذا $\tan\alpha = m + ۲ \xrightarrow{\tan\frac{\pi}{۴} = ۱} ۱ = m + ۲ \rightarrow m = -۱$

تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل دوم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۲ : معادلات مثلثاتی

۱	می‌دانیم که $\sin ۲x = ۲\sin x\cos x$، پس : $\sin ۲x - \cos x = ۰ \to ۲\sin x\cos x - \cos x = ۰ \to \cos x(۲\sin x - ۱) = ۰$ لذا : $\cos x = ۰ \to x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$ یا $۲\sin x - ۱ = ۰ \to \sin x = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{۶}} \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$
۲	$\sin ۲x - \cos x = ۰ \to ۲\sin x\cos x - \cos x = ۰ \to \cos x(۲\sin x - ۱) = ۰$ $\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} \cos x = ۰ \to x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۲\sin x - ۱ = ۰ \to \sin x = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{۶}} \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$
۳	$۲\cos^۲ x - \cos x = ۰ \to \cos x(۲\cos x + ۱) = ۰$ $\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} \cos x = ۰ \to x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۲\cos x + ۱ = ۰ \to \cos x = -\frac{۱}{۲} \to x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$
۴	$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱} (۲\cos^۲ x - ۱) - \cos x + ۱ = ۰$ $\to ۲\cos^۲ x - \cos x = ۰ \to \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰$

$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\begin{cases}\cos x=0\to x=\frac{\pi}{2}\\ 2\cos x-1=0\to\cos x=\frac{1}{2}\to x=\frac{\pi}{3}\end{cases}$	
$2\sin x\cos x=\frac{1}{2}\to\sin 2x=\frac{1}{2}\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{6}}\sin 2x=\sin(\frac{\pi}{6})$ $\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\to\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{12}\\ x=k\pi+\frac{5\pi}{12}\end{cases}$	۵
$4\sin x+2\sqrt{3}=0\to\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\to\sin x=\sin(-\frac{\pi}{3})$ $\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\begin{cases}x=2k\pi-\frac{\pi}{3}\\ x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\end{cases}\to\begin{cases}x=2k\pi-\frac{\pi}{3}\\ x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}\end{cases}$ $\xrightarrow{x\in[0,2\pi]}x=\frac{5\pi}{3}\ ,\ x=\frac{4\pi}{3}$	۶
$\sqrt{3}\tan 3x-1=0\to\tan 3x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{6}}3x=k\pi+\frac{\pi}{6}\quad(k\in\mathbb{Z})$ $\to x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{18}$	۷
$\sin 2x=\sin x\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\begin{cases}2x=2k\pi+x\\ 2x=2k\pi+\pi-x\end{cases}\to\begin{cases}x=2k\pi\\ 3x=2k\pi+\pi\end{cases}$ $\to\begin{cases}x=2k\pi\\ 3x=2k\pi+\pi\end{cases}\to\begin{cases}x=2k\pi\\ x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=(2k+1)\frac{\pi}{3}\end{cases}$	۸
$\tan 5x=\tan x\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}5x=k\pi+x\to 4x=k\pi\to x=\frac{k\pi}{4}$ $5x=k\pi+x\to 4x=k\pi\to x=\frac{k\pi}{4}$ $\to\begin{cases}k=0\to x=0\\ k=1\to x=\frac{\pi}{4}\end{cases}$	۹
$2\cos^2 x-7\cos x-4=0$	۱۰

$\to \frac{۱}{۲}(۲\cos x-۸)(۲\cos x+۱)=۰ \to (\cos x-۴)(۲\cos x+۱)=۰$ $\to \begin{cases} \cos x-۴=۰ \to \cos x=۴ \quad \times \\ ۲\cos x+۱=۰ \to \cos x=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\alpha=\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}} x=۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$	
$۲+۳\sin x=\cos ۲x \to ۲+۳\sin x=۱-۲\sin^۲ x \to ۲\sin^۲ x+۳\sin x+۱=۰$ $\to \frac{۱}{۲}(\sin x+۲)(\sin x+۱)=۰$ $\sin x=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۶}} \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \end{cases} ;k\in\mathbb{Z}$ $\sin x=-۱ \to x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \quad ;k\in\mathbb{Z}$	۱۱
می‌دانیم که $\sin(۲\pi+x)=\sin x$ و لذا: $\sin(۲\pi+x)\cos x=۰ \to \sin x\cos x=۰$ $\to \begin{cases} \sin x=۰ \to x=k\pi \\ \cos x=۰ \to x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$	۱۲

روابط مثلثاتی

$\tan\beta=\tan(\theta-\alpha)=\frac{\tan\theta-\tan\alpha}{۱+\tan\theta\tan\alpha}$ $=\frac{\frac{۶}{x}-\frac{۱}{x}}{۱+(\frac{۶}{x})(\frac{۱}{x})}=\frac{\frac{۵}{x}}{۱+\frac{۶}{x^۲}}=\frac{\frac{۵}{x}}{\frac{x^۲+۶}{x^۲}}=\frac{۵x^۲}{x(x^۲+۶)}=\frac{۵x}{x^۲+۶}$	۱
$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{\frac{۲}{۳}+(-۱)}{۱-(\frac{۲}{۳})(-۱)}=\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۳}}{۱+\frac{۲}{۳}}=\frac{-\frac{۱}{۳}}{\frac{۵}{۳}}=-\frac{۱}{۵}$	۲
$\tan(\alpha+\beta)=-۲ \to \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=-۲$ $\xrightarrow{\tan\alpha=۱} \frac{۱+\tan\beta}{۱-(۱)\tan\beta}=-۲ \to -۲+۲\tan\beta=۱+\tan\beta \to \tan\beta=۳$	۳

فصل سوم

((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۱ : حدهای نامتناهی

$\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{(x-۲)^۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)^۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x+۲}{x-۲}=\frac{۲^++۲}{۲^+-۲}=\frac{۴}{۰^+}=+\infty$	۱
$\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\frac{x^۲+x}{x^۲+۲x+۱}=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\frac{x(x+۱)}{(x+۱)^۲}=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\frac{x}{x+۱}=\frac{-۱}{(-۱)^-+۱}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$	۲
الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{[x]-۲}{x-۲}=\frac{[۲^-]-۲}{۲^--۲}=\frac{۱-۲}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{۲}{\tan x}=\frac{۲}{\tan((\frac{\pi}{۲})^+)}=\frac{۲}{-\infty}=۰$	۳
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\left(\frac{x+۱}{\tan x}\right)=\frac{\frac{\pi}{۲}+۱}{\pm\infty}=۰$	۴
$\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{ax-۳}{(۲-x)^۳}=\frac{۲a-۳}{۰^-}=+\infty\to ۲a-۳<۰\to a<\frac{۳}{۲}$	۵
الف) $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^-}\frac{۵x}{\lvert ۲x-۱\rvert}=\frac{۵(\frac{۱}{۲})}{\lvert ۲(\frac{۱}{۲})^--۱\rvert}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\lvert ۰^-\rvert}=\frac{\frac{۵}{۲}}{۰^+}=+\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\frac{x+۳}{x^۲+۶x+۹}=\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\frac{x+۳}{(x+۳)^۲}=\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\frac{۱}{x+۳}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$	۶
$\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{[x]-۱}{(x-۱)^۲}=\frac{۰-۱}{(۱^--۱)^۲}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$	۷
درست، زیرا :	۸

$\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\sin\pi^+}=\frac{1}{0^-}=-\infty$	
$\lim\limits_{x\to(-5)^-}\frac{x^2+2x-15}{x^2+10x+25}=\lim\limits_{x\to(-5)^-}\frac{(x+5)(x-3)}{(x+5)(x+5)}$ $=\lim\limits_{x\to(-5)^-}\frac{x-3}{x+5}=\frac{-8}{0^-}=+\infty$	۹
$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{[2x]-1}{x-1}=\frac{[2^+]-1}{1^+-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$	۱۰
$-\infty$ ؛ در همسایگی راست $\frac{\pi}{2}$، مقدار تابع از هر عدد منفی، کوچکتر است.	۱۱
صفر ؛ زیرا $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{x+1}{\tan x}=\frac{\frac{\pi}{2}+1}{-\infty}=0$ و $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{x+1}{\tan x}=\frac{\frac{\pi}{2}+1}{+\infty}=0$	۱۲
$\lim\limits_{x\to3}\frac{x+1}{(x-3)^2}=\frac{3+1}{0^+}=+\infty$	۱۳
$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin^2x+x}{x^2}=\lim\limits_{x\to00^-}\frac{\sin^2x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x}{x^2}=(1)^2+(-\infty)=-\infty$	۱۴
$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{[x]+\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{0+\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$	۱۵
نادرست ؛ طبق قضیه‌ها $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$ درست است.	۱۶
$+\infty$ ؛ زیرا $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{\lvert x\rvert}=\frac{1}{\lvert0^-\rvert}=\frac{1}{0^+}=+\infty$	۱۷
$\lim\limits_{x\to3^-}\frac{[x]-3}{3-x}=\lim\limits_{x\to3^-}\frac{2-3}{3-x}=\frac{-1}{3-3^-}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$	۱۸

تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل سوم

((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۲ : حد در بی‌نهایت

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x-x^{۳}}{۲x-۱}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^{۳}}{۲x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^{۲}}{۲}=-\infty$	۱
$\lim\limits_{x\to+\infty}(۵-۳x-۴x^{۳})=\lim\limits_{x\to+\infty}(-۴x^{۳})=-۴(+\infty)=-\infty$	۲
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۵x^{۳}+۲x-۱}{-۲x^{۳}+۴}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۵x^{۳}}{-۲x^{۳}}=-\frac{۵}{۲}$	۳
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^{۲}+۲x+۱}{۴x-۱}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^{۲}}{۴x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{۴}=+\infty$	۴
الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=۲$ ب) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۱)^{+}}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to(-۱)^{-}}f(x)=+\infty\end{cases}$	۵
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{mx^{۲}+x}{۲x^{۲}+۳}=۷\to\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{mx^{۲}}{۲x^{۲}}=۷\to\frac{m}{۲}=۷\to m=۱۴$	۶
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{۴}+۳x-۱}{۲+x-x^{۴}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{۴}}{-x^{۴}}=-۱$	۷
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۴-x+x^{۲}}{۵-۲x^{۲}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}}{-۲x^{۲}}=-\frac{۱}{۲}$	۸
الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x^{۲}-۳x}{۱-x^{۲}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x^{۲}}{-x^{۲}}=-۲$	۹

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-۳x^۳+۲x+۱)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-۳x^۳)=-۳(-\infty)^۳=+\infty$	
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^۳-۴x^۲}{-x^۳\lvert x\rvert-۲}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^۳-۴x^۲}{-x^۳(-x)-۲}$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^۳-۴x^۲}{x^۴-۲}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^۳}{x^۴}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۱}{x^۲}=۰$	۱۰
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-۷}{x^۵-۴x+۳}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^۵}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۱}{x^۴}=۰$	۱۱
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۴x^۳+۵x+۲}{۷x^۳+۳x^۲}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۴x^۳}{۷x^۳}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۴}{۷}=-\dfrac{۴}{۷}$	۱۲
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۴x^۳+۲x^۲+۱}{۱+۸x-x^۲}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۴x^۳}{-x^۲}=\lim\limits_{x\to-\infty}۴x=-\infty$	۱۳

خطوط مجانب نمودار تابع (مجانب‌های افقی و قائم)

برای تعیین مجانب افقی، کافی است حد تابع را در بی‌نهایت بدست آوریم. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۱-x^۲}{x^۲+x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^۲}{x^۲}=-۱$ $\Rightarrow y=-۱$ مجانب افقی برای تعیین مجانب قائم، کافی است ریشه‌های مخرج کسر را تعیین کنیم. $x^۲+x=۰\to x(x+۱)=۰\to\begin{cases}x=۰\\x=-۱\end{cases}$ حال چون $x=-۱$ ریشه‌ی صورت است، پس مجانب قائم نیست. لذا این تابع فقط یک مجانب قائم به معادله‌ی $x=۰$ دارد.	۱
$x^۲-۴=۰\to x^۲=۴\to x=\pm۲$ مجانب‌های قائم $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۲x^۲}{x^۲-۴}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۲x^۲}{x^۲}=۲\to y=۲$ مجانب افقی	۲
$f(x)=\dfrac{ax^۲+۱}{۲x^۲-۳x}\xrightarrow{\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=۲}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^۲+۱}{۲x^۲-۳x}=۲\to\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^۲}{۲x^۲}=۲$ $\to\dfrac{a}{۲}=۲\to a=۴$	۳
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-۴x^۳}{x^۳+۵}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-۴x^۳}{x^۳}=-۴\to y=-۴$ مجانب افقی	۴

۵

گزینه‌ی پ صحیح است. زیرا:

$۴-x=۰ \to x=۴$ مجانب قائم

برای تعیین وضعیت نمودار تابع، نسبت به خط مجانب قائم آن به شکل زیر عمل می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\lim_{x\to ۴^+}\frac{۲[x]}{۴-x}=\frac{۲(۴)}{۴-۴^+}=\frac{۸}{۰^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=\lim_{x\to ۴^-}\frac{۲[x]}{۴-x}=\frac{۲(۳)}{۴-۴^-}=\frac{۶}{۰^+}=+\infty$$

۶

$x^۲+۲=۰ \to x^۲=-۲ \to$ تابع فاقد مجانب قائم می‌باشد.

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x-۵}{x^۲+۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x}{x^۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳}{x}=۰\to y=۰$$ مجانب افقی

۷

مجانب‌های افقی

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|+۱}{۲x-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+۱}{۲x-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{۲x}=\frac{۱}{۲}\to y=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|+۱}{۲x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+۱}{۲x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۲x}=-\frac{۱}{۲}\to y=-\frac{۱}{۲}$$

۸

ابتدا تابع را به صورت دوضابطه‌ای تعریف می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{۱}{x-|x|}\xrightarrow{x>۰} f(x)=\frac{۱}{x-(-x)}\to f(x)=\frac{۱}{۲x}$$

$$f(x)=\frac{۱}{x-|x|}\xrightarrow{x\le ۰} f(x)=\frac{۱}{x-x}\to f(x)=$$ تعریف نمی شود.

$$f(x)=\frac{۱}{x-|x|}=\begin{cases} no\,anser & x>۰ \\ \frac{۱}{۲x} & x<۰\end{cases}$$

لذا به سادگی معلوم است که تابع در شاخه‌ی $(-\infty,۰)$، مجانب قائمی به معادله‌ی $x=۰$ دارد.

۹

برای تعیین مجانب‌های قائم یک تابع کسری، ریشه‌های مخرج آن را تعیین می‌کنیم.

$$۴-۳x-x^۲=۰\to -x^۲-۳x+۴=۰\to x^۲+۳x-۴=۰$$
$$\to (x+۴)(x-۱)=۰\to x=-۴ \quad , \quad x=۱$$

حال چون $x=۱$ ریشه‌ی صورت می‌باشد، پس خط $x=۱$ مجانب قائم نیست. لذا خط $x=۴$ تنها مجانب قائم نمودار تابع است.

برای تعیین مجانب افقی، حد تابع را وقتی x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند را تعیین می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲-۱}{۴-۳x-x^۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲}{-x^۲}=-۱\to y=۱$$ مجانب افقی

۱۰

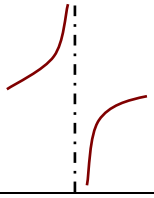
$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x^۳+۲x}$$

$$x^{۳}+۲x=۰ \to x(x^{۲}+۲)=۰ \to \begin{cases} x=۰ \\ x^{۲}+۲=۰ \to x^{۲}=-۲ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-۱}{x^{۳}+۲x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x^{۳}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲}{x^{۲}}=۰$$

لذا خط $x=۰$ و $y=۰$ به ترتیب مجانب قائم و مجانب افقی نمودار تابع هستند.

از طرفی چون $\lim_{x\to ۰^{+}} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to ۰^{-}} f(x)=+\infty$ ، لذا سپس وضعیت نمودار تابع را در نزدیکی مجانب قائم آن به شکل زیر است.



۱۱

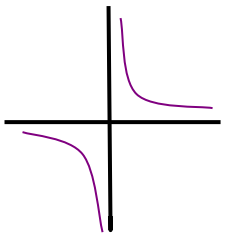
در تابع $f(x)=\dfrac{x-۳}{(x-۳)(x+۳)}$ ، خط $x=۳$ صورت را صفر می‌کند و لذا شرایط مجانب قائم را ندارد ولی خط $x=-۳$ مجانب قائم می‌باشد، زیرا ؛

$$\lim_{x\to(-۳)^{+}} f(x)=\frac{۱}{۰^{+}}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to(-۳)^{-}} f(x)=\frac{۱}{۰^{-}}=-\infty$$

همچنین خط $y=۰$ مجانب قائم نمودار تابع است.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^{۲}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

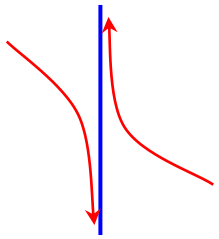
بر این اساس نمودار تابع f را در همسایگی مجانب قائم آن به صورت زیر می‌باشد.



۱۲

الف) خط $x=۱$ مجانب قائم است. زیرا ؛

$$f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x^{۳}-۱}$$



$$\lim_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{۲}+۱}{x^{۳}-۱}=\frac{۱}{(۱^{+})^{۳}-۱}=\frac{۱}{۰^{+}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۱^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{x^{۲}+۱}{x^{۳}-۱}=\frac{۱}{(۱^{-})^{۳}-۱}=\frac{۱}{۰^{-}}=-\infty$$

پس خط $x=۱$ قائم نمودار تابع است. همچنین وضعیت نمودار $f(x)$ در همسایگی خط $x=۱$ به صورت زیر است.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}+۱}{x^{۳}-۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}}{x^{۳}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

	پس خط $y=۰$ مجانب افقی نمودار تابع می‌باشد.
۱۳	$f(x)=\frac{۱}{۱-\cos x}$ $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱-\cos x}=\frac{۱}{۱-۱^-}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۱}{۱-\cos x}=\frac{۱}{۱-۱^-}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$ لذا با مشاهده‌ی حدود راست و چپ تابع در نقطه‌ی $x=۰$، به سادگی معلوم است که نمودار شماره‌ی ۴ جواب مسأله است.
۱۴	$x^۲-۴=۰\to x^۲=۴\to x=\pm ۲$ خطوط $x=۲$ و $x=-۲$ مجانب قائم نمودار تابع هستند. زیرا؛ $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۵x+۲}{x^۲-۴}=\frac{۱۲}{۰^+}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۵x+۲}{x^۲-۴}=\frac{۱۲}{۰^-}=-\infty$ همچنین چون؛ $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{۵x+۲}{x^۲-۴}=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{۵x}{x^۲}=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{۵}{x}=۰$ پس خط $y=۰$، مجانب افقی نمودار تابع است.
۱۵	$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{-۴x+۳}{۲x+۱}=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{-۴x}{۲x}=-۲\to y=-۲$ مجانب افقی $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۲})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۲})^+}\frac{-۴x+۳}{۲x+۱}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۲})^-}\frac{-۴x+۳}{۲x+۱}=-\infty\end{cases}\to x=-\frac{۱}{۲}$ مجانب قائم

تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

فصل چهارم

((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۱ : آشنایی با مفهوم مشتق

۱	الف) b ب) d پ) e
۲	الف) نقطه‌ی E ب) نقطه‌ی B پ) نقطه‌ی C ت) $m_D > m_A$

مشتق تابع در یک نقطه

۱	$f(x)=x^{۲}-۳x \xrightarrow{x=۱} f(۱)=(۱)^{۲}-۳(۱)=۱-۳=-۲$ $f'(۱)=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x^{۲}-۳x)-(-۲)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x-۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}(x-۲)=۱-۲=-۱$
۲	نادرست $(۳f+g)'(۱)=۳f'(۱)+g'(۱)=۳(۲)+(-۳)=۳$
۳	صفر ؛ زیرا این تابع، یک تابع ثابت می‌باشد. شیب (مشتق) هر تابع ثابت برابر صفر است.

شیب و معادله‌ی خط مماس

۱	$m=f'(۰)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}=+\infty$ لذا تابع مماس قائم دارد و چون $A(۰,۰)$ پس $x=۰$
۲	-۹ ؛ زیرا معادله‌ی خط مماس با این شرایط می‌شود، $y=۲x-۹$ و این خط محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -۹ قطع می‌کند.
۳	درست ؛ زیرا مشتق راست تابع در این نقطه بی‌نهایت می‌شود. $f'_{+}(۰)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}}=\frac{۱}{۰^{+}}=+\infty$
۴	چون خط d در نقطه‌ی $P(۱,۳)$ بر نمودار تابع $f(x)$ مماس و $f'(۱)=-۱$ است. بنابراین شیب خط d برابر -۱ است. اکنون معادله‌ی خط مماس را به صورت زیر تعیین می‌کنیم.

$y=m(x-\alpha)-\beta \to y=-(x-۱)-۳$ بنابر اینکه خط مماس از نقطه‌ی $Q(۲a+۱,a)$ می‌گذرد. پس: $a=-(۲a+۱-۱)-۳ \to a=-۲a-۳ \to a=۱$ روش دوم : چون خط d در نقطه‌ی $P(۱,۳)$ بر نمودار تابع $f(x)$ مماس و $f'(۱)=-۱$ است. بنابراین شیب خط d برابر ۱- است. اکنون شیب خط مماس را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x-۳}{(۲x+۱)-۱}=\frac{a-۳}{۲a}\xrightarrow{m=-۱}\frac{a-۳}{۲a}=-۱\to ۳a=۳\to a=۱$	
ابتدا شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه‌ی $x=۱$ $m=\frac{۱۰-۶}{۰-۲}=-\frac{۴}{۲}=-۲=f'(۲)$ $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{۳h}=-\frac{۱}{۳}\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=-\frac{۱}{۳}f'(۲)=-\frac{۱}{۳}(-۲)=\frac{۲}{۳}$	۵
$\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{h}=-۲\to \lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=-(-۲)\to f'(۲)=۲$ $\to m=۲$ شیب خط مماس $y=mx+b\xrightarrow{m=۲}y=۲x+b\xrightarrow{(۲,۵)}۵=۲(۲)+b\to b=۱$ $y=۲x+۱$ معادله‌ی خط مماس $x_B=۰\xrightarrow{y=۲x+۱}y=۲(۰)+۱\to y=۱\to y_B=۱$ عرض نقطه‌ی B	۶

تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل چهارم

((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۲ : مشتق‌پذیری و پیوستگی

۱	درست، اگر تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته بوده و مشتق راست و چپ عددهای برابر باشند، در این صورت تابع مشتق پذیر می‌شود.
۲	تابع در یک نقطه، مشتق‌پذیر است، هرگاه در این نقطه، پیوسته بوده و مشتقات راست و چپ آن در این نقطه برابر باشند. حال اگر یکی از این دو شرط برقرار نباشد، تابع در نقطه‌ی داده شده مشتق‌پذیر نمی‌باشد. $f(x)=\|۲x-۴\|=\begin{cases} ۲x-۴ & x\geq ۰ \\ -(۲x-۴) & x<۰ \end{cases}=\begin{cases} ۲x-۴ & x\geq ۰ \\ -۲x+۴ & x<۰ \end{cases}$ $f(۲)=۲(۲)-۴=۰$ مشتق راست $f'_+(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{(۲x-۴)-۰}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۲(x-۲)}{x-۲}=۲$ مشتق چپ $f'_-(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{(-۲x+۴)-۰}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^-}-\frac{-۲(x-۲)}{x-۲}=-۲$ حال بدون بررسی پیوستگی و به دلیل اینکه $f'_+(۲)\neq f'_-(۲)$، نتیجه می‌گیریم که این تابع در نقطه‌ی $x=۲$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.
۳	نادرست، در چنین حالتی تابع مشتق‌پذیر نیست.
۴	$f'(۰)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x}-۰}{x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}=+\infty$ لذا خط $x=۰$، مماس قائم برای تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ است.
۵	حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x^۲+۱)=۲$ حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۳x-۱)=۲$

مقدار $f(۱)=(۱)^۲+۱=۲$

تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته است.

بررسی مشتقات یک طرفه

مشتق راست $f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x^۲+۱-۲}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x^۲-۱}{x-۱}$

$=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۲$

مشتق چپ $f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{۳x-۱-۲}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{۳x-۳}{x-۱}$

$=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{۳(x-۱)}{x-۱}=۳$

حال چون $f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$ پس تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۶ نباشد

۷ نادرست ، تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست، زیرا در این نقطه پیوسته نمی‌باشد.

۸ می دانیم که یک تابع در یک نقطه، مشتق‌پذیر است ، هرگاه در این نقطه هم پیوسته باشد و هم مشتقهای یک طرفه‌ی آن در نقطه‌ی داده شده برابر باشند. لذا برای حل این مسأله، ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ را بررسی می‌کنیم.

$\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(۲x^۲-۳)=۲(۱)^۲-۳=-۱$

$\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۳x-۴)=۳(۱)-۴=-۱$

$f(۱)=۲(۱)^۲-۳=-۱$

و چون $\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=f(۱)$ ، پس تابع در این نقطه، پیوسته است.

اکنون مشتق‌های یکطرفه را در نقطه‌ی داده شده ، بررسی می‌کنیم.

$f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(۲x^۲-۳)-(-۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{۲x^۲-۲}{x-۱}=۴$

$f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{(۳x-۴)-(-۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{۳x-۳}{x-۱}=۳$

و چون $f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$ ، لذا تابع در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

توجه: به جای استفاده از تعریف مشتق، برای بررسی مشتق‌های یک طرفه، می‌توان از فرمول‌های مشتق به شکل زیر نیز استفاده کرد.

$f(x)=\begin{cases}۳ & x<۱\\ ۴x & x>۱\end{cases}\to f'_+(۱)=۴(۱)=۴ \quad , \quad f'_-(۱)=۳$

۹	$f'(۲)=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}}{\sqrt[۳]{x-۲}\times\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}}$ $=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}}=+\infty$ لذا تابع در نقطه‌ی $x=۲$ مشتق‌پذیر است.
۱۰	ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ را بررسی می‌کنیم. حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x^۲+x)=۱+۱=۲$ حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x+۱)=۱+۱=۲$ مقدار $f(۱)=(x^۲+x)\Big\|_{x=۱}=۱+۱=۲$ لذا تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته است. اکنون مشتقات یک طرفه را بررسی می‌کنیم. مشتق راست $f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{(x+۱)-(۲)}{x-۱}=۱$ مشتق چپ $f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{(x^۲+x)-(۲)}{x-۱}=۳$ و چون $f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست.
۱۱	می دانیم که یک تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر است، هرگاه در این نقطه پیوسته باشد و مشتقات راست و چپ تابع در این نقطه برابر باشند. در اینجا مشتق راست و چپ تابع در نقطه‌ی $x=۰$ برابر نیستند و لذا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. $f(۰)=۰$ $f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x^۲}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}x=۰$ $f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{\|x\|}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{-x}{x}=-۱$
۱۲	$f(x)=\|x\|(x-۲)=\begin{cases}x(x-۲)=x^۲-۲x & x\geq ۰\\ -x(x-۲)=-x^۲+۲x & x<۰\end{cases}$ $f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۲x}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}(۲x-۲)=-۲$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-2x+2)=2$$

چون $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ ، لذا تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

۱۳

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}\to f(x)=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=\begin{cases}x-2 & x\geq 2\\ 2-x & x<2\end{cases}$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=1$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2-x}{x-2}=-1$$

چون $f'_+(2)\neq f'_-(2)$ ، لذا تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

۱۴

الف) نادرست ؛ زیرا این تابع در نقطه‌ی $x=0$ دارای مماس قائم است.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

ب) نادرست ؛ زیرا در این نقطه تابع داده شده پیوسته نیست.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+3)=4$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x)=2$$

۱۵

تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر است، هرگاه در آن نقطه، پیوسته باشد و مشتقات یکطرفه برابر شوند.

بررسی پیوستگی:

حد راست $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+3)=4$

حد چپ $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(4x)=4$

مقدار $f(1)=(1)^2+3=4$

تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است.

بررسی مشتقات یکطرفه

مشتق راست $f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2+3)-4}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$

مشتق چپ $f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{4x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{4(x-1)}{x-1}=4$

مشتقات یکطرفه در نقطه‌ی $x=1$ برابر نیستند، لذا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱۶

$f(1)=0$

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x|x-۱|-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x(x-۱)}{x-۱}=۱$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x|x-۱|-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-x(x-۱)}{x-۱}=-۱$$

$$\Rightarrow f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$$

لذا تابع در نقطه‌ی داده شده مشتق‌پذیر نیست.

تابع مشتق

۱

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h-x)}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{۱}{\sqrt{x+۰}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

محاسبه‌ی مشتق توابع

۱

در برای مشتق‌گیری از این توابع، کافی است فرمول‌های مشتق را مورد استفاده قرار دهیم.

الف) $f'(x)=۵(-۶x+۱)(-۳x^۲+x)^۴(۲x)+۲(-۳x^۲+x)^۵$

فرمول‌های مورد استفاده :

$$y=uv\to y=u'v+v'u$$

$$y=au^n\to y'=anu'u^{n-۱}$$

ب) $g'(x)=۵(۱+\tan^۲ x)+۲x\cos x^۲$

فرمول‌های مورد استفاده :

$$y=\tan x\to y=۱+\tan^۲ x$$

$$y=\sin u\to y'=u'\cos u$$

پ) $h'(x)=-\frac{۲}{x^۲}$

فرمول مورد استفاده :

$$y=\frac{۱}{x}\to y=\frac{-۱}{x^۲}$$

۲

برای مشتق‌گیری از توابع داده شده، فرمول‌های مشتق‌گیری را بکار می‌گیریم.

الف) $y=\dfrac{3x^2}{x^3-5x+2}\rightarrow y'=\dfrac{6x(x^3-5x+2)-(3x^2-5)(3x^2)}{(x^3-5x+2)^2}$ فرمول استفاده شده : $y=\dfrac{u}{v}\rightarrow y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ ب) $y=\cos^4(3x-2)\rightarrow y'=-4(3)\sin(3x-2)\cos^3(3x-2)$ فرمول استفاده شده : $y=a\cos^n u\rightarrow y'=-anu'\sin u\cos^{n-1}u$	
الف) $f'(x)=3(8x-5)(4x^2-5x)^2(\sqrt{x}+1)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(4x^2-5x)^3$ ب) $g'(x)=\dfrac{9(x-x^2)-(1-2x)(9x+1)}{(x-x^2)^2}$ پ) $h'(x)=6x\cos(3x^2)$	۳
الف) $f'(x)=\dfrac{7}{2\sqrt{7x}}(3x^2+2)+(6x)\sqrt{7x}$ ب) $g'(x)=-3(2)\sin(2x)\cos^2(2x)-\dfrac{-1}{x^2}=-6\sin(2x)\cos^2(2x)+\dfrac{1}{x^2}$	۴
الف) $f'(x)=9(15x^2-1)(5x^3-x)^8(\sqrt{2x+1})+(5x^3-x)^9(\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}})$ $y=u.v\rightarrow y'=u'.v+v'.u$ و $y=u^n\rightarrow y'=nu'.u^{n-1}$ ب) $g(x)=\dfrac{4\tan x}{3x^2-1}\rightarrow g'(x)=\dfrac{4(1+\tan^2 x)(3x^2-1)-(6x)(4\tan x)}{(3x^2-1)^2}$ $y=\dfrac{u}{v}\rightarrow y'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$	۵
الف) $f'(x)=(4x^3+2)(\sqrt{x})+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^4+2x)$ ب) $g'(x)=3(1+\tan^2 x)-3(2)\cos(2x)\sin^2(2x)$	۶
الف) $f(x)=\dfrac{5\tan x}{1-\sin x}\rightarrow f'(x)=\dfrac{5(1+\tan^2 x)(1-\sin x)-(-\cos x)(5\tan x)}{(1-\sin x)^2}$ ب) $g(x)=\cos^7(x^2)\rightarrow g'(x)=7(2x)(-\sin x)(\cos^6(x^2))$ پ) $h(x)=(3x+5)^6\rightarrow h'(x)=6(3)(3x+5)^5$	۷

$f(x)=۲x^{۳}+۱\rightarrow f'(x)=۶x^{۲}\rightarrow\begin{cases}f'(۴)=۶(۴)^{۲}=۹۶\\ f'(۱)=۶(۱)^{۲}=۶\end{cases}$ $g(x)=\sqrt{x}\rightarrow g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\rightarrow\begin{cases}g'(۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۴}\\ g'(۱)=\frac{۱}{۲\sqrt{۱}}=\frac{۱}{۲}\end{cases}$ $(f+g)'(۴)=f'(۴)+g'(۴)=۹۶+\frac{۱}{۴}=\frac{۳۸۵}{۴}$ $(f+g)'(۴)+(f\times g)'(۱)=f'(۱)\times g(۱)+f(۱)\times g'(۱)=(۶)(۱)+(۳)(\frac{۱}{۲})$ $=(۶)(۱)+(۳)(\frac{۱}{۲})=۶+\frac{۳}{۲}=\frac{۱۵}{۲}$ $(f+g)'(۴)+(f\times g)'(۱)=\frac{۳۸۵}{۴}+\frac{۱۵}{۲}=\frac{۳۸۵+۳۰}{۴}=\frac{۴۱۵}{۴}$	۸
الف) $f'(x)=۲\times ۳x^{۲}(x^{۳}+۱)(\sqrt{۳x+۲})+\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^{۳}+۱)^{۲}$ ب) $g'(x)=۲\times ۳\times\cos ۳x\sin ۳x+۲x(۱+\tan^{۲}(x^{۲}))$	۹
الف) $f'(x)=\frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}})(x^{۳}-۶x+۱)-(۳x^{۲}-۶)(\sqrt{x+۱})}{(x^{۳}-۶x+۱)^{۲}}$ ب) $g'(x)=۲(۱+\tan^{۲}x)+(۵)(۶x^{۲})(-\sin(۲x^{۳}))(\cos^{۴}(۲x^{۳}))$	۱۰
$\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{۲x-۴}=۵\rightarrow\frac{۱}{۲}\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۵$ $\xrightarrow{\times ۲}\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۱۰\xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)}f'(۲)=۱۰$ $g(x)=xf(x)\rightarrow g'(x)=۱\times f(x)+xf'(x)=f(x)+xf'(x)$ $\rightarrow g'(۲)=f(۲)+(۲)f'(۲)=۷+(۲)(۱۰)=۲۷$	۱۱
الف) $f'(x)=\frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-۵)(x-۳)-(۱)(\sqrt{x}-۵x)}{(x-۳)^{۲}}$ ب) $g'(x)=-۳(\sin x)(\cos^{۲}x)(\tan x)+(۱+\tan^{۲}x)(\cos^{۳}x)$	۱۲
الف) $f(x)=(۱+\sin ۵x)^{۳}$	۱۳

$\rightarrow f'(x)=۳(۵\cos ۵x)(۱+\sin ۵x)^{۲}$ ب) $g(x)=(x^{۳}-۵x)(\sqrt{x^{۲}+۱})$ $\rightarrow g(x)=(۳x^{۲}-۵)(\sqrt{x^{۲}+۱})+(x^{۳}-۵x)(\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۱}})$	
الف) $f'(x)=۷(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۳)(\sqrt{x}+۳x)^{۶}$ ب) $g(x)=(۳)(۴)(-\sin ۴x)(\cos^{۲} ۴x)$	۱۴

معادله‌ی خط مماس

ابتدا محل تقاطع نمودار تابع را با محور محور xها، به دست می‌آوریم. $f(x)=x^{۳}-۸\xrightarrow{f(x)=۰}x^{۳}-۸=۰\rightarrow x=۲\rightarrow A(۲,۰)$ اکنون مقدار مشتق تابع را در این نقطه به دست آوریم. حاصل شیب خط مماس است. $f'(x)=۳x^{۲}\rightarrow f'(۲)=۳(۲)^{۲}=۱۲\rightarrow m=۱۲$ حال چون از خط مماس مختصات یک نقطه و شیب را داریم. پس می‌توانیم، معادله‌ی این خط را به شکل زیر تعیین کنیم. $y=m(x-a)+b$ $\rightarrow y=۱۲(x-۲)+۰\rightarrow y=۱۲x-۲۴$	۱
$x=۰$ ؛ زیرا $y=\sqrt[۳]{x}\rightarrow y'=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$ $\lim\limits_{x\rightarrow ۰}\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}=+\infty$	۲

مشتق تابع مرکب و قاعده‌ی زنجیری

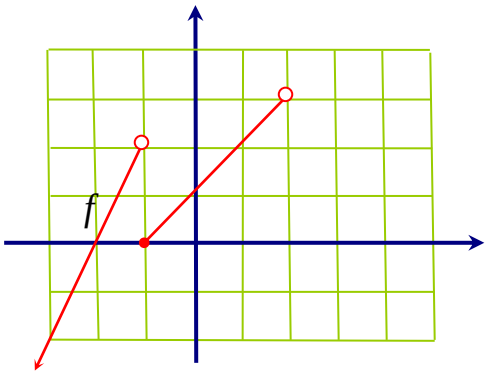
$((f+g)of)'(۱)=f'(۱)(f+g)'(f(۱))=f'(۱)(f'(۱)+g'(۱))$ $=f'(۱)(f'(۱)+g'(۱))=۳(۳+۵)=۲۴$	۱

مشتق مراتب بالاتر

$f(x)=\cos ۲x\rightarrow f'(x)=-۲\sin ۲x\rightarrow f''(x)=-۴\cos ۲x$ $f''(\frac{\pi}{۸})=-۴\cos ۲(\frac{\pi}{۸})=-۴\cos(\frac{\pi}{۴})=-۴(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۲\sqrt{۲}$	۱
پ) ۲ ؛ زیرا $f(x)=x^{۳}+۴x^{۲}-۱\rightarrow f'(x)=۳x^{۲}+۸x\rightarrow f''(x)=۶x+۸$	۲

$f''(-۱)=۶(-۱)+۸=-۶+۸=۲$	
۳	۱- ؛ زیرا $f(x)=\sin x \to f'(x)=\cos x \to f''(x)=-\sin x$ $\Rightarrow f''(\frac{\pi}{۲})=-\sin(\frac{\pi}{۲})=-۱$
۴	درست ؛ زیرا $f(x)=\sin x \to f'(x)=\cos x \to f''(x)=-\sin x$ $f'(\frac{\pi}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۲})=۰$ $f''(\pi)=-\sin(\pi)=۰$

مشتق‌پذیری در یک فاصله

۱	برای رسم نمودار تابع داده شده، ابتدا برای هر ضابطه، نقطه‌یابی می‌کنیم. $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x+۱ & -۱\le x<۲ \end{cases}$ $y=۲x+۴ \xrightarrow{x<-۱} A(-۱,۲), B(-۲,۰)$ $y=x+۱ \xrightarrow{-۱\le x<۲} C(-۱,۰), D(۲,۳)$  اکنون با توجه به نمودار رسم شده، به سادگی مشخص است که تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ پیوسته نیست. در نتیجه تابع در این نقطه نیز مشتق‌پذیر نیست و لذا تابع در بازه‌ی $[-۲,۰]$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.
۲	درست، طبق تعریف مشتق‌پذیری تابع در یک بازه

تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی دوره ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل چهارم

((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۳ : مفهوم آهنگ تغییر و کاربرد آن

۱	سرعت لحظه‌ای $f'(t)=۳t^{۲}-۱$ سرعت متوسط $\frac{\Delta f}{\Delta t}=۲$ $f'(t)=\frac{\Delta f}{\Delta t}\to ۳t^{۲}-۱=۲\to ۳t^{۲}=۳\xrightarrow{t>۰}t=۱$
۲	$m(t)=\sqrt{t}+۲t^{۲}\to m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۴t$ $\to m'(۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}+۴(۴)=\frac{۱}{۴}+۱۶=\frac{۶۵}{۴}$
۳	الف) $\overline{f(t)}=\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{f(۳)-f(۰)}{۳-۰}=\frac{۱۸-۳}{۳}=۵$ سرعت متوسط ب) $f'(t)=۴t-۱\to f'(۴)=۴(۴)-۱=۱۵$ سرعت لحظه‌ای
۴	آهنگ لحظه‌ای $m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۲$ آهنگ متوسط $\overline{m(t)}=\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{m(۴)-m(۰)}{۴-۰}=\frac{۱۰-۰}{۴-۰}=\frac{۵}{۲}$ $m'(t)=\frac{\Delta m}{\Delta t}\to\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۲=\frac{۵}{۲}\to\sqrt{t}=۱\to t=۱$
۵	آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(t)=\frac{۱۲۰}{t}+۵\to f'(t)=-\frac{۱۲۰}{t^{۲}}\to f'(۲)=-\frac{۱۲۰}{(۲)^{۲}}=-۳۰$ آهنگ متوسط تغییر $\overline{f(t)}=\frac{f(۶)-f(۴)}{۶-۴}=\frac{(\frac{۱۲۰}{۶}+۵)-(\frac{۱۲۰}{۴}+۵)}{۶-۴}=\frac{۲۵-۳۵}{۲}=-۵$ مجموع آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط تغییر $(-۳۰)+(-۵)=-۳۵$

۶	الف) $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(۰)-f(-۲)}{۰-(-۲)}=\frac{-۳+۲}{۲}=-\frac{۱}{۲}$ ب) $f'(x)=\frac{۳(x^۲+۲)-(۲x)(۳x-۶)}{(x^۲+۲)^۲}\to f'(-۱)=-۱$
۷	نادرست، اگر تابع صعودی باشد، آهنگ لحظه‌ای آن در هر نقطه عدد غیر منفی است.
۸	$f(۴)=\sqrt{۴+۵}=۳$ $f(-۱)=\sqrt{-۱+۵}=۲$ $\overline{f(x)}=\frac{f(۴)-f(-۱)}{۴-(-۱)}=\frac{۳-۲}{۴+۱}=\frac{۱}{۵}$ آهنگ متوسط تغییر
۹	$\overline{h(t)}=\frac{h(۴)-h(۳)}{۴-۳}=\frac{۸۰-۷۵}{۱}=۵$ سرعت متوسط $h'(t)=-۱۰t+۴۰\to\xrightarrow{h'(t)=۰}-۱۰t+۴۰=۰\to t=۲$
۱۰	$\overline{f(x)}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{f(۲۵)-f(۰)}{۲۵-۰}=\frac{۸۵-۵۰}{۲۵}=\frac{۳۵}{۲۵}=\frac{۷}{۵}$ آهنگ متوسط تغییر قد $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰\to f'(x)=۷(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})$ $f'(۴۹)=۷(\frac{۱}{۲\sqrt{۴۹}})=\frac{۱}{۲}$ آهنگ لحظه‌ای تغییر قد
۱۱	$\overline{f(x)}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{f(۳)-f(۰)}{۳-۰}=\frac{-۲-۱}{۳}=-۱$ آهنگ متوسط تغییر $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-۴x+۱\to f'(x)=x^۲-۴$ آهنگ لحظه‌ای تغییر $f'(a)<-۱\to a^۲-۴<-۱\to a^۲<۳\to-\sqrt{۳}<a<\sqrt{۳}$
۱۲	الف) $f(۳)=۸+f(۱)\to f(۳)-f(۱)=۸$ $\overline{f(x)}=\frac{f(۳)-f(۱)}{۳-۱}=\frac{۸}{۲}=۴$ آهنگ متوسط تغییر ب) $g(x)=\sqrt[۳]{x}\to g'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\to g'(۲۷)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(۲۷)^۲}}=\frac{۱}{۳\times۹}=\frac{۱}{۲۷}$ آهنگ لحظه‌ای تغییر
۱۳	الف) $f(۱)=(۱)^۲-۳(۱)+۱۲=۱۰$ $f(۶)=(۶)^۲-۳(۶)+۱۲=۳۰$

ب)	$\overline{f(x)} = \frac{f(۶)-f(۱)}{۶-۱} = \frac{۳۰-۱۰}{۶-۱} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$ $f'(t) = ۲t - ۳ \xrightarrow{t=۲} f'(۲) = ۲(۲) - ۳ = ۱$

تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل پنجم

((حسابان۲))

***

درس ۱ : اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

۱	نادرست، زیرا ممکن است در نقطه‌ی بحرانی تابع مشتق‌پذیر نباشد.
۲	الف) با توجه به نمودار مشخص است که نقطه‌ی $(۱,۸)$، نقطه‌ی ماکزیمم مطلق تابع است و لذا مقدار ماکزیمم مطلق برابر ۸ است. ب) با توجه به نمودار مشخص است که نقطه‌ی $(-۲,-۴)$، نقطه‌ی مینیمم مطلق تابع است و لذا مقدار مینیمم مطلق برابر ۴- است. پ) با توجه به نمودار مشخص است که تابع در نقطه ای به طول $x=۴$ ماکزیمم نسبی دارد. ت) با توجه به نمودار مشخص است که تابع در نقطه ای به طول $x=۲$ مینیمم نسبی دارد.
۳	$f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x \to f'(x)=x^۲-۱ \xrightarrow{f'(x)=۰} x^۲-۱=۰ \to x=\pm ۱$ $\to \begin{cases} f(-۱)=\frac{۱}{۳}(-۱)^۳-(-۱)=\frac{۲}{۳} \\ f(۰)=\frac{۱}{۳}(۰)^۳-(۰)=۰ \\ f(۱)=\frac{۱}{۳}(۱)^۳-(۱)=-\frac{۲}{۳} \\ f(۲)=\frac{۱}{۳}(۲)^۳-(۲)=\frac{۲}{۳} \end{cases}$ لذا مقدار ماکزیمم مطلق برابر $\frac{۲}{۳}$ و مقدار می‌نیمم مطلق برابر $-\frac{۲}{۳}$ می‌باشد.
۴	ماکزیمم نسبی
۵	

E	D	D	B
مینیمم مطلق	ماکزیمم مطلق	ماکزیمم نسبی	مینیمم نسبی
۴	۲	۲	۱

۶

$$f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۴}+x^{۲}+۱\rightarrow f'(x)=۲x^{۳}+۲x$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰}۲x^{۳}+۲x=۰\rightarrow ۲x(x^{۲}+۱)=۰\rightarrow x=۰\ \ or\ \ x^{۲}=-۱$$ (غیر قابل قبول)

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

و لذا تابع در بازه‌ی $[۰,+\infty)$ صعودی اکید و در بازه‌ی $(-\infty,۰]$ نزولی اکید است.

توجه : جواب زیر نیز درست است.

تابع در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ صعودی اکید و در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ نزولی اکید است.

۷

نادرست

۸

$$f'(x)=۵x^{۴}-۵\xrightarrow{f'(x)=۰}۵x^{۴}-۵=۰\rightarrow x^{۴}=۱\rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=-۱\end{cases}$$

ریشه‌ی $x=-۱$ ، عضو بازه‌ی داده شده نمی باشد، و لذا بررسی نمی‌شود.

$f(۱)=(۱)^{۵}-۵(۱)=-۴$ مینیمم مطلق

$f(۰)=(۰)^{۵}-۵(۰)=۰$

$f(۲)=(۲)^{۵}-۵(۲)=۲۲$ ماکزیمم مطلق

۹

$$f'(x)=۳x^{۲}-۱۲x\xrightarrow{f'(x)=۰}۳x^{۲}-۱۲x=۰\rightarrow x=۰\ ,\ \ x=۴\in[-۲,۳]$$

$$f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}\rightarrow\begin{cases}f(-۲)=-۳۲\\f(۳)=-۲۷\\f(۰)=۰\end{cases}$$

لذا می نیمم مطلق نمودار f برابر ۳۲- و ماگزیمم مطلق آن صفر می‌باشد.

۱۰

نادرست، در تابع $f(x)=x^{۳}$ هم $f(۰)=۰$ و هم $f'(۰)=۰$

۱۱

نادرست ؛ زیرا ممکن است تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نباشد.

۱۲

$$f'(x)=۳x^{۲}-۱۲\xrightarrow{f'(x)=۰}۳x^{۲}-۱۲=۰\rightarrow x=۲\ ,\ \ x=-۲\notin[-۱,۳]$$

$$f(x)=x^{۳}-۱۲x\rightarrow\begin{cases}x=-۱\rightarrow f(-۱)=۱۱\\x=۲\rightarrow f(۲)=-۱۶\\x=۳\rightarrow f(۳)=-۹\end{cases}\rightarrow \max(f)=۱۱$$ ماکزیمم مطلق

۱۳

$$f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}\rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۱۲x$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2-12x=0 \to x=0 \quad , \quad x=4\notin[-1,3]$$

$$\begin{cases} x=-1 \to f(-1)=-7 \\ x=0 \to f(0)=0 \\ x=3 \to f(3)=-27 \end{cases}$$

نقطه‌ی $(0,0)$ ماکزیمم نسبی و ماکزیمم مطلق (به کمک جدول تغییرات نیز قابل بررسی است.)

x	-1		0		3
f'		$+$	0	$-$	
f	-7	$\nearrow$	0	$\searrow$	-27

مینیمم نسبی

نقطه‌ی $(3,-27)$ نقطه‌ی مینیمم مطلق این تابع در بازه‌ی $[3,-27]$ است.

۱۴ ماکزیمم نسبی؛ به ازای هر x عضو همسایگی عدد ۲ ، $f(x)\le f(2)$

۱۵

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x+1 \to f'(x)=-2x^2-2x+4$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} -2x^2-2x+4=0 \to x^2+x-2=0 \to x=-2\ ,\ x=1$$

هر دو مقدار به دست آمده درون بازه‌ی داده شده هستند. در نقاط $x=1$ و $x=-2$، مشتق تابع برابر صفر است. از طرفی تابع در دو نقطه‌ی ابتدا و انتهای بازه، یعنی $x=2$ و $x=-3$، مشتق ناپذیر است. لذا تابع دارای چهار نقطه‌ی بحرانی می‌باشد. اکنون عرض این نقاط را تعیین می‌کنیم.

$$x=-3 \to f(-3)=-2$$

$$x=-2 \to f(-2)=-\frac{17}{3}$$

$$x=1 \to f(1)=\frac{10}{3}$$

$$x=2 \to f(2)=-\frac{1}{3}$$

حال با مقایسه‌ی مقادیر بدست آمده برای عرض، نقاط بحرانی، معلوم است که $y=\frac{10}{3}$، مقدار ماکزیمم مطلق و $y=-\frac{17}{3}$، مقدار می‌نیمم مطلق نمودار تابع هستند.

۱۶

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x \to f'(x)=-x^2+1$$

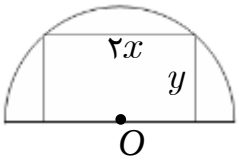
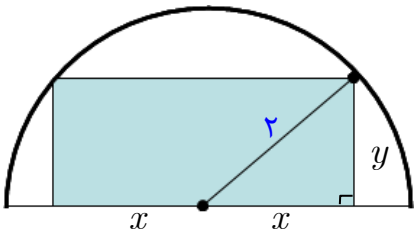
$$f'(x)=0 \to -x^2+1=0 \to x^2=1 \to x=\pm 1$$

$$\begin{cases} x=1\in[0,2] \\ x=-1\notin[0,2] \end{cases} \to x=1 \quad \text{نقطه‌ی بحرانی}$$

حال با تعیین مقادیر $f(0)=0$ و $f(1)=\frac{2}{3}$ و $f(-2)=-\frac{2}{3}$، نتیجه می‌گیریم $x=-2$ طول نقطه‌ی مینیمم و

	$y=-\frac{۲}{۳}$ مقدار مینیمم مطلق

حل مسائل بهینه‌سازی

۱	$y^۲=۱۶-x^۲ \Rightarrow S(x)=۲x\sqrt{۱۶-x^۲}$ $S'(x)=\frac{۳۲-۴x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}}=۰ \to ۳۲-۴x^۲=۰$ $\to x=\sqrt{۸} \to x=۲\sqrt{۲} \longrightarrow y=۲\sqrt{۲}$ طول $۲x=۴\sqrt{۲}$ و عرض $y=۲\sqrt{۲}$ 
۲	با توجه به شکل زیر $x^۲+y^۲=۴$ ، پس $y=\sqrt{۴-x^۲}$ در نتیجه : $S=xy \xrightarrow{y=\sqrt{۴-x^۲}} S(x)=۲x\sqrt{۴-x^۲}$ $\to S'(x)=۲\sqrt{۴-x^۲}+\frac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^۲}}(۲x)=۲\sqrt{۴-x^۲}+\frac{-۲x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}}$ $=\frac{۲(۴-x^۲)-۲x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}}=\frac{۸-۴x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}}$ $\xrightarrow{S'=۰} ۸-۴x^۲=۰ \to x=\sqrt{۲}$ $\to ۲x=۲\sqrt{۲} \to y=\sqrt{۲}$ 

حل مسائل پارامتری

۱	اولاً : مختصات این نقطه در معادله‌ی تابع صدق می‌کند. $f(x)=ax^۳+bx^۲+۲ \xrightarrow{A(-۱,۱)} f(-۱)=a(-۱)^۳+b(-۱)^۲+۲$ $\xrightarrow{f(-۱)=۱} -a+b+۲=۱ \to a-b=۱$ ثانیاً : به ازای طول این نقطه، مقدار مشتق دوم برابر صفر می‌شود. $f(x)=ax^۳+bx^۲+۲ \to f'(x)=۳ax^۲+۲bx \to f''(x)=۶ax+۲b$ $\xrightarrow{A(-۱,۱)} f''(-۱)=۶a(-۱)+۲b \xrightarrow{f''(-۱)=۰} -۶a+۲b=۰ \to -۳a+b=۰$ حال دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم و مقادیر a و b را تعیین می‌کنیم. $\begin{cases} a-b=۱ \\ -۳a+b=۰ \end{cases} \to a=-\frac{۱}{۲} \ , \ b=-\frac{۳}{۲}$

۲	$f(x)=x^{۳}+ax-b\xrightarrow{f(۱)=۲}۲=(۱)^{۳}+a(۱)-b\rightarrow a-b=۱$ $f(x)=x^{۳}+ax-b\rightarrow f'(x)=۳x^{۲}+a$ $\xrightarrow{f'(۱)=۰}۳(۱)^{۲}+a=۰\rightarrow a=-۳$ $\xrightarrow{a-b=۱}b=-۴$
۳	$f(x)=x^{۳}+ax+b\rightarrow f'(x)=۳x^{۲}+a\xrightarrow{f'(۱)=۰}۳(۱)^{۲}+a=۰\rightarrow a=-۳$ $f(x)=x^{۳}+ax+b\xrightarrow{f(۱)=۲}(۱)^{۳}+a(۱)+b=۲$ $\xrightarrow{a=-۳}۱-۳+b=۲\rightarrow b=۴$
۴	$f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx\rightarrow f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b$ $\xrightarrow{f'(۲)=۰}۰=۳(۲)^{۲}+۲a(۲)+b\rightarrow ۴a+b=-۱۲$ $f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b\rightarrow f''(x)=۶x+۲a$ $\xrightarrow{f''(۰)=۰}۰=۶(۰)+۲a\rightarrow a=۰$ $۴a+b=-۱۲\xrightarrow{a=۰}b=-۱۲$
۵	$f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+۲۴x\rightarrow f'(x)=۳ax^{۲}+۲bx+۲۴\rightarrow f''(x)=۶ax+۲b$ $f'(-۲)=۰\rightarrow ۳a(-۲)^{۲}+۲b(-۲)+۲۴=۰$ $\rightarrow ۱۲a-۴b=-۲۴\xrightarrow{\div ۴}۳a-b=-۶\quad(۱)$ $f''(۱)=۰\rightarrow ۶a(۱)+۲b=۰\rightarrow ۶a+۲b=۰\xrightarrow{\div ۲}۳a+b=۰\quad(۲)$ $\rightarrow\begin{cases}۳a-b=-۶\\۳a+b=۰\end{cases}\rightarrow a=-۱\ ,\ b=۳$

نمودار تابع مشتق

۱	گزینه‌ی ت صحیح است. مشتق سهمی، تابع غیر خطی(غیرثابت) است. چون طول نقطه‌ی مینیمم، منفی است، پس f' محور xها را در ناحیه‌ی $x<۰$ قطع می‌کند.
۲	نمودار مورد الف، یک سهمی رو به بالا است و لذا می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y=a(x-\alpha)^{۲}+\beta$ نوشت. که در آن a یک عدد حقیقی مثبت است. اکنون معادله‌ی مشتق این تابع به صورت $y=۲a(x-\alpha)$ خواهد شد. این معادله، معادله‌ی یک تابع خطی با شیب مثبت است. از این رو مشتق تابع مورد الف، مورد (۱) می‌شود. نمودار مورد ب ، یک تابع حطی با شیب منفی است و لذا می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y=-ax+b$ نوشت. که در آن a یک عدد حقیقی مثبت است. اکنون معادله‌ی مشتق این تابع به صورت $y=-a$ خواهد شد. این معادله، معادله‌ی یک تابع خطی ثابت (موازی محور طول‌ها) است. از طرفی محور عرض‌ها را در یک نقطه به عرض منفی $(y=-a)$ قطع می‌کند. از این رو مشتق تابع مورد ب، مورد (۴) می‌شود.

تهیه کننده : جابرعامری

فصل پنجم

((حسابان ۲))

❋❋❋

درس ۲ : جهت تقعر نمودار یک تابع

۱	چون در این بازه، مشتق دوم مثبت است، لذا نمودار تابع در این بازه تقعر رو به **بالا** دارد.
۲	درست، زیرا در نقطه‌ی عطف، تقعر و تحدب منحنی عوض می‌شود.
۳	نادرست
۴	$D_f = \mathbb{R} - \{۱\}$ $f(x) = \frac{۲x+۱}{x-۱} \to f'(x) = \frac{-۳}{(x-۱)^۲} \to f''(x) = \frac{۶}{(x-۱)^۳}$ $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & ۱ & +\infty \\ \hline f''(x) & - & \vdots & + \\ \hline f(x) & \cap & \vdots & \cup \end{array}$ جهت تقعر نمودار تابع فقط در نقطه‌ی $x = ۱$، تغییر می‌کند. ولی چون این نقطه، در دامنه‌ی تابع نیست، لذا نمودار تابع نقطه‌ی عطف ندارد.
۵	گزینه‌ی ب ؛ زیرا اگر از یک نقطه‌ی دلخواه روی نمودار تابع، یک خط مماس رسم کنیم، واضح است که شیب این خط منفی است. لذا $f'(x) < ۰$ همچنین چون تقعر منحنی نمودار تابع رو به بالا است، لذا $f''(x) > ۰$

نقطه‌ی عطف

۱	$f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$ $f'(x) = ۳x^۲ - ۳ \to f''(x) = ۶x \xrightarrow{f''(۰)=۰} ۶x = ۰ \to x = ۰$ نقطه‌ی $(۰,۱)$ نقطه‌ی عطف تابع است. $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & ۱ & & +\infty \\ \hline f' & & - & & + & \\ \hline f & & \cap & ۱ & \cup & \end{array}$
۲	نادرست؛ تابع $f(x) = x$ اکیداً یکنوا است ولی نقطه‌ی عطف ندارد.

حل مسائل پارامتری

ضرایب a و b را در تابع $y=x^{۳}+ax^{۲}+b$، طوری بیابید که نقطه‌ی $(۱,۴)$ نقطه‌ی عطف منحنی باشد. $y=x^{۳}+ax^{۲}+b\xrightarrow{(۱,۴)}۴=(۱)^{۳}+a(۱)^{۲}+b\to a+b=۳$ $y'=۳x^{۲}+۲ax\to y''=۶x+۲a\xrightarrow{(۱,۴)}۰=۶(۱)+۲a\to a=-۳$ $a+b=۳\xrightarrow{a=-۳}-۳+b=۳\to b=۶$	۱
$f(x)=ax^{۲}+bx+c$ $\xrightarrow{f(۰)=۱}a(۰)^{۳}+b(۰)^{۲}+c=۱\to c=۱$ $\xrightarrow{f(۲)=-۳}a(۲)^{۳}+b(۲)^{۲}+c=-۳\xrightarrow{c=۱}۲a+b=-۱$ $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+c\to f'(x)=۳ax^{۲}+۲bx\to f''(x)=۶ax+۲b$ $\xrightarrow{f''(۱)=۰}۶a(۱)+۲b=۰\to ۳a+b=۰$ $\to\begin{cases}۲a+b=-۱\\۳a+b=۰\end{cases}\to a=۱\ ,\ b=-۳$	۲
$f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx\to f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b\to f''(x)=۶x+۲a$ $f(۱)=(۱)^{۳}+a(۱)^{۲}+b(۱)\xrightarrow{f(۱)=-۱۱}۱+a+b=-۱۱\to a+b=-۱۲$ $f''(۱)=۶(۱)+۲a\xrightarrow{f''(۱)=۰}۶+۲a=۰\to a=-۳$ $a+b=-۱۲\xrightarrow{a=-۳}b=-۹$	۳
$f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+c\to f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b\to f''(x)=۶x+۲a$ $f''(x)=۶x+۲a\xrightarrow{f''(۱)=۰}۶(۱)+۲a=۰\to a=-۳$ $f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b\xrightarrow{f'(۳)=۰}۳(۳)^{۲}+۲a(۳)+b=۰$ $\to ۲۷+۶a+b=۰\xrightarrow{a=-۳}-۹=b$ $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+c\xrightarrow{f(۳)=-۱}-۱=(۳)^{۳}+a(۳)^{۲}+b(۳)+c$ $\to -۲۸=۹a+۳b+c\xrightarrow{a=-۳\ ,\ b=-۹}-۲۸=-۲۷-۲۷+c\to c=۲۶$	۴
$f(x)=ax^{۳}+۳x^{۲}+۱\to f'(x)=۳ax^{۲}+۶x\to f''(x)=۶ax+۶$ $\xrightarrow{f''(-\frac{۱}{۲})=۰}۶a(-\frac{۱}{۲})+۶=۰\to a=-۲$	۵

تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل پنجم

((حسابان۲))

❋❋❋

درس ۳ : رسم نمودار توابع چندجمله‌ای

۱

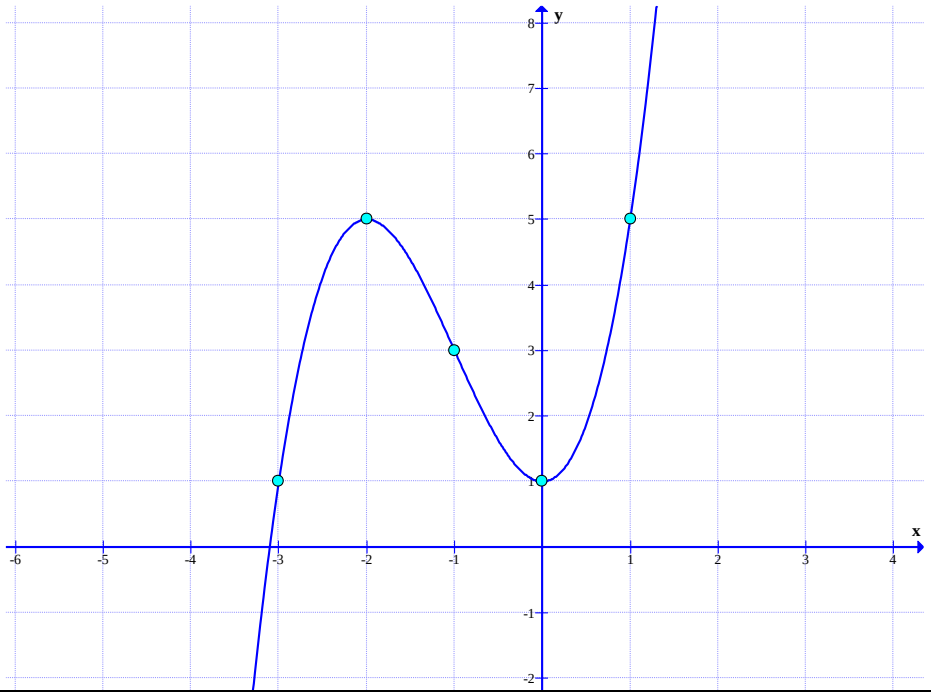
تابع $y=x^{۳}+۳x^{۲}+۱$، یک تابع چندجمله‌ای درجه‌ی سوم است و لذا دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

$$y=x^{۳}+۳x^{۲}+۱\rightarrow y'=۳x^{۲}+۶x$$

$$\xrightarrow{y'=۰}۳x^{۲}+۶x=۰\rightarrow ۳x(x+۲)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x+۲=۰\rightarrow x=-۲\end{cases}$$

از طرفی جدول رفتار تابع به شکل زیر می‌باشد.

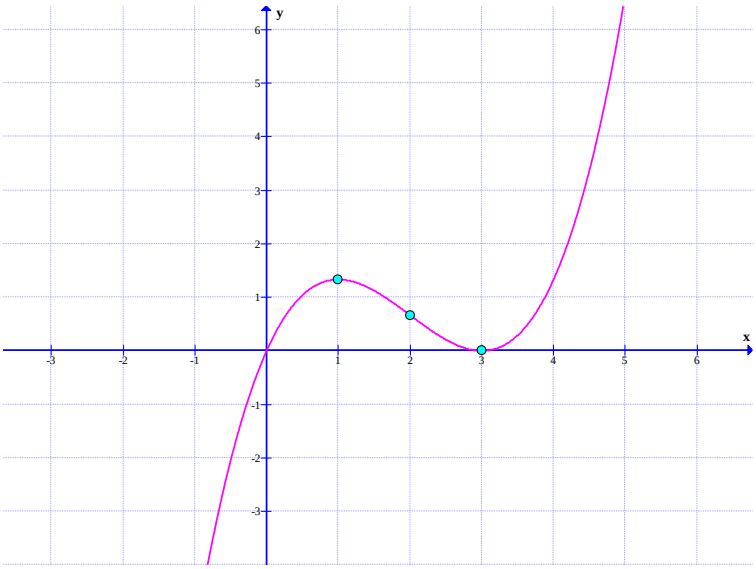
x	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۵ max	$\searrow$	۱ min	$\nearrow$	$+\infty$



۲

$f'(x)=x^{۲}-۴x+۳ \rightarrow f''(x)=۲x-۴$

x	$-\infty$		۱		۲		۳		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{۴}{۳}$	↘	$\frac{۲}{۳}$	↘	۰	↗	$+\infty$
		$\cap$	max	$\cap$	atf	$\cup$	min	$\cup$	



۳

$D_f=\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{۲}{۳}x^{۳}-x^{۲} \rightarrow f'(x)=۲x^{۲}-۲x \xrightarrow{f'(x)=۰} \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \end{cases}$$

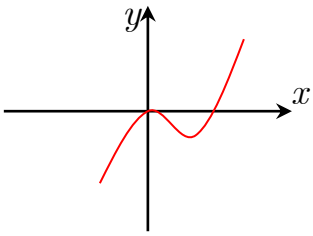
در کنار نقاط بحرانی فوق نقاط کمکی زیر را تعیین می‌کنیم.

$x=-۱ \rightarrow f(-۱)=-\frac{۵}{۳}$

$x=\frac{۱}{۲} \rightarrow f(\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۶}$

$x=۲ \rightarrow f(۲)=\frac{۴}{۳}$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
y'		$+$		$-$		$+$	
y	$-\infty$	↗	۰	↘	$-\frac{۱}{۳}$	↗	$+\infty$
			max		min		



۴

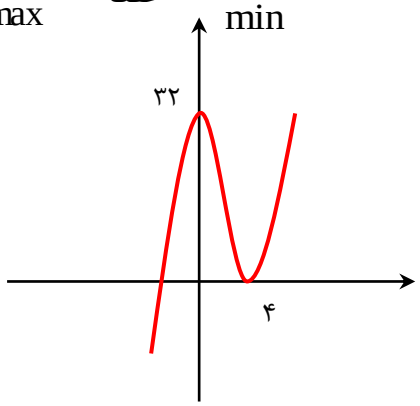
$D_f=\mathbb{R}$

$y=(x+۲)(x-۴)^{۲} \rightarrow y'=۱(x-۴)^{۲}+۲(۱)(x-۴)(x+۲)$

$$\xrightarrow{y'=0} 1(x-4)^2+2(1)(x-4)(x+2)=0 \to (x-4)(x-4+2x+4)=0$$

$$\to (x-4)(3x)=0 \to x=0\ ,\ x=4$$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	32 max	↘	16 عطف	↘	0 min	↗	$+\infty$



۵

تابع $f(x)=(x+1)(x-2)^2$، یک تابع چندجمله‌ای درجه‌ی سوم است و لذا دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

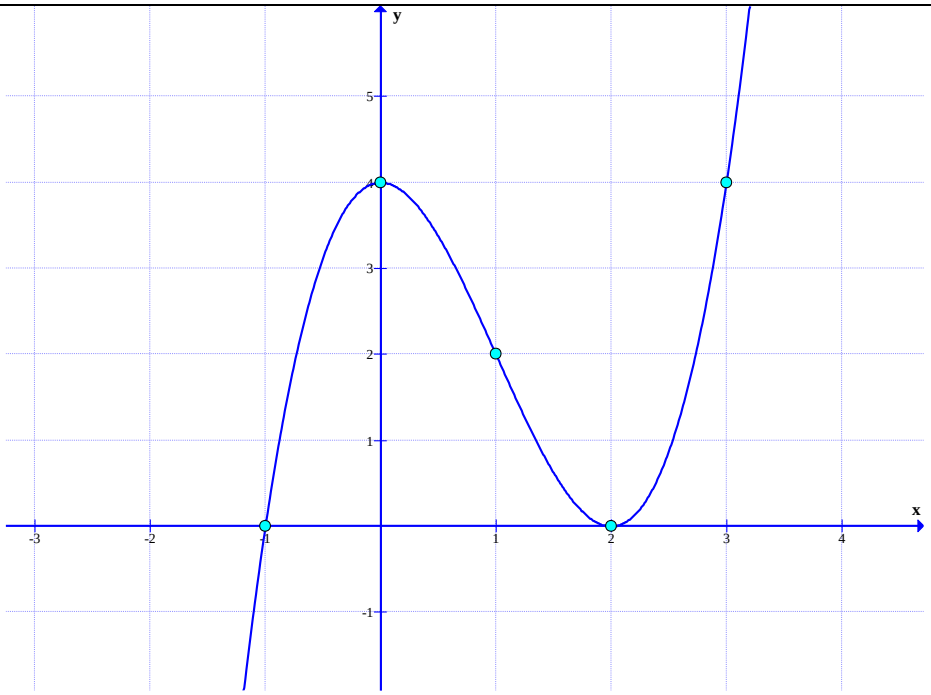
$$f(x)=(x+1)(x-2)^2$$

$$f'(x)=1(x-2)^2+2(x-2)(x+1)=(x-2)(x-2+2x+2)=(x-2)(3x)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} 3x(x-2)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \to x=2 \end{cases}$$

از طرفی جدول رفتار تابع به شکل زیر می‌باشد.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4 max	↘	0 min	↗	$+\infty$



توجه کنید که در رسم نمودار این تابع، نقاط $(۳,۴)$ و $(۱,۲)$ و $(-۱,۰)$ را به عنوان نقاط کمکی انتخاب کرده‌ایم.

۶

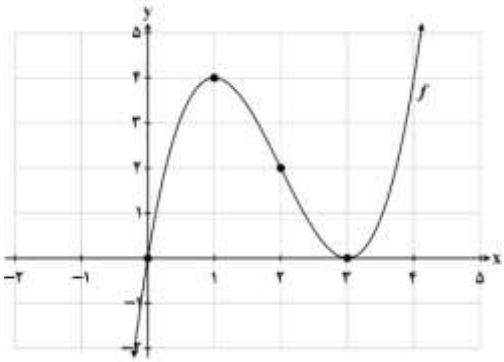
$$f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}+۹x \quad \to D_f=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=۳x^{۲}-۱۲x+۹ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۳x^{۲}-۱۲x+۹=۰ \xrightarrow{\div ۳} x^{۲}-۴x+۳=۰$$

$$\to (x-۱)(x-۳)=۰ \to x=۱ \quad , \quad x=۳$$

$$f''(x)=۶x-۱۲ \xrightarrow{f''(x)=۰} ۶x-۱۲=۰ \to x=۲$$

x	$-\infty$		۱		۲		۳		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−		−	۰	+	
$f''(x)$		−		−	۰	+		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	۴	↘	۲	↘	۰	↗	$+\infty$
			max		inf		min		
		∩		∩		∪		∪	



توابع هموگرافیک

۱

با توجه به اینکه نقطه‌ی $(۲,۱)$ محل تقاطع مجانب‌های تابع است لذا :

مجانب قائم $x=۲ \xrightarrow{cx+d=۰} ۲c+d=۰$

مجانب افقی $y=۱ \xrightarrow[x\to\pm\infty]{\lim f(x)=\frac{a}{c}} \frac{a}{c}=۱ \to a=c$

چون تابع از نقطه‌ی $(-۱,۰)$ می‌گذرد.

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \xrightarrow{(-۱,۰)} \frac{-a+b}{c+d}=۰ \to a=b$$

از روابط به دست آمده خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$$

رسم نمودار توابع هموگرافیک

۱

دامنه‌ی تابع $y=\frac{۲x-۱}{x-۲}$ مجموعه‌ی $\mathbb{R}-\{۲\}$ است. این تابع یک تابع هموگرافیک است و یک مجانب افقی و یک مجانب قائم دارد.

$x-۲=۰ \to x=۲$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-۱}{x-۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x}=۲ \to y=۲$ مجانب افقی

حال چون

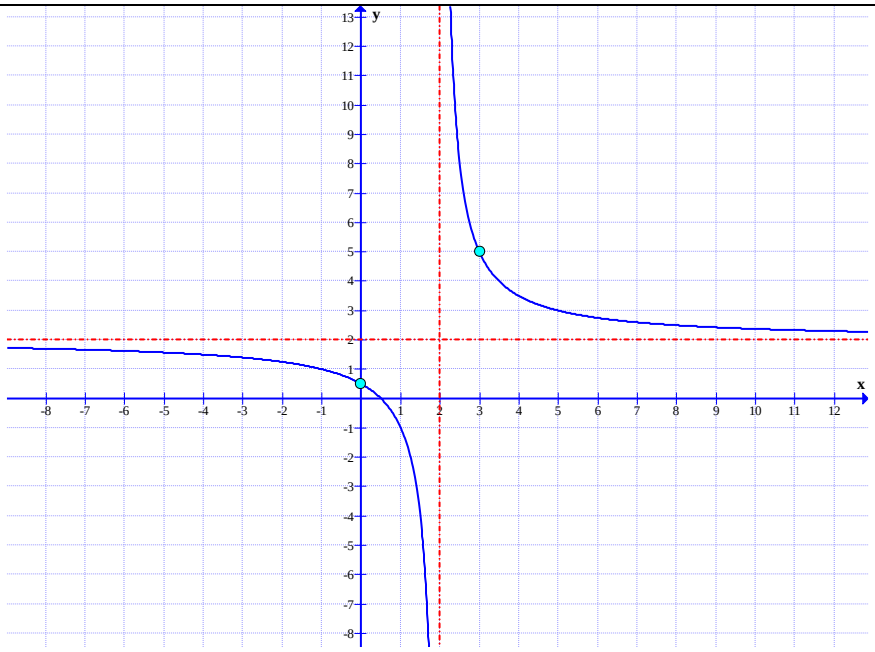
$$y=\frac{۲x-۱}{x-۲} \to y'=\frac{۲(x-۲)-(۱)(۲x-۱)}{(x-۲)^۲}=\frac{-۳}{(x-۲)^۲}<۰$$

پس نمودار تابع در هر طرف مجانب قائم خود نزولی اکید است.

از طرفی جدول رفتار تابع به شکل زیر می‌باشد.

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	۲ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	۲

نقاط $(۰,\frac{۱}{۲})$ و $(۳,۵)$ را به عنوان نقاط کمکی انتخاب می‌کنیم. در نهایت نمودار تابع به شکل زیر رسم می‌شود.



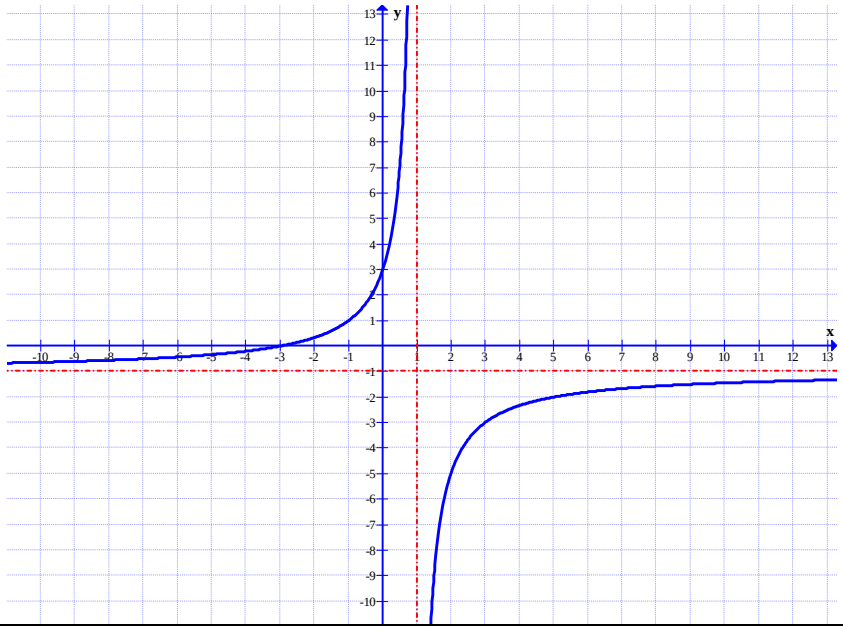
۲

مجانب قائم $x=۱$ مجانب افقی $y=-۱$

تابع نقطه‌ی بحرانی ندارد و نمودارتابع در هر طرف مجانب قائم خود صعودی اکید است. $\rightarrow f'(x)=\frac{۴}{(۱-x)^۲}>۰$

.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	
f	-۱	↗	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↗	-۱



۳

مجانب قائم $x+۱=۰\rightarrow x=-۱$

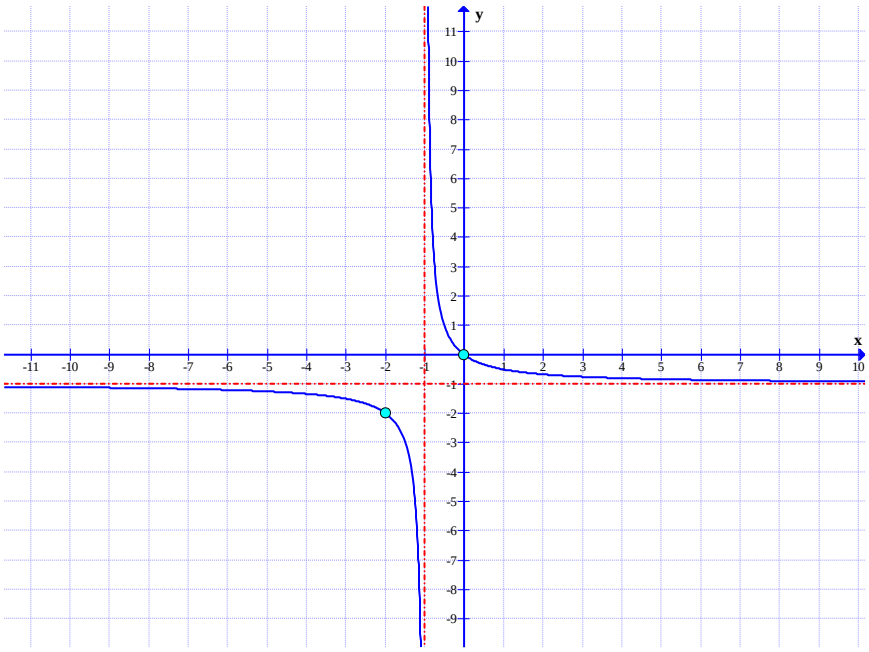
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x}{x+۱}=-۱\to y=-۱$ مجانب افقی

$y'=\dfrac{-۱}{(x+۱)^۲}<۰\to$ نمودار تابع در هر طرف مجانب قائم آن، نزولی اکید است.

از طرفی جدول رفتار تابع به شکل زیر می‌باشد.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-۱	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-۱

نقاط $(۰,۰)$ و $(-۲,-۲)$ را به عنوان نقاط کمکی انتخاب می‌کنیم. در نهایت نمودار تابع به شکل زیر رسم می‌شود.



۴

$D_f=\mathbb{R}-\{-۳\}$

$x+۳=۰\to x=-۳$ مجانب قائم

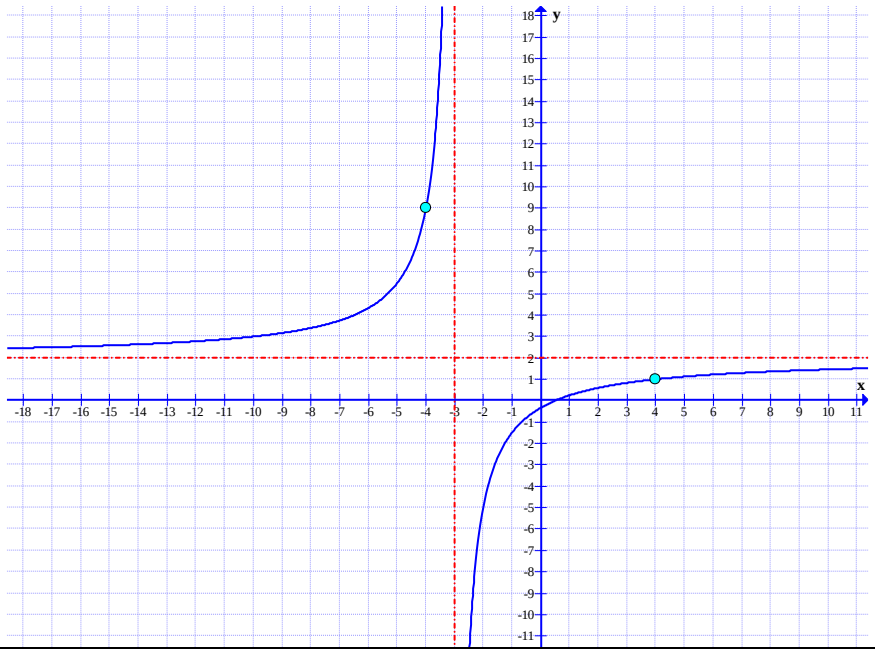
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۲x-۱}{x+۳}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۲x}{x}=۲\to y=۲$ مجانب افقی

$f'(x)=\dfrac{۲(x+۳)-۱(۲x-۱)}{(x+۳)^۲}=\dfrac{۷}{(x+۳)^۲}>۰$ تابع در هر طرف مجانب قائم آن صعودی اکید است.

از طرفی جدول رفتار تابع به شکل زیر می‌باشد.

x	$-\infty$		-۳		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	۲	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	۲

نقاط $(۴,۱)$ و $(-۴,۹)$ را به عنوان نقاط کمکی انتخاب می‌کنیم. در نهایت نمودار تابع به شکل زیر رسم می‌شود.



۵

$D_f = \mathbb{R} - \{-۱\}$

$x+۱=۰ \to x=-۱$ مجانب قائم

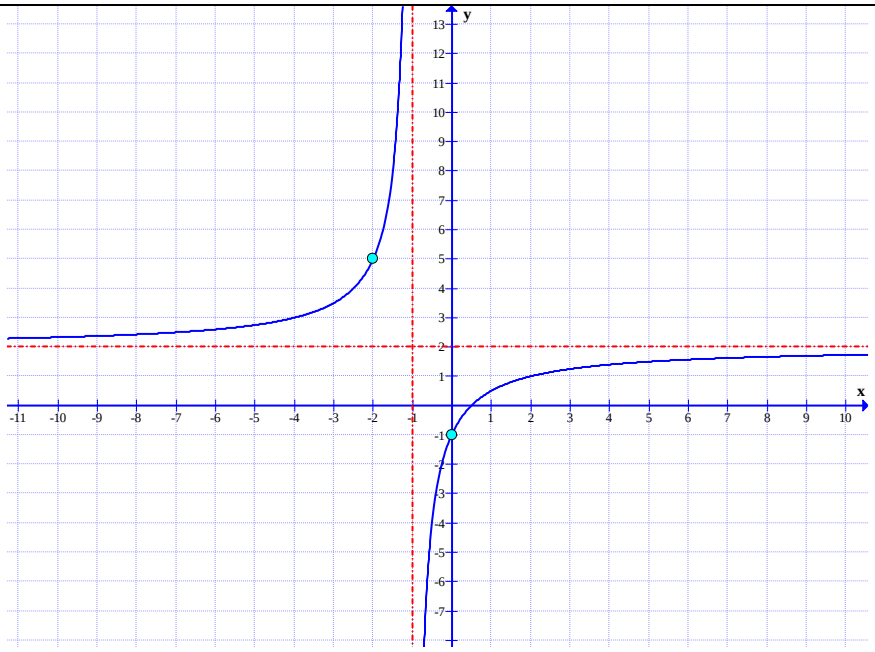
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x-۱}{x+۱} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x}{x} = ۲ \to y=۲$$ مجانب افقی

$$f'(x) = \frac{۲(x+۱)-۱(۲x-۱)}{(x+۱)^۲} = \frac{۳}{(x+۱)^۲} > ۰$$ تابع در هر طرف مجانب قائم آن صعودی اکید است.

از طرفی جدول رفتار تابع به شکل زیر می‌باشد.

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	۲	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	۲

نقاط $(۰,-۱)$ و $(-۲,۹)$ را به عنوان نقاط کمکی انتخاب می‌کنیم. در نهایت نمودار تابع به شکل زیر رسم می‌شود.



۶

$D_f = \mathbb{R} - \{۱\}$

$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱$ مجانب قائم

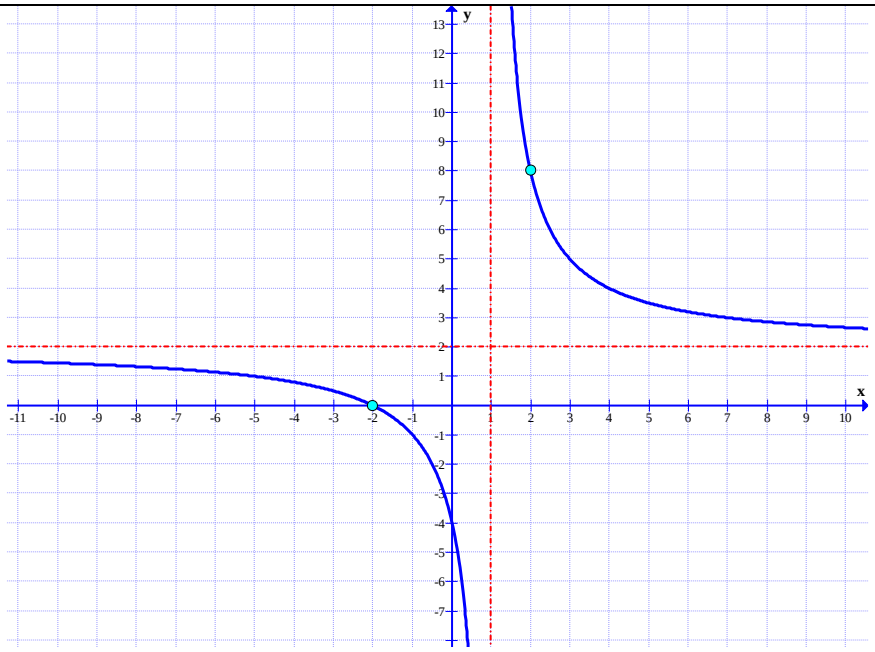
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{۲x + ۴}{x - ۱} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{۲x}{x} = ۲ \rightarrow y = ۲$ مجانب افقی

$f'(x) = \dfrac{۲(x-۱) - ۱(۲x+۴)}{(x-۱)^۲} = \dfrac{-۶}{(x-۱)^۲} < ۰$ تابع در هر طرف مجانب قائم آن نزولی اکید است.

از طرفی جدول رفتار تابع به شکل زیر می‌باشد.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	۲	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۲

نقاط $(-۲,۰)$ و $(۲,۸)$ را به عنوان نقاط کمکی انتخاب می‌کنیم. در نهایت نمودار تابع به شکل زیر رسم می‌شود.



تهیه کننده : جابرعامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان