

((فصل اوّل : تابع))

درس ۱ : توابع چند جمله ای ، توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله ای

اگر n یک عدد صحیح نامنفی و a_0 و a_1 و a_2 و ... و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. در این صورت تابع زیر را یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی n می نامند.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

برای مثال توابع زیر توابع چندجمله ای هستند.

الف) تابع ثابت

$$f(x) = c$$

تابع چندجمله ای از درجه صفر^۱

ب) تابع خطی

$$f(x) = ax + b$$

تابع چندجمله ای از درجه یک

ج) تابع درجه ۲ (سهمی)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

تابع چندجمله ای از درجه دو

د) تابع زیر نیز یک تابع چند جمله ای از درجه ۳ است.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

تابع چندجمله ای از درجه سه

۲۵/۰ نمره	خرداد ۹۹ خ	۱ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{7}x$ یک تابع چند جمله ای <u>نیست</u> .
۲۵/۰ نمره	دی ۹۹	۲ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. در بازه‌ی $(0,1)$ ، نمودار تابع $y = x^3$ ، نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.
۵/۰ نمره	شهریور ۱۴۰۰	۳ درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. دامنه‌ی توابع چند جمله ای برابر R است.

۱. برای تابع $f(x) = 0$ درجه تعریف نمی شود.

۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x$ یک چند جمله‌ای از درجه ۳ است.	دی ۱۴۰۰ نمره ۰/۲۵
۵	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید. نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه‌ی $(0,1)$ ، از نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار دارد. (بالا-تر - پایین تر)	دی ۱۴۰۰ نمره ۰/۲۵

توابع یکنوا

تابع $y = f(x)$ را روی دامنه‌اش صعودی گویند، هرگاه :

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

تابع $y = f(x)$ را روی دامنه‌اش صعودی اکید (اکیداً صعودی) گویند، هرگاه :

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع $y = f(x)$ را روی دامنه‌اش نزولی گویند، هرگاه :

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

تابع $y = f(x)$ را روی دامنه‌اش نزولی اکید (اکیداً نزولی) گویند، هرگاه :

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع $y = f(x)$ را روی دامنه‌اش ثابت گویند، هرگاه :

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

توجه :

۱ : هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید را تابع اکیداً یکنوا می نامند.

۲ : اگر تابعی صعودی یا نزولی باشد، را یکنوا می نامند.

۳ : طبق تعریف تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است یعنی یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نیست.

۴ : برای تعیین صعودی یا نزولی یا ثابت بودن تابع به کمک نمودار آن، نمودار را از چپ به راست نگاه کنید.

۵ : به طور مشابه، صعودی یا نزولی بودن تابع را می توان در یک فاصله مانند $I \subseteq D_f$ تعریف نمود.

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود.	دی ۹۷ نمره ۰/۲۵
۲	در جای خالی گزینه‌ی مناسب داخل پراتنز را انتخاب کنید. تابع $y = (x+1)^3$ در دامنه‌ی تعریف خود (صعودی ، نزولی) است.	خرداد ۹۸ نمره ۰/۲۵
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا است.	تیر ۹۸ نمره ۰/۲۵

۴	در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. تابع $y = x^2 x $ در بازه‌ی $(-\infty, a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است.	تیر ۹۸ ۲۵ - نمره
۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = -x^3 + 2$ در دامنه‌ی تعریفش صعودی است.	شهریور ۹۸ ۲۵ - نمره
۶	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود، تابع نامیده می شود.	دی ۹۸ ۲۵ - نمره
۷	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی است.	خرداد ۹۹ ۲۵ - نمره
۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = x $ در دامنه اش صعودی است.	خرداد ۹۹ ۲۵ - نمره
۹	در جای خالی عبارات مناسب قرار دهید. تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی تعریف می شود، تابع گفته می شود.	خرداد ۹۹ ۲۵ - نمره
۱۰	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. توابع اکیداً یکنوا، همواره هستند.	شهریور ۹۹ ۲۵ - نمره
۱۱	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه اش اکیداً نزولی است.	شهریور ۱۴۰۰ ۱۵ - نمره

درس ۲: ترکیب توابع

هرگاه f و g دو تابع باشند، ترکیب تابع g در f که به صورت $f \circ g$ نمایش داده می شود را به صورت زیر تعریف می کنند.

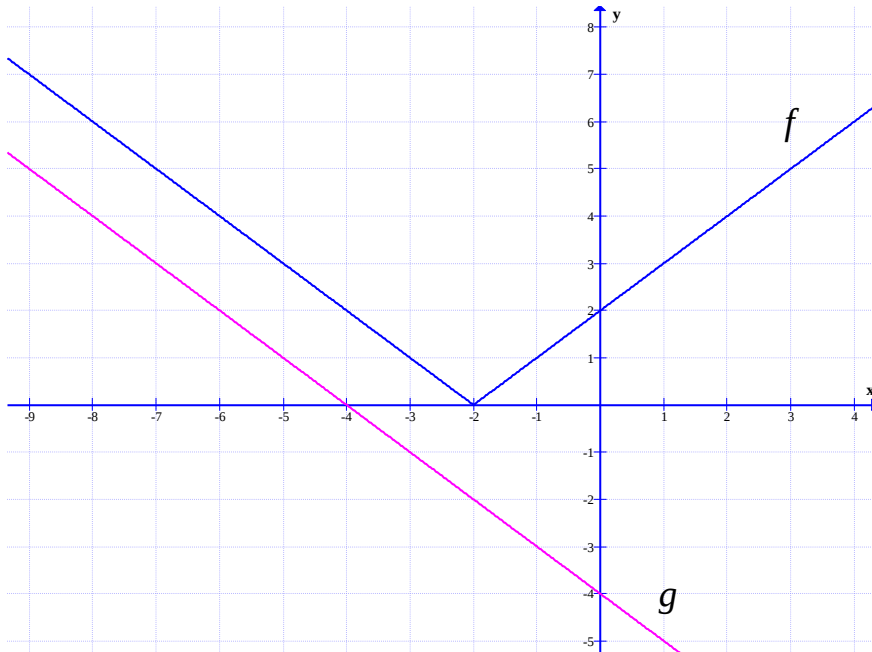
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

دامنه‌ی تابع مرکب $f \circ g$ با توجه به نمودار فوق به شکل زیر مشخص می شود.

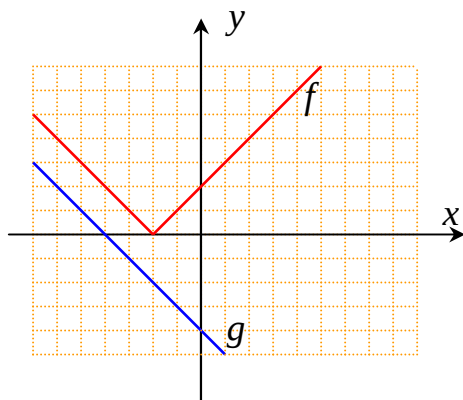
$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

۱	جای خالی را کامل کنید. تابع $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^2$ ترکیب دو تابع $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ و $g(x) = \dots$ است.	دی ۹۷ ۲۵ - نمره
---	--	--------------------

۲	دی ۹۷	توابع $f(x) = \frac{x+3}{2x}$ و $g(x) = 3x - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱/۲۵ نمره
۳	خرداد ۹۸	دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱ نمره
۴	شهریور ۹۸	اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد. دامنه‌ی تابع $(f \circ g)(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱/۲۵ نمره
۵	دی ۹۸	اگر $f(x) = x^2 - 5$ و $g(x) = \sqrt{x+6}$ باشد. دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را به کمک تعریف بدست آورید.	۱ نمره
۶	خرداد ۹۹	اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را به دست آورید.	۱ نمره
۷	خرداد ۹۹	اگر $f(x) = \sqrt{4-2x}$ و $g(x) = x^2 + 2x - 1$ باشد. الف: دامنه‌ی تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب: مقدار $(g \circ f)(2) - \frac{f}{g}(0)$ تعیین کنید.	۲ نمره
۸	خرداد ۹۹ خ	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin x$ باشند، آنگاه $(g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x}$ خواهد بود.	۰/۲۵ نمره
۹	خرداد ۹۹ خ	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ باشد، آنگاه $(f \circ g)(4) = \dots$	۰/۲۵ نمره
۱۰	خرداد ۹۹ خ	اگر $f(x) = x^2 - 5$ و $g(x) = \sqrt{x+6}$ باشد، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را به دست آورید.	۰/۷۵ نمره
۱۱	خرداد ۹۹ خ	اگر $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را بدست آورید.	۱ نمره

شهریور ۹۹	نمره ۲	۱۲	اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد. الف : دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب : ضابطه‌ی تابع $f \circ g$ را بنویسید.															
دی ۹۹	نمره ۱/۵	۱۳	با توجه به نمودارهای توابع f و g به سؤالات زیر پاسخ دهید.  الف : مقدار $(f \circ g)(-1)$ را محاسبه کنید. ب : اگر $g(3t - 1) = 0$ آنگاه مقدار t را به دست آورید. پ : با محدود کردن دامنه‌ی f ، بازه‌ای را مشخص کنید که تابع f یک به یک شود.															
خرداد ۱۴۰۰	نمره ۱/۲۵	۱۴	الف: دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب : مقدار $(g \circ f)(2)$ را تعیین کنید.															
شهریور ۱۴۰۰	نمره ۱/۵	۱۵	با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را به دست آورید. الف) $(g \circ f)(1)$ ب) $(f \circ (f + g))(0)$ <table border="1" data-bbox="483 1529 1233 1704"><tr><td>x</td><td>-۱</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>۰</td><td>-۱</td><td>۲</td><td>-۵</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>-۲</td></tr></table>	x	-۱	۰	۱	۲	$f(x)$	۰	-۱	۲	-۵	$g(x)$	۲	۳	۴	-۲
x	-۱	۰	۱	۲														
$f(x)$	۰	-۱	۲	-۵														
$g(x)$	۲	۳	۴	-۲														
دی ۱۴۰۰	نمره ۰/۲۵	۱۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$															

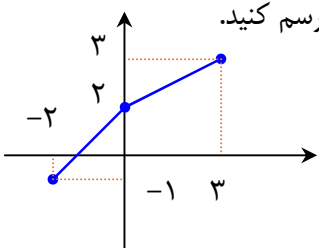
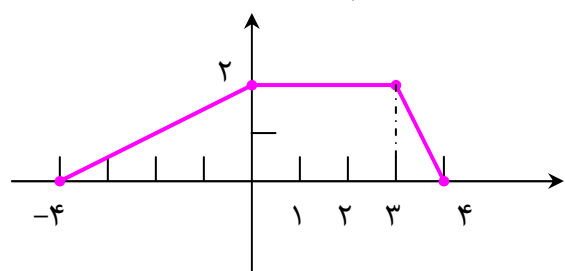
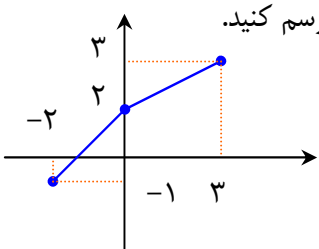
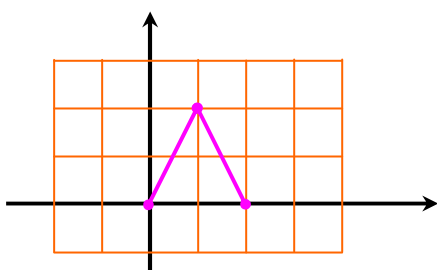
۱۷	الف : با توجه به نمودار توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید. $(g \circ f)(-1)$ و $(g^{-1} \circ f^{-1})(2)$ ب : نمودار تابع $f(x-2) - 3$ را رسم کنید.	دی ۱۴۰۰	نمره ۲
----	---	---------	--------



تبدیلات

برای تابع $y = f(x)$ و با فرض مثبت بودن عدد k به شکل زیر بیان می شود.

تابع جدید	نحوه‌ی تبدیل	نتیجه
$y = f(x) + k$	به عرض نقاط k واحد اضافه می شود.	نمودار به اندازه‌ی k واحد بالا می رود.
$y = f(x) - k$	از عرض نقاط k واحد کم می شود.	نمودار به اندازه‌ی k واحد پایین می رود.
$y = kf(x)$	عرض نقاط در k ضرب می شود.	اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت عمودی منقبض می شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت عمودی منبسط می شود.
$y = f(x + k)$	از طول نقاط k واحد کم می شود.	نمودار به اندازه‌ی k واحد به عقب می رود.
$y = f(x - k)$	به طول نقاط k واحد اضافه می شود.	نمودار به اندازه‌ی k واحد به جلو می رود.
$y = f(kx)$	طول نقاط در $\frac{1}{k}$ ضرب می شود.	اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت افقی منبسط می شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت افقی منقبض می شود.

۱	دی ۹۷	نمره ۰/۷۵	با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ را رسم کنید. 
۲	خرداد ۹۸	نمره ۰/۵	با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$، نمودار $y = \frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید. 
۳	تیر ۹۸	نمره ۰/۵	با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ را رسم کنید. 
۴	شهریور ۹۸	نمره ۰/۵	نمودار تابع $y = f(x)$، به صورت زیر است. با استفاده از آن نمودار $y = -2f\left(\frac{1}{3}x\right)$ را رسم کنید. 
۵	دی ۹۸	نمره ۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برد تابع با ضابطه‌ی $y = kf(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است.

۶	نمودار تابع $y = f(x)$ رد شکل زیر رسم شده است. الف: نمودار تابع $y = 3f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید. ب: دامنه‌ی تابع $y = 3f(\frac{1}{3}x)$ را تعیین کنید.		۰/۷۵ نمره	۹۹ خرداد
۷	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف: اگر برد تابع f برابر $[-1, 4]$ باشد، آنگاه برد تابع $y = 2f(x)$ برابر با است.		۰/۲۵ نمره	۹۹ خرداد
۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y = -k f(\frac{x}{3})$ همان دامنه‌ی تابع $y = -k f(x)$ می باشد.		۰/۲۵ نمره	۹۹ خرداد
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y = k f(x)$ همان دامنه‌ی تابع $y = f(x)$ است.		۰/۲۵ نمره	۹۹ شهریور
۱۰	نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر است. نمودار تابع $y = \frac{1}{3}f(2x)$ را رسم کنید.		۰/۵ نمره	۹۹ شهریور
۱۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y = k f(x)$ همان دامنه‌ی تابع $y = f(x)$ است.		۰/۲۵ نمره	۹۹ دی

۱۲	با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره
۱۳	نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2x + 1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین، سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله‌ی آخر نسبت به محور x ها قرینه می کنیم. ضابطه‌ی نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.	شهریور ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره

درس ۳: تابع وارون

تابع f را یک به یک می نامند هرگاه:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

هر دو تابع g و f را وارون همدیگر می نامند، هرگاه $(fog)(x) = x$ و $(gof)(x) = x$ برای تعیین وارون یک تابع وارون پذیر، ابتدا متغیر x را به y و برعکس تبدیل می کنیم و سپس متغیر y را بر حسب x محاسبه می کنیم.

توجه داشته باشید که اگر تابع f معکوس پذیر باشد، معکوس آن را با f^{-1} نمایش می دهند. با توجه به مفهوم تابع معکوس به سهولت نتیجه می شود که:
الف) تابعی معکوس پذیر است، هرگاه یک به یک باشد.

ب) دامنه‌ی تابع f^{-1} برابر برد تابع f است. $(D_{f^{-1}} = R_f)$

ج) برد تابع f^{-1} برابر دامنه‌ی تابع f است. $(R_{f^{-1}} = D_f)$

د) نمودار هر تابع معکوس پذیر با نمودار معکوس آن نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم $(y = x)$ متقارن هستند.

۱	اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد. مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$ را به دست آورید.	دی ۹۷	۰/۷۵ نمره
۲	اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد. مقدار $g^{-1} \circ f^{-1}(5)$ را بدست آورید.	تیر ۹۸	۱ نمره

۳	شهریور ۹۸	انمره ۱	اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد. مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$ را به دست آورید. (این سؤال سه بار تکرار شده است.)
۴	دی ۹۸	انمره ۰/۵	با محدود کردن دامنه‌ی تابع $f(x) = x^2 - 5$ تابعی وارون پذیر بسازید. دامنه‌ی تابع جدید را بنویسید.
۵	دی ۹۸	انمره ۱	نشان دهید که توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.
۶	خرداد ۹۹	انمره ۱/۲۵	الف : وارون تابع $y = \sqrt{x+2}$ را به دست آورید. ب : با محدود کردن دامنه‌ی تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ یک تابع یک به یک به دست آورید.
۷	خرداد ۹۹	انمره ۱/۲۵	نشان دهید توابع $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$ و $g(x) = \frac{3-2x}{8}$ وارون یکدیگرند.
۸	شهریور ۹۹	انمره ۱	ضابطه‌ی وارون تابع $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$ را به دست آورید.
۹	دی ۹۹	انمره ۱	ضابطه‌ی وارون تابع $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$ را به دست آورید.
۱۰	شهریور ۱۴۰۰	انمره ۰/۲۵	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ وارون یکدیگرند.
۱۱	دی ۱۴۰۰	انمره ۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دو تابع $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+7}{6}$ وارون یکدیگرند.

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

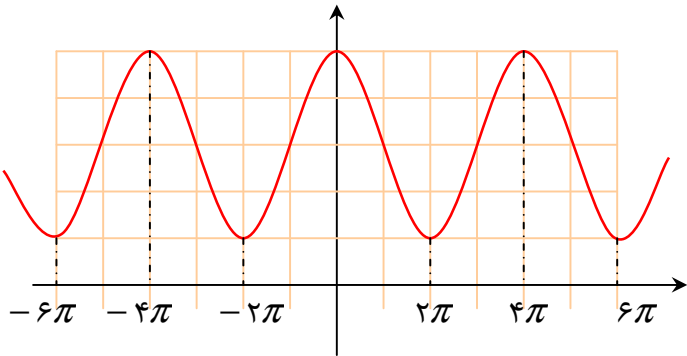
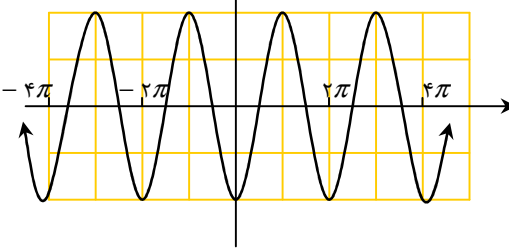
www.mathtower.ir

@amerimath

((فصل دوّم : مثلثات))

درس ۱ : توابع متناوب

۱ نمره	دی ۹۷	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع $y = 2 - 3\sin 4x$ را به دست آورید.	۱
۰/۵ نمره	خرداد ۹۸	مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع $y = 1 - 2\sin(-\frac{\pi}{3}x)$ را به دست آورید.	۲
۰/۷۵ نمره	تیر ۹۸	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع $y = 2\cos(3\pi x) - 1$ را بدست آورید.	۳
۱ نمره	شهریور ۹۸	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع $y = -3\cos(2\pi x) + 1$ را بدست آورید.	۴
۱/۲۵ نمره	دی ۹۸	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع زیر را بدست آورید. (راه حل نوشته شود). $y = -\pi\sin(\frac{x}{2}) - 2$	۵
۰/۷۵ نمره	خرداد ۹۹	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع زیر را به دست آورید. $y = \sqrt{3} - \cos\frac{\pi}{2}x$	۶
۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. مقدار می نیمم تابع $y = 3\sin(2x) - 2$ برابر ۵- است	۷
۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	اگر در یک تابع مثلثاتی دوره‌ی تناوب 4π و مقدار ماکزیمم ۱- و مقدار می نیمم ۷- باشد، تابع سینوسی آن را بنویسید.	۸
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع مقابل را به دست آورید. $y = 3\sin(2x) - 2$	۹

شهریور ۹۹	نمره ۱/۲۵	دوره ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود). $y = \pi \sin(-x) + ۱$	۱۰
دی ۹۹	نمره ۱/۲۵	دوره ی تناوب ماکزیمم و می نیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود). $y = ۸ \cos(\frac{x}{۳})$	۱۱
خرداد ۱۴۰۰	نمره ۱	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه ی $y = a \cos bx + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه ی آن را مشخص کنید. 	۱۲
شهریور ۱۴۰۰	نمره ۱	معادله ی یک تابع سینوسی $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۵ و مقدار می نیمم آن ۱- و دوره ی تناوب آن ۸π است.	۱۳
دی ۱۴۰۰	نمره ۱/۵	نمودار زیر برای تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ است. با دقت به شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه ی آن مشخص کنید. 	۱۴

تابع تانژانت

دی ۹۷	نمره ۱	دامنه ی تابع $f(x) = \tan(۲x)$ را به دست آورید.	۱
-------	--------	---	---

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه‌ی دوم استان خوزستان

۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را بنویسید. دوره‌ی تناوب تابع $y = \tan x$ برابر با 2π است. (درست، نادرست)	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را بنویسید. دامنه‌ی تابع $f(x) = \tan(x)$ برابر $\{x \mid x \in R, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ است.	شهریور ۹۸	۰/۲۵ نمره
۴	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y = \tan x$ برابر است.	دی ۹۸	۰/۲۵ نمره
۵	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. برد تابع $y = \tan x$ برابر است.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۶	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. دوره‌ی تناوب اصلی $y = \tan \alpha$ برابر می باشد.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۷	در جای خالی عبارات مناسب قرار دهید. تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برد تابع $f(x) = \tan x$ برابر بازه‌ی $[-1, 1]$ است.	شهریور ۹۹	۰/۲۵ نمره

روابط مثلثاتی

۱	مقدار $\sin(22/5)^\circ$ را به دست آورید.	شهریور ۹۸	۰/۷۵ نمره
۲	اگر $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ی حاده باشد، $\cos 2\alpha$ را به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۰/۵ نمره
۳	مقدار $\sin(15)^\circ$ را به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره

سئوالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل دوم درس ریاضی ۳ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی علوم تجربی

۴	مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید.	شهریور ۹۹	۱ نمره
۵	مقدار عددی $\sin 15^\circ$ را محاسبه کنید.	دی ۹۹	۰/۵ نمره
۶	حاصل عبارت $4 \sin x \cos x \cos 2x$ را به ازای $x = (7/5)^\circ$ را محاسبه نمایید.	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره

درس ۲: معادلات مثلثاتی

۱	معادله‌ی مثلثاتی $\sin x - \cos 2x = 0$ را حل کنید.	دی ۹۷	۱ نمره
۲	معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x - \sin x = 0$ را حل کرده و جواب های کلی آن را بنویسید.	خرداد ۹۸	۱/۲۵ نمره
۳	معادله‌ی مثلثاتی $2 \sin x + \sqrt{2} = \sqrt{8}$ را حل کنید.	تیر ۹۸	۱/۲۵ نمره
۴	معادله‌ی مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کرده و جواب های کلی آن را بنویسید.	شهریور ۹۸	۱ نمره
۵	معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.	دی ۹۸	۱/۵ نمره
۶	معادله‌ی مثلثاتی $\cos x(2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.	خرداد ۹۹	۱ نمره
۷	معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید. $2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه‌ی دوم استان خوزستان

۸	جواب های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۷۵ نمره
۹	معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.	شهریور ۹۹	۱/۵ نمره
۱۰	معادله‌ی مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.	دی ۹۹	۱/۲۵ نمره
۱۱	معادله‌ی مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره
۱۲	مثلثی با مساحت $8\sqrt{2}$ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۸ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره
۱۳	معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 x - \sin x + 1 = 1$ را حل کنید.	دی ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

فصل سوّم

((حد بی نهایت و حد در بینهایت))

درس ۱ : حد بی نهایت

تقسیم چند جمله ای ها

دی ۹۸	نمره ۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. چند جمله ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر دو جمله ای $x + 2$ بخش پذیر است.	۱
خرداد ۹۹ خ	نمره ۰/۲۵	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. باقی مانده ی تقسیم $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ بر $x - 3$ برابر با است.	۲
دی ۹۹	نمره ۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $x - a$ ، باقی مانده برابر $P(a)$ است.	۳
دی ۱۴۰۰	نمره ۰/۲۵	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید. چند جمله ای $p(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله ای بخش پذیر است. ($(x + 1)$ ، $(x - 1)$)	۴

حدهای مبهم

دی ۹۷	نمره ۱/۲۵	حد زیر را حساب کنید. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$	۱
خرداد ۹۸	نمره ۰/۷۵	حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$	۲

سئوالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضی ۳ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی علوم تجربی

۱/۲۵ نمره	۹۸ تیر	حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$	۳
۱/۲۵ نمره	۹۸ شهریور	حد زیر را حساب کنید. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16}$	۴
۱/۲۵ نمره	۹۸ دی	حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}}$	۵
۱ نمره	۹۹ خرداد	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}}$	۶
۱ نمره	۹۹ خرداد خ	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$	۷
۱ نمره	۹۹ شهریور	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$	۸
۱ نمره	۹۹ دی	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$	۹
۰/۷۵ نمره	۱۴۰۰ خرداد	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$	۱۰
۱ نمره	۱۴۰۰ شهریور	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$	۱۱

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه‌ی دوم استان خوزستان

۱ نمره	دی ۱۴۰۰	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$	۱۲
-----------	------------	--	----

حد بی نهایت

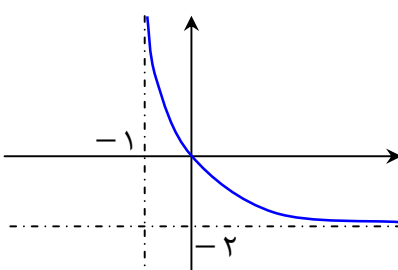
۰/۵ نمره	دی ۹۷	حد تابع زیر را به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$	۱
۰/۷۵ نمره	خرداد ۹۸	حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x}$	۲
۰/۵ نمره	تیر ۹۸	حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1 - x^2}$	۳
۰/۵ نمره	شهریور ۹۸	حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$	۴
۰/۵ نمره	دی ۹۸	حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{ x - 3 }$	۵
۰/۷۵ نمره	خرداد ۹۹	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$	۶
۰/۵ نمره	خرداد ۹۹	حد زیر را حساب کنید. $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2 - 4}$	۷
۱/۵ نمره	خرداد ۹۹	حد توابع زیر در صورت وجود به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{ 3x + 1 }$ ب) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x - 5}$	۸

سئوالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضی ۳ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی علوم تجربی

شهریور ۹۹	نمره ۰/۵	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{ 2x - 1 }$	۹
دی ۹۹	نمره ۰/۵	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$	۱۰
خرداد ۱۴۰۰	نمره ۰/۷۵	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{ 3x + 1 }$	۱۱
شهریور ۱۴۰۰	نمره ۰/۵	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x$	۱۲
دی ۱۴۰۰	نمره ۰/۷۵	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sin^2 x}$	۱۳

درس ۲: حد در بی نهایت

دی ۹۷	نمره ۰/۲۵	جای خالی را کامل کنید. حد تابع زیر وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{5x^2 - 3x}{-x^2 + 1} & x \leq 0 \end{cases}$	۱
-------	-----------	--	---

۰/۵ نمره	۹۸ خرداد	با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید. الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) =$ 	۲
۰/۲۵ نمره	۹۸ شهریور	در جای خالی عبارت مناسب را بنویسید. حد تابع $f(x) = \frac{-3x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ میل می کند، برابر می باشد.	۳
۰/۲۵ نمره	۹۹ خرداد	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. حد تابع $f(x) = \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$ وقتی که $x \rightarrow -\infty$ برابر است.	۴
۱ نمره	۹۹ خرداد خ	حد های زیر را حساب کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{3x - 1}$	۵
۰/۵ نمره	۹۹ خرداد خ	حد تابع زیر در صورت وجود به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(9 + \frac{7}{x^2} \right)$	۶
۰/۵ نمره	۹۹ شهریور	حد تابع زیر در صورت وجود به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3}$	۷
۰/۵ نمره	۱۴۰۰ خرداد	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$	۸

شماره ۱۴۰۰	حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.	۹
نمره ۰/۵	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$	

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

((فصل چهارم : مشتق))

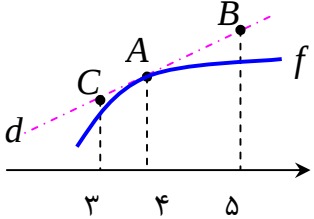
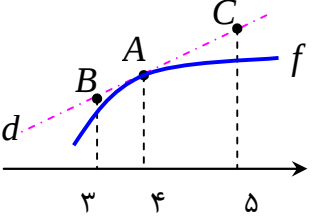


درس ۱ : آشنایی با مفهوم مشتق

تعریف مشتق

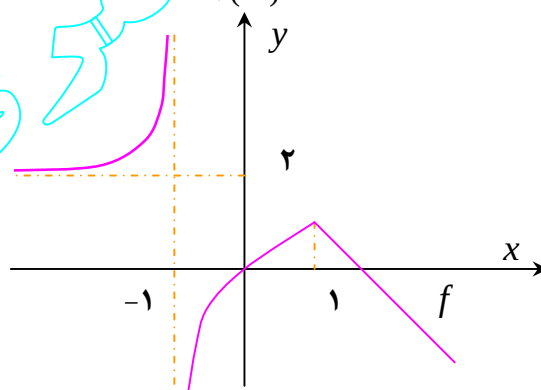
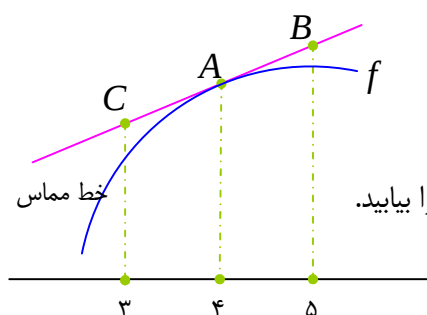
دی ۹۷	۲۵/۰۱ نمره	۱	اگر $f(x) = 1 - 2x^2$ باشد. $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.
خرداد ۹۸	۱ نمره	۲	مشتق تابع $f(x) = x^3 - 2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x = -1$ به دست آورید.

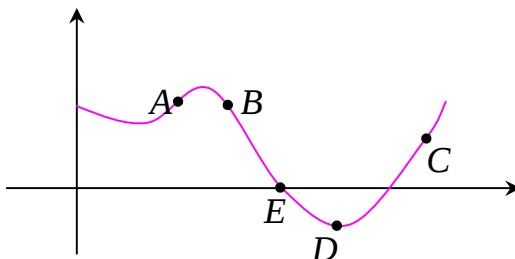
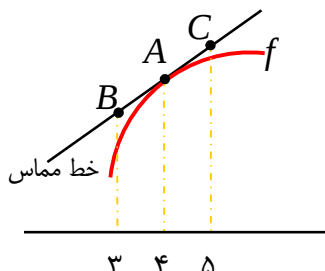
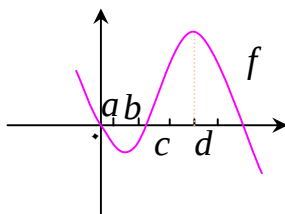
تعبیر هندسی مشتق

دی ۹۷	۷۵/۰۱ نمره	۱	در شکل مقابل ، خط d بر نمودار تابع f در نقطه‌ی A مماس شده است. اگر $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B و C را بیابید. 
تیر ۹۸	۱ نمره	۲	در شکل مقابل ، خط d بر نمودار تابع f در نقطه‌ی A مماس شده است. اگر $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B و C را بیابید. 

شهریور ۹۸	نمره ۱	نقاط داده شده روی منحنی را با شیب های ارائه شده در جدول نظیر کنید. <table><tr><td>شیب</td><td>۱</td><td>۰</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>-۲</td></tr><tr><td>نقطه</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲	نقطه					۳
شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲									
نقطه													
دی ۹۸	نمره ۱	با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول های a و b و c و d را با مشتق های داده شده در جدول نظیر کنید. <table><tr><td>x</td><td>$f'(x)$</td></tr><tr><td></td><td>۰</td></tr><tr><td></td><td>۰/۵</td></tr><tr><td></td><td>۲</td></tr><tr><td></td><td>-۰/۵</td></tr></table>	x	$f'(x)$		۰		۰/۵		۲		-۰/۵	۴
x	$f'(x)$												
	۰												
	۰/۵												
	۲												
	-۰/۵												
خرداد ۹۹	نمره ۱	در نمودار مقابل خط d در نقطه ی $x=1$ بر نمودار f مماس شده است. الف : مشتق تابع f را در نقطه ی $x=1$ محاسبه کنید. ب : شیب نمودار را در نقاط B و C مقایسه کنید.	۵										

۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در بازه‌ی $(-1, 1)$ اکیداً صعودی است.	خرداد ۹۹	۱۲۵/۰۲۵ نمره
۷	اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ باشد، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۸	برای تابع f در شکل روبرو داریم : $f(4) = 25$ و $f'(4) = \frac{3}{2}$ با توجه به شکل مختصات نقاط A و B و C را بیابید.	شهریور ۹۹	۱ نمره
۹	با توجه به نمودار $y = f(x)$ الف : حدود خواسته شده را بنویسید. ۱) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ۲) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ ب : تابع $y = f(x)$ در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده، مشتق پذیر نیست.	شهریور ۹۹	۱ نمره



انفره	دی ۹۹	نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یک نقطه اضافی است.) <table><tr><th>شیب</th><th>نقطه</th></tr><tr><td>-۳</td><td></td></tr><tr><td>-۱</td><td></td></tr><tr><td>۰</td><td></td></tr><tr><td>۱</td><td></td></tr></table> 	شیب	نقطه	-۳		-۱		۰		۱		۱۰
شیب	نقطه												
-۳													
-۱													
۰													
۱													
انفره	خرداد ۱۴۰۰	برای تابع f در شکل روبرو داریم، $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات B و C را بیابید. 	۱۱										
انفره	شهریور ۱۴۰۰	با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، نقاط به طول های a و b و c و d را با مشتق های داده در جدول نظیر کنید. <table><tr><th>x</th><th>$f'(x)$</th></tr><tr><td></td><td>۰</td></tr><tr><td></td><td>۰/۵</td></tr><tr><td></td><td>۲</td></tr><tr><td></td><td>-۰/۵</td></tr></table> 	x	$f'(x)$		۰		۰/۵		۲		-۰/۵	۱۲
x	$f'(x)$												
	۰												
	۰/۵												
	۲												
	-۰/۵												

فرمول های مشتق گیری

دی ۹۷	۰/۷۵ انمره	اگر $f'(2) = 3$ و $g'(2) = 5$ باشد. آنگاه حاصل عبارت $(2g - f)'(2)$ برابر است.	۱
دی ۹۷	۲ انمره	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن لازم نیست.) الف) $f(x) = \left(\frac{x}{2x-1}\right)^5$ ب) $g(x) = x^2 \sqrt{x+1}$	۲

۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن لازم نیست). الف) $f(x) = (x^4 - 3x)^5$ ب) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$	۳
۲ نمره	تیر ۹۸	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن لازم نیست). الف) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5$ ب) $g(x) = \frac{5x^2 - x}{\sqrt{x}}$	۴
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	مشتق تابع $y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x} - 1)^4$ را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).	۵
۱/۷۵ نمره	دی ۹۸	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = (x^2 + 1)^3(5x - 1)$ ب) $g(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$	۶
۱/۷۵ نمره	خرداد ۹۹	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = \left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^8$ ب) $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(\sqrt{3x+2})$	۷
۲/۲۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن الزامی نیست). الف) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 1}$ ب) $f(x) = (x^2 + 1)^3(5x - 1)$	۸
۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست). الف) $f(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$ ب) $f(x) = \sqrt{5x+3}$	۹
۱/۷۵ نمره	شهریور ۹۹	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(x^2 + 5x)^7$	۱۰
۱/۵ نمره	دی ۹۹	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = \left(\frac{x^2}{3x+1}\right)^5$ ب) $g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$	۱۱

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل چهارم درس ریاضی ۳ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی علوم تجربی

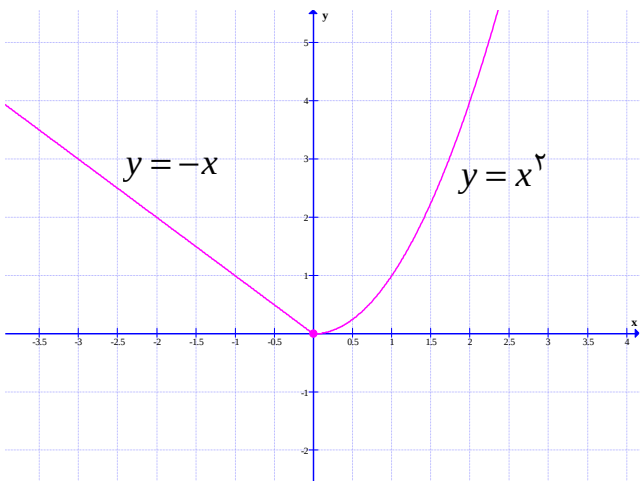
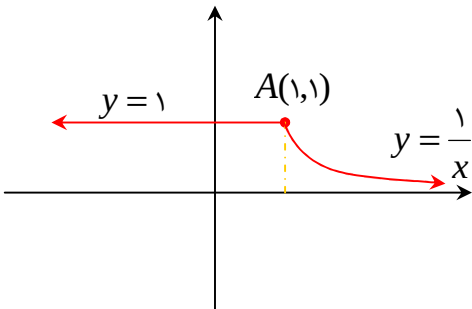
۱۲	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$	۱۴۰۰ خرداد	۱/۵ نمره
۱۳	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5$ ب) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+2}}$	۱۴۰۰ شهریور	۱/۵ نمره
۱۴	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. الف) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^5$ ب) $g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2 + 1)$	۱۴۰۰ دی	۱/۷۵ نمره
۱۵	اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند و $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ ، مقادیر $(3f + 2g)'(1)$ را به دست آورید.	۱۴۰۰ دی	۰/۷۵ نمره

درس ۲: مشتق پذیری و پیوستگی

۱	تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. الف: نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد. ب: ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید. ج: نمودار تابع f' را رسم کنید.	۹۸ خرداد	۱/۵ نمره
۲	مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$	۹۸ شهریور	۱/۵ نمره
۳	اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ نشان دهید که $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.	۹۸ دی	۱/۲۵ نمره
۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق پذیر است.	۹۹ خرداد	۰/۲۵ نمره

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه‌ی دوم استان خوزستان

۵	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.	خرداد ۹۹	نمره ۰/۲۵
۶	تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست. خط $x=0$ را منحنی می نامیم.	خرداد ۹۹	نمره ۱/۲۵
۷	به کمک تعریف مشتق ، مشتق پذیری تابع $f(x) = x^2 - 4 $ را در نقطه‌ی $x = -2$ بررسی کنید.	خرداد ۹۹	نمره ۰/۲۵
۸	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف : تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در نقطه‌ی $x=0$ مماس قائم دارد. ب : اگر تابع f پیوسته باشد، لزوماً مشتق پذیر است.	خرداد ۹۹	نمره ۰/۲۵
۹	اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ باشد، نشان دهید $f'(0)$ موجود نیست.	خرداد ۹۹	نمره ۰/۷۵
۱۰	مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$	خرداد ۹۹	نمره ۱
۱۱	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a ، است.	شهریور ۹۹	نمره ۰/۲۵
۱۲	تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x + 1 & x < 0 \end{cases}$ داده شده است. الف : نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد. ب : ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید. پ : نمودار تابع f' را رسم کنید.	شهریور ۹۹	نمره ۱/۵
۱۳	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. اگر $h(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ باشد، آنگاه $h''(1)$ برابر است.	دی ۹۹	نمره ۰/۲۵

۱/۲۵ نمره	دی ۹۹	با محاسبه‌ی مشتق چپ و راست تابع داده شده در نقطه‌ی ، نشان دهید این تابع در نقطه‌ی مشتق پذیر نیست. 	۱۳
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۰	با محاسبه‌ی مشتق راست و مشتق چپ تابع f ، در نقطه‌ی A، نشان دهید که تابع f در نقطه‌ی A، مشتق پذیر نیست. 	۱۴
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۰	اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ ، نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.	۱۵
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۰	مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه‌ی $x = -1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases}$	۱۶

درس ۳: آهنگ تغییر

۱ نمره	دی ۹۷	یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه‌ی زمانی $[3, 4]$ چقدر است؟	۱
-----------	-------	--	---

۲	خرداد ۹۸	انفره	معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$ ، بر حسب متر داده شده است. تعیین کنید که در چه زمانی، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[0, 4]$ با هم برابرند.
۳	تیر ۹۸	۱/۵ انفره	یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. الف) آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه‌ی زمانی $[3, 4]$ چقدر است؟ ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه‌ی $t = 3$ چقدر است؟
۴	شهریور ۹۸	انفره	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x} + 2$ را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 7$ تغییر می‌کند را به دست آورید.
۵	دی ۹۸	انفره	تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. اگر x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) باشد، حساب کنید که آهنگ متوسط رشد در بازه‌ی زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟
۶	خرداد ۹۹	۱/۵ انفره	یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. الف : سرعت افزایش جرم این توده باکتری در بازه‌ی زمانی $1 \leq t \leq 4$ چقدر است؟ ب : آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t = 4$ چقدر است؟
۷	خرداد ۹۹ خ	۱/۵ انفره	معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه‌ی زمانی $[0, 5]$ بر حسب ثانیه داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[0, 5]$ برابر است؟
۸	خرداد ۹۹ خ	انفره	یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم، $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. آهنگ رشد جرم این توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t = 1$ چقدر است؟
۹	شهریور ۹۹	۵-انفره	خودرویی در امتداد خط راست، طبق معادله‌ی $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند که در آن $0 \leq t \leq 5$ بر حسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چقدر است؟
۱۰	دی ۹۹	انفره	معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه‌ی زمانی $[0, 5]$ (بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	۱۱ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. حال اگر جهت حرکت به طرف بالا مثبت در نظر بگیریم و ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه، از معادله- $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست آید. الف : سرعت متوسط جسم را در بازه ی $[5, 8]$ به دست آورید. ب : مشخص کنید در چه لحظه ای سرعت جسم ۳۵ متر بر ثانیه است؟
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	۱۲ تابع ضابطه ی $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ متوسط قدر کودکان تا شصت ماهگی را نشان می دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. الف) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازه ی زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟ ب) آهنگ لحظه ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چقدر است؟
۱ نمره	دی ۱۴۰۰	۱۳ معادله ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه- ی $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه ی $[0, 5]$ زمانی با هم برابرند؟

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

((فصل پنجم : کاربرد مشتق))



درس ۱ : اکستریم های تابع

۱	الف : جدول تغییرات تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید. ب : نقاط بحرانی تابع f و اکستریم مطلق این تابع را در بازه $[-1, 3]$ مشخص کنید.	دی ۹۷	۲ نمره
۲	اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد. مقادیر a و b را به دست آورید.	خرداد ۹۸	۱ نمره
۳	اکستریم های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-1, 3]$ به دست آورید.	خرداد ۹۸	۱/۲۵ نمره
۴	الف) جدول تغییرات تابع $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید. ب) اکستریم های مطلق تابع f در بازه $[-1, 2]$ را تعیین کنید.	تیر ۹۸	۲/۵ نمره
۵	جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 3x + 4$ را رسم کنید و نقاط اکستریم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.	شهریور ۹۸	۱ نمره
۶	اکستریم های مطلق تابع $g(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه $[-2, 1]$ در صورت وجود تعیین کنید.	شهریور ۹۸	۱ نمره
۷	در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی را به دست آورده و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و می نیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$	دی ۹۸	۲ نمره

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل پنجم درس ریاضی ۳ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی علوم تجربی

۲/۲۵ نمره	خرداد ۹۹	تابع $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ را در نظر بگیرید. الف : با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. ب : مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازه‌ی $[0, 3]$ در صورت وجود به دست آورید.	۸
۲ نمره	خرداد ۹۹	اگر نقطه‌ی $(2, 1)$ ، نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.	۹
۱/۷۵ نمره	خرداد ۹۹ خ	الف : نقطه‌ی بحرانی را تعریف کنید. ب : اگر نقطه‌ی $(2, 1)$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.	۱۰
۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	مقادیر ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه‌ی $[-2, 1]$ در صورت وجود به دست آید.	۱۱
۰/۲۵ نمره	شهریور ۹۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه‌ی بحرانی آن است.	۱۲
۱/۵ نمره	شهریور ۹۹	اکسترمم های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 7$ در بازه‌ی $[-1, 3]$ را در صورت وجود به دست آورید.	۱۳
۱ نمره	شهریور ۹۹	اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای اکسترمم نسبی برابر -3 باشد، مقادیر a و b را بیابید.	۱۴
۲ نمره	دی ۹۹	در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و می نیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$	۱۵
۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع ، یک نقطه‌ی بحرانی آن است.	۱۶

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه‌ی دوم استان خوزستان

۱۷	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. بزرگترین بازه ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیداً نزولی است برابر است.	خرداد ۱۴۰۰ نمره ۰/۲۵
۱۸	اگر نقطه‌ی $(2,1)$ ، نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۰ نمره ۱/۵
۱۹	تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه اکیداً نزولی است؟	شهریور ۱۴۰۰ نمره ۱/۵
۲۰	اکسترمم های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه‌ی $[-1, 3]$ مشخص کنید.	دی ۱۴۰۰ نمره ۲
۲۱	اگر نقطه‌ی $(2,1)$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.	دی ۱۴۰۰ نمره ۱

درس ۲ : بهینه سازی

۱	اگر محیط مستطیلی ۲۴ سانتی متر باشد. طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود.	دی ۹۷ نمره ۱
۲	ورق فلزی مربع شکل به طول یک متر را در نظر بگیرید. می خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن ها را کنار بگذاریم. سپس لبه‌ی جعبه را به اندازه‌ی x بر می گردانیم تا یک جعبه‌ی در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.	خرداد ۹۸ نمره ۱/۲۵
۳	اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه‌ی $10x - y = 5$ باشد. مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصل ضرب این دو عدد مینیمم گردد.	تیر ۹۸ نمره ۱
۴	دو عدد حقیقی a و b را طوری بیابید که داشته باشیم $2a + b = 60$ و حاصل ضرب آنها بیشترین مقدار ممکن گردد.	شهریور ۹۸ نمره ۱

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل پنجم درس ریاضی ۳ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی علوم تجربی

۵	دی ۹۸	نمره ۱	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.
۶	خرداد ۹۹	نمره ۱/۵	هر صفحه‌ی مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل متن با مساحت ۳۲ سانتی متر مربع خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه ۲ سانتی متر و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.
۷	خرداد ۹۹ خ	نمره ۱/۲۵	نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشد.
۸	خرداد ۹۹ خ	نمره ۱/۵	ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی به معادله‌ی $y = 12 - x^2$ باشند.
۹	شهریور ۹۹	نمره ۱/۲۵	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۲۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.
۱۰	دی ۹۹	نمره ۱	نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشد.
۱۱	خرداد ۱۴۰۰	نمره ۱/۵	در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، طول و عرض مستطیلی با بیشترین مساحت را بیابید.
۱۲	شهریور ۱۴۰۰	نمره ۱/۵	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

((فصل ششم : هندسه))



درس ۱ : تفکر تجسمی

۱	درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید. شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه، حول یکی از اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی به صورت مخروط توپر می باشد. (درست، نادرست)	۹۸ خرداد	۲۵/۰ نمره
۲	درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید. اگر صفحه‌ی P در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک هذلولی است.	۹۸ شهریور	۲۵/۰ نمره
۳	در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن است.	۹۸ شهریور	۲۵/۰ نمره
۴	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود، آن نامیده می شود.	۹۸ دی	۲۵/۰ نمره
۵	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک است.	۹۹ خرداد	۲۵/۰ نمره
۶	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه به طور عمودی برش داده می شود، سطح مقطع یک است.	۹۹ خرداد	۲۵/۰ نمره
۷	عبارت مناسب را انتخاب کنید. اگر صفحه ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد. شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی خواهد بود. (بیضی ، سهمی ، هذلولی)	۹۹ شهریور	۲۵/۰ نمره

بیضی

۱	دی ۹۷	در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟
۲	خرداد ۹۸ نمره ۰/۲۵	گزینه ی مناسب را از بین گزینه های داخل پرانتز انتخاب کنید. هر چه خروج از مرکز بیضی (کوچکتر، بزرگتر) شود. شکل به دایره نزدیکتر خواهد شد.
۳	خرداد ۹۸ نمره ۱	در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصله ی کانونی را به دست آورید.
۴	تیر ۹۸ نمره ۱/۵	کانون های یک بیضی نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ است. الف) فاصله ی کانونی و مختصات مرکز بیضی را به دست آورید. ب) اگر $a = ۶$ باشد، اندازه ی قطر کوچک را پیدا کنید.
۵	شهریور ۹۸ نمره ۰/۷۵	اگر در یک بیضی داشته باشیم $a = ۵$ و $b = ۳$ در این صورت اندازه ی فاصله ی کانونی این بیضی را محاسبه کنید.
۶	دی ۹۸ نمره ۱/۵	کانون های یک بیضی $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ است. الف : فاصله ی کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید. ب : اگر $a = ۶$ باشد، اندازه ی قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.
۷	خرداد ۹۹ نمره ۲	کانون های یک بیضی نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ است. الف : فاصله ی کانونی و مختصات مرکز بیضی و معادله ی قطر بزرگ بیضی را بنویسید. ب : اگر $a = ۶$ باشد، اندازه ی قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.
۸	خرداد ۹۹ نمره ۱/۲۵	کانون های یک بیضی نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ است و اندازه ی قطر بزرگ ۱۲ می باشد، فاصله ی کانونی و مختصات مرکز بیضی و خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.
۹	خرداد ۹۹ نمره ۱/۵	در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مختصات مرکز آن $O(۴,۵)$ باشد. الف : فاصله ی کانونی بیضی را پیدا کنید. ب : مختصات دو سر قطر بزرگ آن را بنویسید.

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه‌ی دوم استان خوزستان

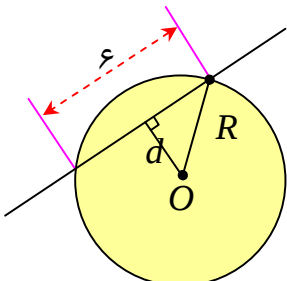
شهریور ۹۹	۲۵/۰۱/۲۵	در هر قسمت، عبارت مناسب را انتخاب کنید. اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به شکل نزدیک خواهد شد. (پاره خط، دایره، نقطه)	۱۰
شهریور ۹۹	۱/۵/۲۵	کانون های یک بیضی نقاط $(2,5)$ و $(2,-3)$ و $a = 5$ است. مختصات مرکز و اندازه‌ی قطر کوچک بیضی را پیدا کنید.	۱۱
دی ۹۹	۱/۵/۲۵	خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4,-1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. الف: طول قطر کانونی و فاصله‌ی کانونی را محاسبه کنید. ب: مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را پیدا کنید.	۱۲
خرداد ۱۴۰۰	۲۵/۰۱/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیکتر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.	۱۳
خرداد ۱۴۰۰	۱/۵/۲۵	کانون های یک بیضی نقاط $(1,3)$ و $(1,-5)$ است. الف: فاصله‌ی کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید. ب: اگر $a = 6$ باشد، اندازه‌ی قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازه‌ی نصف قطر بزرگ بیضی است).	۱۴
شهریور ۱۴۰۰	۱/۵/۲۵	در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(4,5)$ باشد. الف) فاصله‌ی کانونی بیضی را پیدا کنید. ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.	۱۵
دی ۱۴۰۰	۱/۵/۲۵	خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ و مرکز آن $(-4,-1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. الف: فاصله‌ی کانونی را محاسبه کنید. ب: مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ این بیضی را پیدا کنید.	۱۶

درس ۲: دایره

دی ۹۷	۱/۲۵/۲۵	معادله‌ی گسترده‌ی دایره‌ی $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ می باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.	۱
-------	---------	---	---

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل ششم درس ریاضی ۳ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی علوم تجربی

۲	خرداد ۹۸	وضعیت دو دایره به معادلات $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ نسبت به هم را مشخص کنید.
۳	تیر ۹۸	وضعیت دو دایره به معادلات $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 7$ و $x^2 + (y-5)^2 = 5$ نسبت به هم را مشخص کنید.
۴	شهریور ۹۸	وضعیت خط $x + y = 3$ را نسبت به دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ مشخص کنید.
۵	دی ۹۸	وضعیت دایره‌ی $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ و خط $y = -1$ را نسبت به هم مشخص کنید.
۶	خرداد ۹۹	معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن $(1, 2)$ باشد.
۷	خرداد ۹۹	وضعیت دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 = 2$ و خط $y = -x - 2$ را نسبت به هم مشخص کنید.
۸	شهریور	معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y = 1$ مماس بوده و مرکز آن $(1, 2)$ باشد.
۹	دی ۹۹	معادله‌ی دایره‌ی ای به شکل $(x+1)^2 + y^2 = 4$ می باشد. الف : مختصات مرکز دایره و اندازه‌ی شعاع دایره را بنویسید. ب : مختصات تقاطع دایره با محور x ها را پیدا کنید.
۱۰	خرداد ۱۴۰۰	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. شعاع دایره‌ی ای به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ برابر است.

۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	مرکز دایره ای، نقطه‌ی $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وتری به طول ۶ جدا می کند. معادله‌ی این دایره را بنویسید. 	۱۱
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	وضعیت خط $x + y = 3$ و دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.	۱۲
۱ نمره	دی ۱۴۰۰	معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(0, 3)$ بوده و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.	۱۳

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

((فصل هفتم : احتمال))



یادآوری مفاهیم

۱	جای خالی را با یکی از گزینه های داخل پرانتز کامل کنید. دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد (مستقل ، ناسازگار) هستند.	۹۵ خرداد	۲۵/۰ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دو پیشامد A و B از هم مستقل هستند، هرگاه با هم رخ ندهند.	۹۸ دی	۲۵/۰ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دو پیشامد A و B را ناسازگار می گوئیم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند.	۹۹ خرداد	۲۵/۰ نمره
۴	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. منظور از احتمال $P(A B)$ این است که احتمال وقوع پیشامد A به شرط آن که بدانیم پیشامد B رخ داده است.	۹۹ خرداد	۲۵/۰ نمره
۵	در هر قسمت، عبارت مناسب را انتخاب کنید. الف : دو پیشامد A و B را گوئیم هرگاه وقع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. (مستقل ، ناسازگار، سازگار) ب: احتمال وقوع پیشامد A به شرط اینکه بدانیم پیشامد B رخ داده است، به صورت نمایش داده می شود. ($P(A-B)$ ، $P(A B)$ ، $P(B A)$)	۹۹ شهریور	۵/۰ نمره

قانون احتمال کل

۱	یک سکه را پرتاب می کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه ی دیگر را با هم پرتاب می کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، چقدر است؟	۹۷ دی	۱/۵ نمره
---	--	-------	----------

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل هفتم درس ریاضی ۳ پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی علوم تجربی

۲	۱/۷۵ نمره	۹۸ خرداد	سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره‌ی آبی است. ظرف دوم شامل ۷ مهره‌ی سبز و ۳ مهره‌ی آبی است. ظرف سوم شامل ۶ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟
۳	۱/۷۵ نمره	۹۸ تیر	سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره قرمز و ۳ مهره‌ی آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره‌ی آبی و ظرف سوم شامل ۶ مهره‌ی قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره‌ی انتخابی آبی باشد، چقدر است؟
۴	۱/۵ نمره	۹۸ شهریور	دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۷ مهره آبی و ۵ مهره قرمز است و ظرف دوم شامل ۶ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است. از ظرف اول یک مهره انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. حساب کنید که با چه احتمالی این مهره آبی است؟
۵	۱/۲۵ نمره	۹۸ دی	فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۰ درصد مرد و ۶۰ درصد زن باشند و احتمال شیوع یک بیماری خاص در این دو گروه ۳ درصد و ۵ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟
۶	۲ نمره	۹۹ خرداد	اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟
۷	۱/۲۵ نمره	۹۹ خرداد	دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبه‌ی دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب هستند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟
۸	۱ نمره	۹۹ خرداد	اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و به دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده‌ای قصد بچه دار شدن را داشته باشند، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری خاص مبتلا خواهد شد؟
۹	۱ نمره	۹۹ شهریور	اگر احتمال انتقال نوعی بیماری عفونی به نوزاد پسر ۰/۰۷ و نوزاد دختر ۰/۰۴ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشند، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟
۱۰	۱/۵ نمره	۹۹ دی	سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره‌ی آبی و ظرف سوم شامل ۶ مهره‌ی قرمز است. با چشم بسته یکی از طرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره‌ی انتخابی آبی باشد، چقدر است؟

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی و عضو گروه ریاضی متوسطه‌ی دوم استان خوزستان

۲ نمره	خرداد ۱۴۰۰	۱۱	اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر $0/08$ و نوزاد دختر $0/03$ باشد و خانواده ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟
۲ نمره	شهریور ۱۴۰۰	۱۲	دو ظرف یکسان داریم، ظرف اول ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می کنیم. حساب کنید که به چه احتمالی این مهره سبز است؟
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۰	۱۳	۴ ظرف یکسان داریم. در ظرف اول ۱۴ مهره قرار دارد و فقط ۴ مهره از بین آنها قرمزند. در ظرف دوم همه‌ی مهره ها قرمزند و ظرف سوم ۸ مهره دارد که شامل ۶ مهره‌ی قرمز است. در ظرف چهارم هیچ مهره‌ی قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می آوریم. احتمال آن که مهره‌ی انتخابی قرمز باشد، چقدر است؟

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

پاسخ سؤالات موضوعی نهایی

فصل اول ریاضی ۳ پایه دوازدهم علوم تجربی

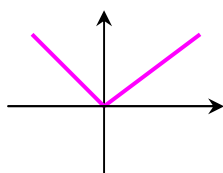
فصل ۱: تابع

درس ۱: توابع چند جمله ای

۱	نادرست
۲	پایین
۳	درست
۴	درست
۵	پایین تر

توابع صعودی و نزولی

۱	درست
۲	صعودی
۳	درست
۴	صفر
۵	نادرست
۶	ثابت
۷	درست
۸	نادرست. تابع قدرمطلق در دامنه اش که مجموعه ای اعداد حقیقی است نه صعودی و نه نزولی است.
۹	ثابت
۱۰	یکنوا



۱۱	نادرست
----	--------

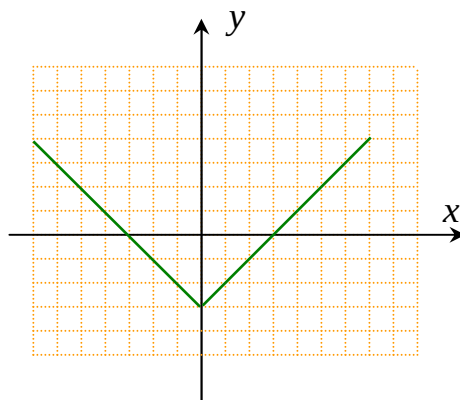
درس ۲: ترکیب توابع

$g(x) = x^2$	۱
$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$	۲
$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 4 \mid \sqrt{x-4} \neq \pm 1\} = [4, 5) \cup (5, +\infty)$	۳
$D_f \geq 1$ و $Dg = \mathbb{R}$ $D_{fog} = \{x \in D_g \mid f(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	۴
$D_g = [-6, +\infty)$ و $D_f = \mathbb{R}$ $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq -6 \mid \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = [-6, +\infty)$	۵
$f(g(x)) = 3g(x) - 4 \xrightarrow{f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14} 3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14$ $\rightarrow 3g(x) = 3x^2 - 6x + 18 \rightarrow g(x) = x^2 - 2x + 6$	۶
الف) $D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, 2] \mid \sqrt{4-2x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 2]$ ب) $(gof)(2) - \frac{f}{g}(0) = (-1) - (-2) = 1$	۷
$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sin \sqrt{x}$ نادرست	۸
$(fog)(4) = f(g(4)) = f(7) = 5$	۹
$D_f = \mathbb{R}$ $D_g = x + 6 \geq 0 \rightarrow x \geq -6$ $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq -6 \mid \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = [-6, +\infty)$	۱۰

$f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ $\xrightarrow{f(x)=3x-4} f(g(x)) = 3g(x) - 4$ $\rightarrow 3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14 \rightarrow 3g(x) = 3x^2 - 6x + 18$ $\xrightarrow{\div 3} g(x) = x^2 - 2x + 6$	۱۱
الف : $D_f = [1, +\infty), D_g = R$ $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ $= \{x \in R \mid 2x^2 - 1 \geq 1\} = \{x \in R \mid 2x^2 \geq 2\} = \{x \in R \mid x^2 \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ ب : $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x^2 - 1) = \sqrt{(2x^2 - 1) - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$	۱۲
الف) $f(-3) = 1$ ب) $3t - 1 = -4 \rightarrow t = -1$ پ) $[-2, +\infty)$	۱۳
الف) $D_f = [1, +\infty), D_g = R$ $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R \mid 2x^2 - 1 \in R\}$ $= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ ب) $(g \circ f)(2) = 1$	۱۴
الف) $g(f(1)) = g(2) = -2$ ب) $(f + g)(\cdot) = -1 + 3 = 2$ $(f \circ (f + g))(\cdot) = f((f + g)(\cdot)) = f(2) = -5$	۱۵
درست	۱۶

$$(g \circ f)(-۱) = g(-۱) = -۵$$

$$(g^{-۱} \circ f^{-۱})(۲) = g^{-۱}(۰) = -۴$$

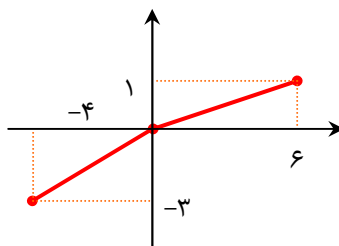


تبدیلات

۱

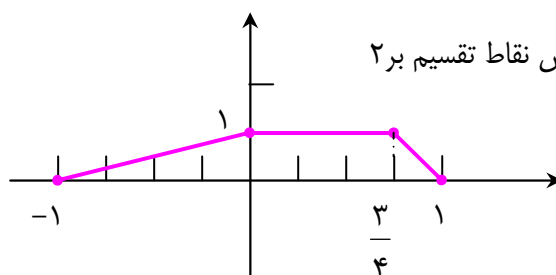
طول نقاط دو برابر و عرض نقاط ۲ واحد کم می شود.

تابع اصلی				تابع جدید			
x	-۲	۰	۳	x	-۴	۰	۶
y	-۱	۲	۳	y	-۳	۰	۱



۲

تابع اصلی					تابع جدید				
x	-۴	۰	۳	۴	x	-۱	۰	$\frac{۳}{۴}$	۱
y	۰	۲	۲	۰	y	۰	۱	۱	۰

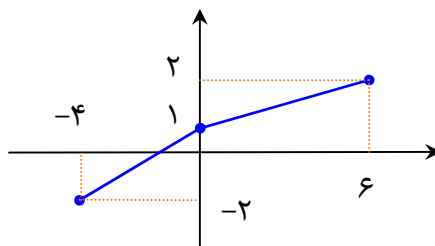


طول نقاط تقسیم بر ۴ و عرض نقاط تقسیم بر ۲

۳

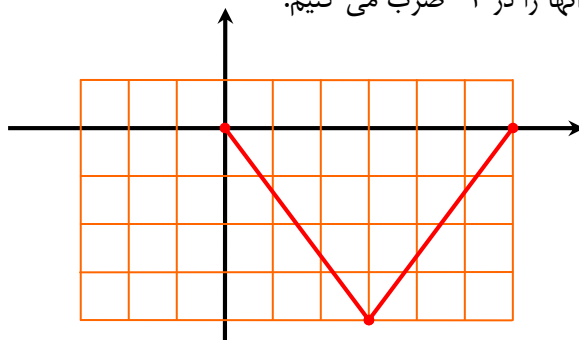
تابع اصلی				تابع جدید			
x	-۲	۰	۳	x	-۴	۰	۶
y	-۱	۲	۳	y	-۲	۱	۲

طول نقاط نمودار را دو برابر و عرض نقاط را یک واحد کم می کنیم.



۴

طول نقاط را سه برابر و عرض آنها را در ۲- ضرب می کنیم.



۵

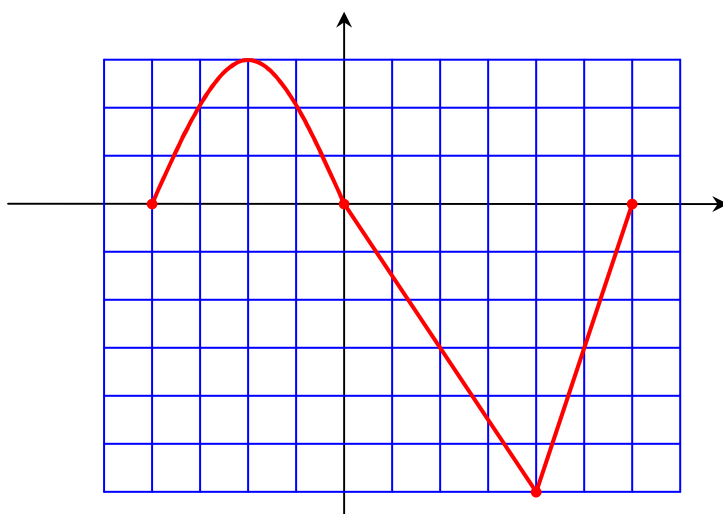
نادرست

۶ الف : ابتدا مختصات نقاط مهم تابع اصلی را تعیین می کنیم.

x	-۲	-۱	۰	۲	۳
y	۰	۱	۰	-۲	۰

اکنون طول نقاط دو برابر و عرض نقاط را سه برابر می کنیم تا مختصات نقاط مهم تابع جدید بدست آیند.

x	-۴	-۲	۰	۴	۶
y	۰	۳	۰	-۶	۰



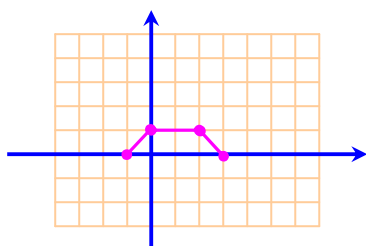
ب : $D = [-۴, ۶]$

۷ عرض نقاط دو برابر می شود و لذا برد تابع جدید می شود $[-۲, ۸]$

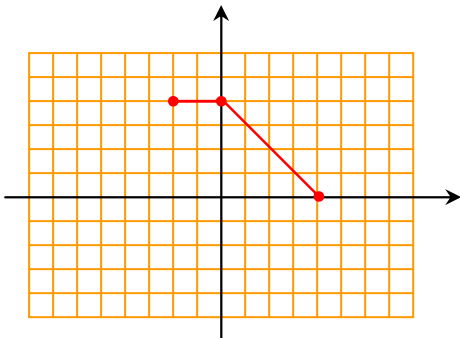
۸ نادرست

۹ درست

۱۰ طول نقاط اصلی نمودار را در $\frac{1}{۳}$ و عرض آنها را در $\frac{1}{۳}$ ضرب می کنیم.



۱۱ درست

	۱۲
$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ مرحله ۱ $f(x) - 2 = (x-1)^2 - 2$ مرحله ۲ $f(x+1) - 2 = x^2 - 2$ مرحله ۳ $-f(x+1) + 2 = -x^2 + 2$	۱۳

درس ۳: تابع وارون

$(g^{-1} \circ f^{-1})(\Delta) = g^{-1}(f^{-1}(\Delta)) = g^{-1}(64) = 4$	۱
$\left. \begin{array}{l} f^{-1}(x) = \lambda(x+3) \\ g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \end{array} \right\} \xrightarrow{f^{-1}(\Delta) = \lambda(\Delta+3) = 64} g^{-1} \circ f^{-1}(\Delta) = g^{-1}(64) = \sqrt[3]{64} = 4$	۲
به پاسخ سؤال قبل مراجعه کنید.	۳
$h(x) = x^2 - 5 \quad ; \quad x \geq 0$	۴
کافی است که نشان دهیم: $(g \circ f)(x) = x \quad \text{و} \quad (f \circ g)(x) = x$ $(f \circ g)(x) = f\left(\frac{x+4}{3}\right) = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x$ $(g \circ f)(x) = g(3x-4) = \frac{(3x-4)+4}{3} = x$	۵

۶	الف : $y = \sqrt{x+2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \sqrt{y+2} \rightarrow x^2 = (\sqrt{y+2})^2 \rightarrow x^2 = y+2 \rightarrow x^2 - 2 = y$ $\rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2$ ب این تابع یک سهمی رو به بالا است. طول رأس سهمی به صورت زیر است. $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2(1)} = 2$ لذا تابع در بازه هایی نظیر $(-\infty, 2)$ یا $(2, +\infty)$ یک به یک خواهد بود. توجه : بازه های دیگر نیز می توان نوشت و از طرف ۲ نیز ، بازه را می توان بسته نوشت.
۷	باید نشان دهیم که $g(f(x)) = x$ و $f(g(x)) = x$ $f(g(x)) = f\left(\frac{3-2x}{1}\right) = \frac{-1\left(\frac{3-2x}{1}\right) + 3}{2} = \frac{-(3-2x) + 3}{2} = \frac{-3 + 2x + 3}{2} = \frac{2x}{2} = x$ $g(f(x)) = g\left(\frac{-1x + 3}{2}\right) = \frac{3 - 2\left(\frac{-1x + 3}{2}\right)}{1} = \frac{3 - (-1x + 3)}{1} = \frac{3 + 1x - 3}{1} = \frac{1x}{1} = x$
۸	$f(x) = -\frac{1}{2}x - 3$ $y = -\frac{1}{2}x - 3 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = -\frac{1}{2}y - 3 \rightarrow x + 3 = -\frac{1}{2}y$ $\times\left(-\frac{2}{1}\right) \rightarrow -\frac{2}{1}x - \frac{6}{1} = y \rightarrow y = -\frac{2x + 6}{1}$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2x + 6}{1}$

$y = -5 - \sqrt{3x+1} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = -5 - \sqrt{3y+1} \rightarrow x+5 = -\sqrt{3y+1} \rightarrow (x+5)^2 = 3y+1$ $\rightarrow \frac{(x+5)^2 - 1}{3} = y$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{(x+5)^2 - 1}{3}$	۹
	۱۰ درست
	۱۱ نادرست

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

پاسخ سؤالات موضوعی نهایی

فصل دوم ریاضی ۳ پایه دوازدهم علوم تجربی

فصل ۲: مثلثات

درس ۱: توابع متناوب

$\max(f) = 3 + 2 = 5$ و $\min(f) = - 3 + 2 = -1$ و $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$	۱
$\max(f) = -2 + 1 = 3$ و $\min(f) = - -2 + 1 = -1$	۲
$\max(f) = 2 - 1 = 1$ و $\min(f) = - 2 - 1 = -3$ و $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$	۳
$\max(f) = -3 + 1 = 4$ و $\min(f) = - -3 + 1 = -2$ و $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$	۴
$\max(f) a + c = \pi - 2 = \pi - 2$ $\min(f) = - a + c = - \pi - 2 = -\pi - 2$ $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$	۵
$\max(y) = a + c = 1 + \sqrt{3}$ $\min(y) = - a + c = -1 + \sqrt{3}$ $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$	۶
$\min(y) = - a + c = - 3 + (-2) = -5$ درست	۷
$T = \frac{2\pi}{ b } \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{ b } \rightarrow 4 b = 2 \rightarrow b = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$	۸

$ a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{-1 - (-7)}{2} = \frac{-1 + 7}{2} = 3 \rightarrow a = \pm 3$ $c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{-1 - 7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$ این توابع می توانند، به شکل زیر باشند. $y = a \sin bx + c \rightarrow \begin{cases} y = 3 \sin \frac{1}{2}x - 4 \\ y = -3 \sin \frac{1}{2}x - 4 \\ y = 3 \sin(-\frac{1}{2})x - 4 \\ y = -3 \sin(-\frac{1}{2})x - 4 \end{cases}$	
$T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{2} = \pi$ دوره تناوب $y_{\max} = a + c = 3 - 2 = 1$ مقدار ماکزیمم $y_{\min} = - a + c = -3 - 2 = -5$ مقدار می نیمم	۹
$\max(y) = a + c = \pi + 1$ $\min(y) = - a + c = -\pi + 1$ $T = \frac{2\pi}{ -1 } = 2\pi$	۱۰
$\min(f) = - a + c = -8 + 0 = -8$ $\max(f) = a + c = 8 + 0 = 8$ $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$	۱۱
با توجه به نمودار می توان نوشت: $\max(f) = 5 \quad \text{و} \quad \min(f) = 1 \quad \text{و} \quad T = 4\pi - 0 = 4\pi$	۱۲

$b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$ $c = \frac{\max(f) + \min(f)}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$ پس داریم : $y = a \cos bx + c = a \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 3$ نمودار تابع از نقطه‌ی (۰,۵) می‌گذرد، لذا: $5 = a \cos\left(\frac{1}{2}(0)\right) + 3$ $\rightarrow 5 = a + 3 \rightarrow a = 2$ در نتیجه : $y = a \cos bx + c = 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 3$ یا اینکه : $y = a \cos bx + c = 2 \cos\left(-\frac{1}{2}x\right) + 3$	
$ a = \frac{5 - (-1)}{2} = 3 \rightarrow a = \pm 3$ $c = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$ $ b = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4} \rightarrow b = \pm \frac{1}{4}$ $\Rightarrow y = 3 \sin\left(\pm \frac{1}{4}x\right) + 2$	۱۳
$ a = \frac{2 - (-2)}{2} = 2 \rightarrow a = -2$ $ b = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \rightarrow b = 1$	۱۴

$c = \frac{2 + (-2)}{2} = 0$ $f(x) = a \cos bx + c \rightarrow f(x) = -2 \cos x$	
--	--

تابع تانژانت

$2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$	۱
نادرست	۲
درست	۳
π	۴
R	۵
$T = \pi$	۶
صعودی	۷
نادرست	۸

روابط مثلثاتی

$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ $\sin^2 (22/5)^\circ = \frac{1}{2}(1 - \cos 45^\circ) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ $\rightarrow \sin(22/5)^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$	۱
$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2(\frac{5}{13})^2 - 1 = \frac{2 \times 25}{169} - 1 = \frac{50 - 169}{169} = -\frac{119}{169}$	۲

$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ $\sin^2 (15)^\circ = \frac{1}{2}(1 - \cos 30^\circ) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ $\rightarrow \sin(15)^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$	۳
رجوع شود به تمرین ۳	۴
$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$	۵
$A = 4 \sin x \cos x \cos 2x = 2(2 \sin x \cos x) \cos 2x = 2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x$ $x = (7/5)^\circ \rightarrow A = \sin 4(7/5) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	۶

درس ۲: معادلات مثلثاتی

$\sin x - 1 + 2 \sin^2 x = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ $\rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \rightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$	۱
$(1 - 2 \sin^2 x) - \sin x = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = -1, \sin x = \frac{1}{2}$ $\sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $\sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{6}} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$	۲

$2 \sin x + \sqrt{2} = \sqrt{2} \rightarrow 2 \sin x + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\alpha = \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$	۳
$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\times 2} 2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{4}}$ $\alpha = \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$	۴
$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0$ $\rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$ $\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{3}} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$	۵
$2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0$ $\Delta = (-9)^2 - 4(2)(-5) = 81 + 40 = 121 \rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{9 + 11}{4} = 5 \\ \cos x = \frac{9 - 11}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ تساوی $\cos x = 5$ غیر ممکن است ولی تساوی $\cos x = -\frac{1}{2}$ قابل قبول است. لذا: $\cos x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$	۶

$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{4}} \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$	۷
$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$	۸
$(1 - \sin^2 x) - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0$ $\sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \rightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$ $\Delta = (4)^2 - 4(4)(-3) = 16 + 48 = 64 \rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-4 + 8}{2(4)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{-4 - 8}{2(4)} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2} \end{cases}$ برای حالت $\sin x = \frac{1}{2}$ می توان نوشت: $\sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{6}} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$ ولی حالت $\sin x = -\frac{3}{2}$ قابل قبول نیست.	۹
$2\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{3}} \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$	۱۰
$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow 2\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	۱۱

$\alpha = \frac{\pi}{3} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}; \quad k \in \mathbb{Z}$	
$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta \xrightarrow{S=8} \frac{1}{2} (4)(8) \sin \theta = 8 \rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\rightarrow \theta = 45^\circ \quad \text{or} \quad \theta = 135^\circ$ لذا با شرایط دو مثلث می توان رسم کرد.	۱۲
$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \rightarrow \frac{1}{2} (2 \sin x - 1)(2 \sin x + 2) = 0$ $\rightarrow (2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$ $2 \sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$ $\sin x + 1 = 0 \rightarrow \sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	۱۳

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@merimath

پاسخ سؤالات موضوعی نهایی

فصل سوم ریاضی ۳ پایه دوازدهم علوم تجربی

فصل ۳: حد بی نهایت و حد در بی نهایت

درس ۱: حد بی نهایت

تقسیم چند جمله ای ها

درست	۱
$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$ $R = f(3) = 2(3)^2 - 5(3) + 1 = 18 - 15 + 1 = 4$	۲
درست	۳
$x + 1$	۴

حدهای مبهم

$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)(\sqrt{x+1}+2)$ $= (3+3)(\sqrt{3+1}+2) = 6 \times 4 = 24$	۱
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x-1)(x+2)(x + \sqrt{x})}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x+2)(x + \sqrt{x})} = \frac{1}{(1+2)(1+\sqrt{1})}$ $= \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$	۲

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{2 - \sqrt{x+1}} \times \frac{2 + \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}}$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2 + \sqrt{x+1})}{4 - (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2 + \sqrt{x+1})}{3 - x}$ $= \lim_{x \rightarrow 3} -(x+3)(2 + \sqrt{x+1}) = -(3+3)(2 + \sqrt{3+1}) = -24$	۳
$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{(x-4)(x+4)} \times \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{(x-4)(x+4)(2 + \sqrt{x})}$ $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{(x+4)(2 + \sqrt{x})} = \frac{-1}{(4+4)(2 + \sqrt{4})} = \frac{-1}{8 \times 4} = \frac{-1}{32}$	۴
$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}} \times \frac{x - \sqrt{2x+3}}{x - \sqrt{2x+3}}$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - (2x+3)} \times \frac{x - \sqrt{2x+3}}{1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3} \times (x - \sqrt{2x+3})$ $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-3)} \times (x - \sqrt{2x+3}) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x-3} \times (x - \sqrt{2x+3})$ $= \frac{-1-1}{-1-3} \times (-1 - \sqrt{2(-1)+3}) = \frac{1}{2}(-1-1) = -1$	۵
$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}} \times \frac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{x+6}}$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - (x+6)} \times (x + \sqrt{x+6}) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)(x-3)} \times (x + \sqrt{x+6})$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x+2} \times (x + \sqrt{x+6}) = \frac{3+1}{3+2} \times (3 + \sqrt{3+6}) = \frac{24}{5}$	۶
$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}} \times \frac{2 + \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{4 - (x+1)} \times (2 + \sqrt{x+1})$	۷

$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3} -(x+3)(2+\sqrt{x+1})$ $= (-6) \times (2+2) = -24$	
الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{(4-(x+1))}$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{-x+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{-(x-3)}$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{-1} = \frac{(3+3)(2+\sqrt{3+1})}{-1} = -24$	۸
$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}$ $= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})} = \frac{-1}{4}$	۹
$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4-(x-1)}{x-5} \times \frac{1}{2+\sqrt{x-1}}$ $= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{x-5} \times \frac{1}{2+\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{2+\sqrt{x-1}} = \frac{-1}{2+\sqrt{5-1}} = \frac{-1}{4}$	۱۰
الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x+2)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{6}$	۱۱
$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2-x}{4x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x}{2x+1} = \frac{\frac{1}{2}}{2(\frac{1}{2})+1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$	۱۲

حد بی نهایت

الف) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2 - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x - 3} = +\infty$	۱
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{[0^-]}{\sin(0^-)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$	۲
$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2(1)}{1 - (1^+)^2} = \frac{2}{.^+} = +\infty$	۳
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - 1^-} = \frac{1}{.^+} = +\infty$	۴
$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{ x - 3 } = \frac{2}{ 3 - 3 } = \frac{2}{.^+} = +\infty$	۵
$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2 - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{3^- - 3} = \frac{-1}{.^-} = +\infty$	۶
$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2 - 4} = \frac{-3(-2)}{(-2)^2 - 4} = \frac{-3(-2)}{4^+ - 4} = \frac{+6}{.^+} = +\infty$	۷
الف) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{ 3x + 1 } = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[-\frac{1}{3}]}{ 3x + 1 } = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{-1}{ 3x + 1 } = \frac{-1}{ 3(-\frac{1}{3}) + 1 } = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ ب) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2(5)}{(5^-) - 5} = \frac{10}{.^-} = -\infty$	۸
$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{ 2x - 1 } = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{ 2(x - \frac{1}{2}) } = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{2 x - \frac{1}{2} } = \frac{. - 3}{2 \times .^+} = \frac{-3}{.^+} = -\infty$	۹

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x - 3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$	۱۰
$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})^+} \frac{[x]}{ 3x + 1 } = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})^+} \frac{-1}{ 3x + 1 } = \frac{-1}{0^+} = -\infty$	۱۱
$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$	۱۲
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sin^2 x} = \frac{0 + 1}{0^+} = +\infty$	۱۳

درس ۲: حد در بی نهایت

-۵	۱
$+\infty$ (ب) -2 (الف)	۲
$-\infty$	۳
صفر	۴
$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{-\infty} = 0$ $\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$	۵
$\lim_{x \rightarrow -\infty} (9 + \frac{7}{x^2}) = 9 + \frac{7}{(-\infty)^2} = 9 + \frac{7}{+\infty} = 9 + 0 = 9$	۶
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{6x^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	۷
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{4}{x} - 5)} = \frac{3 + 0}{0 - 5} = -\frac{3}{5}$	۸

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^4 = -\infty$$

۹

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

پاسخ سؤالات موضوعی نهایی

فصل چهارم ریاضی ۳ پایه دوازدهم علوم تجربی

فصل ۴ : مشتق

درس ۱ : آشنایی با مفهوم مشتق

تعریف مشتق

$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - 2x^2 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(1 - x)(1 + x)}{x + 1} = 4$	۱
$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2 + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3$	۲

تعبیر هندسی مشتق

$f(4) = 24 \rightarrow A(4, 24)$ $f(4) = 24, f'(4) = m_{AB} = 1/5$ $d: y - 24 = \frac{3}{2}(x - 4) \rightarrow y - 24 = \frac{3}{2}x - 6 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 18$ $x = 5 \rightarrow y = \frac{3}{2}(5) + 18 = \frac{51}{2} \rightarrow B(5, \frac{51}{2})$ $x = 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}(3) + 18 = \frac{45}{2} \rightarrow C(3, \frac{45}{2})$	۱
---	---

$f(۴) = ۲۵ \rightarrow A(۴, ۲۵)$ $f(۴) = ۲۵$, $f'(۴) = m_{AB} = ۱/۵$ $d : y - ۲۵ = \frac{۳}{۲}(x - ۴) \rightarrow y - ۲۵ = \frac{۳}{۲}x - ۶ \rightarrow y = \frac{۳}{۲}x + ۱۹$ $x = ۵ \rightarrow y = \frac{۳}{۲}(۵) + ۱۹ = \frac{۵۱}{۲} \rightarrow B(۵, \frac{۵۳}{۲})$ $x = ۳ \rightarrow y = \frac{۳}{۲}(۳) + ۱۹ = \frac{۴۷}{۲} \rightarrow C(۳, \frac{۴۷}{۲})$	۲										
<table><tr><td>شیب</td><td>۱</td><td>۰</td><td>$\frac{۱}{۲}$</td><td>-۲</td></tr><tr><td>نقطه</td><td>C</td><td>B</td><td>D</td><td>A</td></tr></table>	شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۲	نقطه	C	B	D	A	۳
شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۲							
نقطه	C	B	D	A							
<table><tr><td>x</td><td>d</td><td>b</td><td>c</td><td>a</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td>.</td><td>۰/۵</td><td>۲</td><td>-۰/۵</td></tr></table>	x	d	b	c	a	f'(x)	.	۰/۵	۲	-۰/۵	۴
x	d	b	c	a							
f'(x)	.	۰/۵	۲	-۰/۵							
الف) $f'(۱) = \frac{۲-۰}{۰-۱} = -۲$ ب) $m_B < m_C$	۵										
نادرست	۶										
$f(۲) = ۳(۲)^۲ - ۲(۲) + ۱ = ۱۲ - ۴ + ۱ = ۹$ $f'(x) = ۶x - ۲ \rightarrow m = f'(۲) = ۶(۲) - ۲ = ۱۰$ شیب خط مماس $y = m(x - a) + b \rightarrow y = ۱۰.(x - ۲) + ۹ \rightarrow y = ۱۰x - ۱۱$ معادله‌ی خط مماس	۷										

$f(۴) = ۲۵ \rightarrow A(۴, ۲۵)$ $f'(۴) = \frac{۳}{۲} \rightarrow m = \frac{۳}{۲}$ شیب خط مماس $y = m(x - a) + b \rightarrow y = \frac{۳}{۲}(x - ۴) + ۲۵$ معادله‌ی خط مماس $x = ۵ \rightarrow y = \frac{۳}{۲}(۵ - ۴) + ۲۵ = ۲۶/۵ \Rightarrow B(۵, ۲۶/۵)$ $x = ۳ \rightarrow y = \frac{۳}{۲}(۳ - ۴) + ۲۵ = ۲۳/۵ \Rightarrow C(۳, ۲۳/۵)$	۸														
الف : ۱) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ۲$ ۲) $\lim_{x \rightarrow (-۱)^+} f(x) = -\infty$ ب : تابع در نقاط $x = -۱$ و $x = ۱$ مشتق پذیر نیست.	۹														
<table><tr><td></td><td>نقطه</td><td>A</td><td>D</td><td>B</td><td>E</td><td></td></tr><tr><td></td><td>شیب</td><td>۱</td><td>۰</td><td>-۱</td><td>-۳</td><td></td></tr></table>		نقطه	A	D	B	E			شیب	۱	۰	-۱	-۳		۱۰
	نقطه	A	D	B	E										
	شیب	۱	۰	-۱	-۳										
$\frac{f(۴) - f(۳)}{۴ - ۳} = ۱/۵ \xrightarrow{f(۴)=۲۴} ۲۴ - f(۳) = ۱/۵ \rightarrow f(۳) = ۲۲/۵$ $\rightarrow B(۳, ۲۲/۵)$ $\frac{f(۵) - f(۴)}{۵ - ۴} = ۱/۵ \xrightarrow{f(۴)=۲۴} f(۵) - ۲۴ = ۱/۵ \rightarrow f(۵) = ۲۵/۵$ $\rightarrow C(۵, ۲۵/۵)$	۱۱														
<table><tr><td></td><td>x</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td></td></tr><tr><td></td><td>f'(x)</td><td>-۰/۵</td><td>۰/۵</td><td>۲</td><td>۰</td><td></td></tr></table>		x	a	b	c	d			f'(x)	-۰/۵	۰/۵	۲	۰		۱۲
	x	a	b	c	d										
	f'(x)	-۰/۵	۰/۵	۲	۰										

فرمول های مشتق گیری

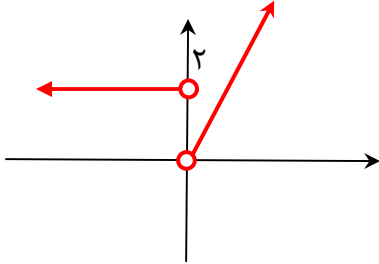
$2g'(2) - f'(2) = 2(5) - 3 = 7$	۱
---------------------------------	---

الف) $f'(x) = 5 \times \left(\frac{x}{2x-1}\right)^4 \times \left(\frac{2x-1-2x}{(2x-1)^2}\right)$ ب) $g'(x) = 2x \times (\sqrt{x+1}) + \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \times x^2$	۲
الف) $f'(x) = 5 \times (4x^3 - 3)(x^4 - 3x)^4$ ب) $g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x) - (-1)\sqrt{x}}{(1-x)^2}$	۳
الف) $f'(x) = 5 \times (2x+2)(x^2+2x+1)^4$ ب) $g'(x) = \frac{(1 \cdot x - 1)\sqrt{x} - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(5x^2 - x)}{(\sqrt{x})^2}$	۴
$y' = \frac{-1}{x^2} \times (2\sqrt{x}-1)^4 + 4\left(\frac{2}{2\sqrt{x}} - \cdot\right)(2\sqrt{x}-1)^3 \times \frac{1}{x}$	۵
الف) $f'(x) = 3(2x)(x^2+1)^2(5x-1) + 5(x^2+1)^2$ ب) $g'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$	۶
الف) $f'(x) = 8\left(\frac{-3(x^2+5) - (2x)(-3x+1)}{(x^2+5)^2}\right)\left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^7$ ب) $g'(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\right)(\sqrt{3x+2}) + \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)$	۷

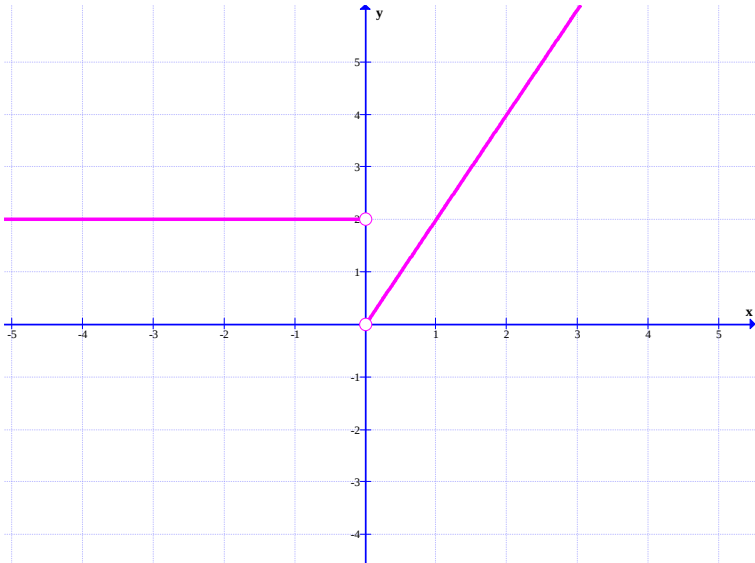
الف: مشتق تابع کسری	۸
$f'(x) = \frac{(2x-3)(-3x+1) - (-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+1)^2}$ ب: مشتق حاصل ضرب دو تابع $f'(x) = 3(2x)(x^2+1)^2(5x-1) + 5(x^2+1)^3$	
الف) $f'(x) = 8 \left(\frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x-1)}{(x^2+5)^2} \right) \left(\frac{-3x-1}{x^2+5} \right)^7$ ب) $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+3}}$	۹
الف) $f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+1)}{(\sqrt{x})^2}$ ب) $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)(x^2+5x)^5 + \left(\frac{1}{x}\right) \times 5(2x+5)(x^2+5x)^4$	۱۰
الف) $f'(x) = 5 \left(\frac{x^2}{3x-1} \right) \left(\frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2} \right)$ ب) $g'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \right) (x^3+1) + 3x^2(\sqrt{3x+2})$	۱۱
الف) $f'(x) = \frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$ ب) $g'(x) = (6x)(2x-5)^3 + (3)(2)(2x-5)^2(3x^2-4)$	۱۲
الف) $f'(x) = 5(x^2+2x+1)^4(2x+2)$ ب) $g'(x) = \frac{(1)(\sqrt{3x+2}) - \frac{3x}{2\sqrt{3x+2}}}{(\sqrt{3x+2})^2}$	۱۳

الف) $f'(x) = 5(2x+2)(x^2+2x-1)^4$	۱۴
ب) $g'(x) = (\frac{3}{2\sqrt{3x+2}})(x^3+1) + (\sqrt{3x+2})(3x^2)$	
$(3f+2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 9 + 10 = 19$	۱۵

درس ۲: مشتق پذیری و پیوستگی

الف: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است ولی مشتق راست و چپ در این نقطه برابر نمی باشند. لذا در $x=0$ تابع مشتق پذیر نیست و این نقطه، یک نقطه‌ی گوشه ای است. ب: $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$ ج: 	۱
$f(x) = \begin{cases} x^2+x & x \geq 1 \\ 3x-1 & x < 1 \end{cases}$ حد راست $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = (1)^2 + (1) = 2$ حد چپ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3(1) - 1 = 2$ و چون $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ پس تابع در این نقطه پیوسته است. مشتق راست $f'_+(x) = 2x+1 \rightarrow f'_+(1) = 2(1)+1 = 3$ مشتق چپ $f'_-(x) = 3 \rightarrow f'_-(1) = 3$	۲

	پس $f'_+(1) = f'_-(1)$ لذا تابع در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق پذیر است.
۳	$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x - \cdot}{x - \cdot} = 1$ و $f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{x^2 - \cdot}{x - \cdot} = \cdot$ و چون $f'_+(\cdot) \neq f'_-(\cdot)$ نتیجه می شود که $f'(\cdot)$ وجود ندارد.
۴	نادرست
۵	مماس قائم
۶	تابع در نقطه‌ی $x = -2$ پیوسته است. $f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{ x^2 - 4 - \cdot}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x^2 - 4)}{x + 2} =$ $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = 4$ $f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{ x^2 - 4 - \cdot}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = -4$ و چون $f'_+(-2) \neq f'_-(-2)$ لذا $f'(-2)$ موجود نیست.
۷	الف : درست . زیرا $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \cdot} f'(x) = +\infty$ ب : نادرست. پیوستگی تنها شرط مشتق پذیری نیست.
۸	نشان می دهیم که یا مشتقات راست و چپ نابرابرند و یا اینکه تابع ناپیوسته است. $f(\cdot) = (\cdot)^2 = \cdot$ مشتق راست $f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x}{x} = 1$ مشتق چپ $f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} x = \cdot$

حال چون $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ تابع در $x=0$ مشتق پذیر نیست.	
حد راست $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 3) = 1 + 3 = 4$ حد چپ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2(1) = 2$ لذا تابع در $x=1$ دارای حد نیست و در نتیجه در این نقطه پیوسته نبوده و مشتق پذیر نیست.	۹
پیوسته	۱۰
الف : تابع f در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته نیست. بنابراین $f'(0)$ موجود نیست. ب : $f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$ پ : 	۱۱
۴۰	۱۲
$\left. \begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0 \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0) \text{ موجود نیست.}$	۱۳

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x - 1} = -1$ $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{x - 1} = 0$ و چون $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ لذا $f'(1)$ موجود نیست.	۱۴
$f(0) = 0$ $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$ $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ و چون $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ پس $f'(0)$ موجود نیست.	۱۵
$\begin{cases} f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x^2 + 3) - 4}{x - (-1)} = -2 \\ f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(2x + 6) - 4}{x - (-1)} = 2 \end{cases} \rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$ لذا $f'(-1)$ موجود نیست.	۱۶

درس ۳: آهنگ تغییر

$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = 130 - (\sqrt{3} + 54) = 76 - \sqrt{3}$	۱
آهنگ متوسط $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{28 - 0}{4} = 7$ $f'(t) = 4t - 1$ $4t - 1 = 7 \rightarrow t = 2$	۲
آهنگ متوسط $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = 130 - (\sqrt{3} + 54) = 76 - \sqrt{3}$	۳

$x(t) = \sqrt{t} + 2t^3 \rightarrow x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2$ $\rightarrow x'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 6(3)^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 54$	
$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{1}{5}$	۴
$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{15 - 50}{25} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} = 1/4$	۵
الف) $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m(4) - m(1)}{4 - 1} = \frac{130 - 3}{3} = \frac{127}{3}$ ب) $m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \xrightarrow{t=4} m'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + 6(4)^2 = \frac{1}{4} + 96 = \frac{385}{4}$	۶
$f(5) = (5)^2 - (5) + 10 = 25 - 5 + 10 = 30$ $f(0) = (0)^2 - (0) + 10 = 10$ سرعت متوسط $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4$ سرعت لحظه ای $f'(t) = 2t - 1$ $f'(t) = 4 \rightarrow 2t - 1 = 4 \rightarrow t = \frac{5}{2}$	۷
$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2$ $\rightarrow m'(1) = \frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}$ آهنگ رشد توده‌ی باکتری	۸
$d'(t) = -1 \cdot t + 20 \rightarrow d'(2) = -1 \cdot (2) + 20 = 18$	۹
$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4 \\ f'(t) = 2t - 1 \end{array} \right\} \rightarrow 2t - 1 = 4 \rightarrow t = \frac{5}{2}$	۱۰

الف) $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - 75}{8 - 5} = -25$	۱۱
ب) $h'(t) = -10t + 40 \xrightarrow{h'(t)=35} -10t + 40 = 35 \rightarrow t = 0.5$	
آهنگ متوسط تغییر $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5}$	۱۲
آهنگ لحظه ای $f'(x) = 7\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \rightarrow f'(49) = 7\left(\frac{1}{2\sqrt{49}}\right) = \frac{1}{2}$	
سرعت متوسط $\frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4$	۱۳
سرعت لحظه ای $f'(t) = 2t - 1 = 4 \rightarrow t = \frac{5}{2}$	

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

پاسخ سؤالات موضوعی نهایی

فصل پنجم ریاضی ۳ پایه دوازدهم علوم تجربی

فصل ۵: کاربرد مشتق

درس ۱: اکسترمم های تابع

الف :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \rightarrow f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} 6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 6} x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1, x = -2$$

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$
			max		min		

ب :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \rightarrow f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} 6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 6} x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \in [-1, 3], x = -2 \notin [-1, 3]$$

$$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) = 2 + 3 - 12 = -7$$

$$f(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 12(-1) = -2 + 3 + 12 = 13$$

$$f(3) = 2(3)^3 + 3(3)^2 - 12(3) = 54 + 27 - 36 = 45$$

$$\rightarrow \begin{cases} \min : (1, -7) \\ \max : (3, 45) \end{cases}$$

نقطه‌ی بحرانی $(1, -7)$

$f(x) = ax^2 + bx \xrightarrow{f(1)=7} a + b = 7$ $f'(x) = 2ax + b \xrightarrow{f'(1)=0} 2a + b = 0$ $\rightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \rightarrow a = -7, \quad b = 14$	۲															
$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \rightarrow f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} 6x^2 + 6x - 12 = 0$ $\xrightarrow{\div 6} x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \in [-1, 3], \quad x = -2 \notin [-1, 3]$ $f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) = 2 + 3 - 12 = -7$ $f(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 12(-1) = -2 + 3 + 12 = 13$ $f(3) = 2(3)^3 + 3(3)^2 - 12(3) = 54 + 27 - 36 = 45$ نقطه‌ی $(1, -7)$ می نیمم مطلق و نقطه‌ی $(3, 45)$ ماکزیمم مطلق است.	۳															
الف : $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13 \rightarrow f'(x) = -6x^2 + 18x \xrightarrow{f'(x)=0} -6x^2 + 18x = 0$ $\xrightarrow{\div 6} -x^2 + 3x = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = 3$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td><td>$+$</td><td>$-$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>-13 min</td><td>24 max</td><td>$+\infty$</td></tr></table> ب : $f(-1) = -2(-1)^3 + 9(-1)^2 - 13 = -2$ $f(0) = -2(0)^3 + 9(0)^2 - 13 = -13$ $f(2) = -2(2)^3 + 9(2)^2 - 13 = 7$ $\rightarrow \begin{cases} \min : (0, -13) \\ \max : (2, 7) \end{cases}$	x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	y'		$-$	$+$	$-$	y	$+\infty$	-13 min	24 max	$+\infty$	۴
x	$-\infty$	0	3	$+\infty$												
y'		$-$	$+$	$-$												
y	$+\infty$	-13 min	24 max	$+\infty$												

$f(x) = x^3 - 3x + 4 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 3 = 0$ $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$ <table> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-1</td> <td></td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td></td> <td>+</td> <td>o</td> <td>-</td> <td>o</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>$-\infty$</td> <td>$\nearrow$</td> <td>6 max</td> <td>$\searrow$</td> <td>2 min</td> <td>$\nearrow$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> نقطه‌ی $(1, 2)$ مینیمم نسبی و نقطه‌ی $(-1, 6)$ ماکزیمم نسبی است.	x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	y'		+	o	-	o	+	y	$-\infty$	$\nearrow$	6 max	$\searrow$	2 min	$\nearrow$	$+\infty$	۵
x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$																	
y'		+	o	-	o	+																
y	$-\infty$	$\nearrow$	6 max	$\searrow$	2 min	$\nearrow$	$+\infty$															
$g(x) = x^3 + 2x - 5 \rightarrow g'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$ $g(-2) = (-2)^3 + 2(-2) - 5 = -8 - 4 - 5 = -17 \text{ min}$ $g(1) = (1)^3 + 2(1) - 5 = 1 + 2 - 5 = -2 \text{ max}$	۶																					
$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 + 6x - 9 = 0 \rightarrow x = 1, \quad x = -3$ <table> <tr> <td>x</td> <td></td> <td>-3</td> <td></td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>f'</td> <td></td> <td>+</td> <td>o</td> <td>-</td> <td>o</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>f</td> <td></td> <td>$\nearrow$</td> <td>17 max</td> <td>$\searrow$</td> <td>-15 min</td> <td>$\nearrow$</td> </tr> </table>	x		-3		1		f'		+	o	-	o	+	f		$\nearrow$	17 max	$\searrow$	-15 min	$\nearrow$	۷	
x		-3		1																		
f'		+	o	-	o	+																
f		$\nearrow$	17 max	$\searrow$	-15 min	$\nearrow$																

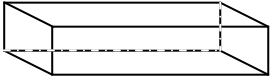
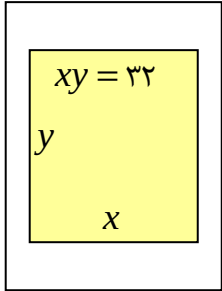
$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 \xrightarrow{f'(x)=0} -6x^2 + 6x + 12 = 0$ $\xrightarrow{\div(-6)} x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1, \quad x = 2$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td></td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>-9</td><td></td><td>11</td><td>$-\infty$</td></tr></table> $\min$ $\max$ $f(0) = -2(0)^3 + 3(0)^2 + 12(0) - 9 = -9$ می نیمم مطلق $f(2) = -2(2)^3 + 3(2)^2 + 12(2) - 9 = 11$ ماکزیمم مطلق $f(3) = -2(3)^3 + 3(3)^2 + 12(3) - 9 = 0$	x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$	$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$f(x)$	$+\infty$	-9		11	$-\infty$	۸
x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$														
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$														
$f(x)$	$+\infty$	-9		11	$-\infty$														
$f(x) = x^3 + bx^2 + d \xrightarrow{f(2)=1} 8 + 4b + d = 1 \rightarrow 4b + d = -7$ $f'(x) = 3x^2 + 2bx \xrightarrow{f'(2)=0} 12 + 4b = 0 \rightarrow b = -3$ $4b + d = -7 \xrightarrow{b=-3} -12 + d = -7 \rightarrow d = 5$	۹																		
الف : هر نقطه از دامنه‌ی تابع را یک نقطه‌ی بحرانی می نامند هرگاه در این نقطه یا تابع مشتق پذیر نباشد و یا اینکه مشتق آن صفر باشد. ب : $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ $\xrightarrow{f(2)=1} f(2) = (2)^3 + b(2)^2 + d \rightarrow 8 + 4b + d = 1 \rightarrow 4b + d = -7$ $f'(x) = 3x^2 + 2bx$ $\xrightarrow{f'(2)=0} f'(2) = 3(2)^2 + 2b(2) \rightarrow 12 + 4b = 0 \rightarrow 4b = -12 \rightarrow b = -3$ $\xrightarrow{4b+d=-7} 4(-3) + d = -7 \rightarrow d = 5$	۱۰																		

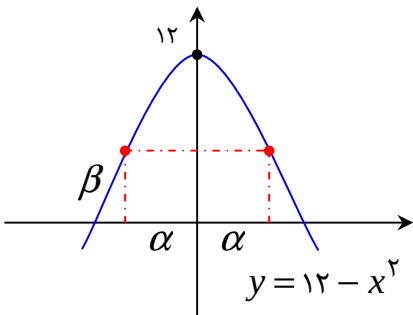
$f'(x) = 3x^2 + 2 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 + 2 = 0 \rightarrow 3x^2 = -2$ معادله جواب ندارد.	۱۱															
$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2) - 5 = -8 - 4 - 5 = -17$ مقدار می نیمم مطلق																
$f(1) = (1)^3 + 2(1) - 5 = 1 + 2 - 5 = -2$ مقدار ماکزیمم مطلق																
درست	۱۲															
$f'(x) = 3x^2 - 3 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$																
$x = 1 \rightarrow f(1) = (1)^3 - 3(1) + 7 = 5$	۱۳															
$x = -1 \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 7 = 9$																
$x = 3 \rightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3) + 7 = 25$																
$\Rightarrow \max(3, 25) \quad , \quad \min(1, 5)$																
$f(x) = ax^2 + bx \rightarrow f'(x) = 2ax + b$																
$f(1) = 3 \xrightarrow{f(x)=ax^2+bx} f(1) = a(1)^2 + b(1) = a + b = 3$	۱۴															
$f'(1) = 0 \xrightarrow{f'(x)=2ax+b} f'(1) = 2a + b = 0$																
$\rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = -3 \end{cases} \rightarrow a = 3 \quad , \quad b = -6$																
$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$																
$\xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 + 6x - 9 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 1 \quad , \quad x = -3$																
<table><tr><td>x</td><td>$+\infty$</td><td>-3</td><td>1</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$\nearrow$ 17 $\max$</td><td>$\searrow$ 15 $\min$</td><td>$\nearrow$</td></tr></table>	x	$+\infty$	-3	1	$-\infty$	$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$f(x)$		$\nearrow$ 17 $\max$	$\searrow$ 15 $\min$	$\nearrow$	۱۵
x	$+\infty$	-3	1	$-\infty$												
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0												
$f(x)$		$\nearrow$ 17 $\max$	$\searrow$ 15 $\min$	$\nearrow$												
درست	۱۶															
$(-1, 1)$ یا $[-1, 1]$	۱۷															

$f(x) = x^3 + bx^2 + d \rightarrow f(2) = (2)^3 + b(2)^2 + d \xrightarrow{f(2)=1} 8 + 4b + d = 1$ $\rightarrow 4b + d = -7$ $f'(x) = 3x^2 + 2bx \xrightarrow{f'(2)=0} f'(2) = 3(2)^2 + 2b(2) = 0$ $\rightarrow 12 + 4b = 0 \rightarrow b = -3$ $4b + d = -7 \xrightarrow{b=-3} -12 + d = -7 \rightarrow d = 5$	۱۸									
$f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow x = \pm 1$ <table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>$+1$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>$-$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>$\searrow$</td></tr></table> تابع در بازه های $(-\infty, 1)$ و $(1, +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $(-1, 1)$ اکیداً نزولی است.	x	-1	$+1$	$f'(x)$	$+$	$-$	$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	۱۹
x	-1	$+1$								
$f'(x)$	$+$	$-$								
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$								
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} 6x^2 + 6x - 12 = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$ $\rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} f(-1) = 13 \\ f(1) = -7 \\ f(3) = 45 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \min = (1, -7) \\ \max = (3, 45) \end{cases}$	۲۰									
$f'(x) = 3x^2 + 2bx \xrightarrow{f'(2)=0} 3(2)^2 + 2b(2) = 0 \rightarrow b = -3$ $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ $f(2) = 1 \rightarrow 4b + d = -7 \xrightarrow{b=-3} d = 5$	۲۱									

درس ۲: بهینه سازی

$2x + 2y = 24 \xrightarrow{\div 2} x + y = 12 \rightarrow y = 12 - x$ $S = xy \rightarrow S(x) = x(12 - x) = 12x - x^2$ $S'(x) = 12 - 2x \xrightarrow{S'(x)=0} 12 - 2x = 0 \rightarrow x = 6, y = 6$	x  y	۱
--	---	---

$V(x) = (1 - 2x)^2 x = x - 4x^2 - 4x^3$  $V'(x) = 1 - 8x + 12x^2 \xrightarrow{V'(x)=0} 1 - 8x + 12x^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{6}$ پاسخ $x = \frac{1}{6}$ قابل قبول است.	۲
$P = xy \rightarrow P(x) = x(10x - 5) = 10x^2 - 5x$ $\rightarrow P'(x) = 20x - 5 \xrightarrow{P'(x)=0} 20x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$ $y = 10x - 5 \xrightarrow{x=\frac{1}{4}} y = 10\left(\frac{1}{4}\right) - 5 = -\frac{5}{2}$	۳
$2a + b = 60 \rightarrow b = 60 - 2a$ $p = ab = a(60 - 2a) = 60a - 2a^2$ $p' = 60 - 4a \xrightarrow{p'=0} 60 - 4a = 0 \rightarrow a = 15$ $b = 60 - 2a = 60 - 2(15) = 30$	۴
$P = xy \xrightarrow{y=x+10} P = x(x+10) = x^2 + 10x \rightarrow f'(x) = 2x + 10$ $\xrightarrow{f'(x)=0} 2x + 10 = 0 \rightarrow x = -5 \xrightarrow{y=x+10} y = -5 + 10 = 5$	۵
مساحت صفحه‌ی کتاب $S = (x+2)(y+4)$ $\rightarrow S = xy + 4x + 2y + 8 \xrightarrow{y=\frac{32}{x}} S = x\left(\frac{32}{x}\right) + 4x + 2\left(\frac{32}{x}\right) + 8 = \frac{64}{x} + 4x + 4$ $\rightarrow S' = -\frac{64}{x^2} + 4 \xrightarrow{S'=0} \frac{16}{x^2} = 1 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4$ $\rightarrow x = 4, \quad y = \frac{32}{x} = 8$ ابعاد صفحه‌ی کتاب 12×6 	۶

$P = 2x + 2y = 14 \xrightarrow{\div 2} x + y = 7 \rightarrow y = 7 - x$ $S = xy \xrightarrow{y=7-x} S = x(7-x) \rightarrow S = 7x - x^2$ $f'(x) = 7 - 2x \xrightarrow{f'(x)=0} 7 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$ $y = 7 - x \xrightarrow{x=\frac{7}{2}} y = 7 - \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$	۷
$y = 0 \rightarrow 12 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$ $S = 2\alpha \times \beta \xrightarrow{\beta=12-\alpha^2} S = 2\alpha(12 - \alpha^2) = -2\alpha^3 + 24\alpha, \quad \alpha \in (0, 2\sqrt{3})$  $S' = -6\alpha^2 + 24 \xrightarrow{S'=0} -6\alpha^2 + 24 = 0 \rightarrow -6\alpha^2 = -24 \rightarrow \alpha^2 = 4$ $\rightarrow \alpha = \pm 2$ که چون $(0, 2\sqrt{3})$، $-2 \notin$ پس تنها $\alpha = 2$ قابل قبول است. لذا : طول مستطیل $2\alpha = 4$ عرض مستطیل $\beta = 12 - \alpha^2 = 12 - 4 = 8$	۸
$y - x = 20 \rightarrow y = x + 20$ $P = xy \rightarrow P = x(x + 20) = x^2 + 20x$ $\rightarrow P' = 2x + 20 \xrightarrow{P'=0} 2x + 20 = 0 \rightarrow x = -10 \xrightarrow{y=x+20} y = -10 + 20 = 10$	۹
$f(x) = xy \rightarrow f(x) = x(7 - x) = -x^2 + 7x \rightarrow f'(x) = -2x + 7$	۱۰

$\frac{f'(x)=0}{\rightarrow -2x + 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{2}}$ $y = 7 - x = 7 - \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$	
$x + y = 7 \rightarrow y = 7 - x$ $\rightarrow s = x \times y \rightarrow s(x) = x(7 - x) = 7x - x^2$ $s'(x) = 7 - 2x \xrightarrow{s'=0} 7 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{7}{2} \xrightarrow{x+y=7} y = \frac{7}{2}$	۱۱
$P = xy \xrightarrow{y=10+x} P = x(10 + x) \rightarrow P = 10x + x^2$ $P'(x) = 10 + 2x \xrightarrow{P'(x)=0} 10 + 2x = 0 \rightarrow x = -5$ $y = 10 + x = 10 + (-5) = 5$	۱۲

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

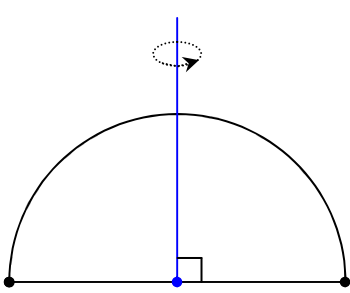
@amerimath

پاسخ سؤالات موضوعی نهایی

فصل ششم ریاضی ۳ پایه دوازدهم علوم تجربی

فصل ۶: هندسه

درس ۱: تفکر تجسمی

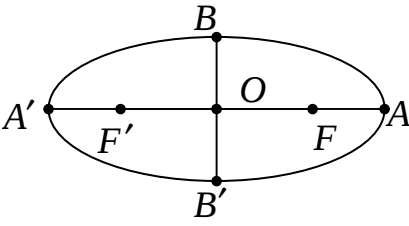
۱	نادرست
۲	نادرست
۳	استوانه
۴	سطح مقطع
۵	جسم حاصل نیم کره خواهد بود. 
۶	دایره
۷	بیضی

بیضی

۱	$2a = 8 \rightarrow a = 4$, $2b = 6 \rightarrow b = 3$ $c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = \sqrt{7} \rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$
۲	کوچکتر

قطر بزرگ $AA' = 8 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4$ قطر کوچک $BB' = 6 \rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3$ $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 16 = 9 + c^2 \rightarrow c^2 = 7 \rightarrow c = \sqrt{7}$ $FF' = 2c = 2\sqrt{7}$	۳
مرکز بیضی وسط دو کانون است. پس $O(\frac{1+1}{2}, \frac{3+(-5)}{2}) \rightarrow O(1, -1)$ $FF' = \sqrt{(1-1)^2 + (3-(-5))^2} = \sqrt{0+64} = 8 \rightarrow 2c = 8 \rightarrow c = 4$ $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=6, c=4} 36 = b^2 + 16 \rightarrow b^2 = 20 \rightarrow b = 2\sqrt{5}$ اندازه‌ی قطر کوچک $BB' = 2b = 4\sqrt{5}$	۴
$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 25 = 9 + c^2 \rightarrow c^2 = 25 - 9 \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$ فاصله‌ی کانونی $FF' = 2c = 8$	۵
مرکز بیضی $O \left \begin{array}{l} \alpha = \frac{1+1}{2} = 1 \\ \beta = \frac{3-5}{2} = -1 \end{array} \right.$ فاصله‌ی کانونی $FF' = 3 - (-5) = 8 \rightarrow 2c = 8 \rightarrow c = 4$ $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=6, c=4} 36 = b^2 + 16 \rightarrow b^2 = 36 - 16 = 20 \rightarrow b = 2\sqrt{5}$ طول قطر کوچک $BB' = 2b = 2(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$ خروج از مرکز بیضی $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	۶

مرکز بیضی وسط کانون ها است. $O \begin{cases} \alpha = \frac{1+1}{2} = 1 \\ \beta = \frac{-5+3}{2} = -1 \end{cases} \rightarrow O(1, -1) \text{ مختصات مرکز بیضی}$ فاصله‌ی کانونی $FF' = 3 - (-5) = 8 \rightarrow 2c = 8 \rightarrow c = 4$ و معادله‌ی قطر بزرگ $x = 1$ $b^2 + c^2 = a^2$ $b^2 + c^2 = a^2 \rightarrow b^2 + 16 = 36 \rightarrow b^2 = 20 \rightarrow b = 2\sqrt{5}$ طول قطر کوچک $BB' = 2b = 4\sqrt{5}$ خروج از مرکز بیضی $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	۷
طول قطر بزرگ بیضی $AA' = 2a = 12 \rightarrow a = 6$ فاصله‌ی کانونی $FF' = y_2 - y_1 = -5 - 3 = 8 \rightarrow 2c = 8 \rightarrow c = 4$ $\begin{cases} \alpha = \frac{1+1}{2} = 1 \\ \beta = \frac{-5+3}{2} = -1 \end{cases} \rightarrow O(1, -1) \text{ مختصات مرکز بیضی (وسط کانون ها)}$ خروج از مرکز بیضی $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	۸

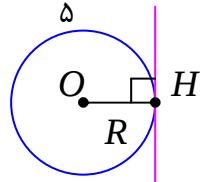
$AA' = 2a \rightarrow 2a = 6 \rightarrow a = 3$ $BB' = 2b \rightarrow 2b = 4 \rightarrow b = 2$ $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 9 = 4 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{5}$ $FF' = 2c = 2\sqrt{5} \quad \text{فاصله ی کانونی}$ چون بیضی افقی است. لذا مختصات دو سطر قطر بزرگ آن به شکل زیر خواهد شد: $O(4, 5) \rightarrow \alpha = 4, \quad \beta = 5$ $A \begin{vmatrix} \alpha + a \\ \beta \end{vmatrix} \rightarrow A \begin{vmatrix} 4 + 3 \\ 5 \end{vmatrix} \rightarrow A \begin{vmatrix} 7 \\ 5 \end{vmatrix}$ $A' \begin{vmatrix} \alpha - a \\ \beta \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} 4 - 3 \\ 5 \end{vmatrix} \rightarrow A' \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \end{vmatrix}$ 	۹
دایره	۱۰
مرکز بیضی وسط کانون های آن است. پس : $O \begin{vmatrix} \alpha = \frac{2+2}{2} = 2 \\ \beta = \frac{-3+5}{2} = 1 \end{vmatrix} \rightarrow O(2, 1)$ $FF' = 5 - (-3) = 8 \xrightarrow{FF' = 2c} 2c = 8 \rightarrow c = 4$ $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow (5)^2 = b^2 + (4)^2 \rightarrow b^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow BB' = 2b = 6$	۱۱

الف) $e = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \rightarrow c = \frac{4}{5}a$ طول قطر کوچک $2b = 6 \rightarrow b = 3$ $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 9 + \frac{16}{25}a^2 \rightarrow a = 5$ طول قطر بزرگ $2a = 10$ $c = \frac{4}{5}a \xrightarrow{a=5} c = 4$ فاصله ی کانونی $2a = 8$ ب) $A(1, -1)$ و $A'(-9, -1)$	۱۲
درست	۱۳
الف : مرکز بیضی $O \left \begin{array}{l} \alpha = \frac{1+1}{2} = 1 \\ \beta = \frac{3+(-5)}{2} = -1 \end{array} \right.$ ب : $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 36 = b^2 + 16 \rightarrow b^2 = 36 - 16 = 20$ $\rightarrow b = 2\sqrt{5} \rightarrow BB' = 2b = 4\sqrt{5}$	۱۴
$2a = 6 \rightarrow a = 3$ $2b = 4 \rightarrow b = 2$ الف) $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 9 = 4 + c^2 \rightarrow c^2 = 5 \rightarrow c = \sqrt{5}$ ب) $\begin{cases} A(4+3, 5) \rightarrow A(7, 5) \\ A'(4-3, 5) \rightarrow A'(1, 5) \end{cases}$	۱۵

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \rightarrow a = \frac{5}{4}c$ $BB' = 2b = 6 \rightarrow b = 3$ $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \frac{25}{16}c^2 = 9 + c^2 \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$ $FF' = 2c = 2 \times 4 = 8$ $a = \frac{5}{4}c \xrightarrow{c=4} a = 5$ $A \begin{cases} \alpha - a = -4 - 5 = -9 \\ \beta = -1 \end{cases} \quad , \quad A' \begin{cases} \alpha + a = -4 + 5 = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$	۱۶
--	----

درس ۲: دایره

روش مربع کامل کردن $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + y^2 + 2y = -6$ $\rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) = -6 + 9 + 1$ $\rightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ مرکز دایره $O(3, -1)$ شعاع دایره $R = \sqrt{4} = 2$ روش فرمول $a = -6, \quad b = 2, \quad c = 6$ $\text{مرکز } O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \rightarrow O\left(-\frac{-6}{2}, -\frac{2}{2}\right) \rightarrow O(3, -1)$ $\text{شعاع } R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (2)^2 - 4(6)} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4 - 24} = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$	۱
$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} O_1(-1, 2) \\ R_1 = 1 \end{cases}$	۲

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} O_1(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \rightarrow O_1(1, -2) \\ R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 4} = 2 \end{cases}$ $d = O_1 O_2 = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 + 2)^2} = \sqrt{20}$ و چون $d > R_1 + R_2$ لذا دو دایره متخارج هستند.	
$x^2 + (y - 5)^2 = 5 \rightarrow \begin{cases} O_1(0, 5) \\ R_1 = \sqrt{5} \end{cases} \quad \text{و} \quad (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 7 \rightarrow \begin{cases} O_2(2, -3) \\ R_2 = \sqrt{7} \end{cases}$ $d = O_1 O_2 = \sqrt{(0 - 2)^2 + (5 + 3)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ $R_1 + R_2 = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ و چون $d > R_1 + R_2$ لذا دو دایره متخارج هستند.	۳
$O(1, 0)$ و $R = 2$ $d = \frac{ 1(1) + 1(0) - 3 }{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow d < R$ لذا خط دایره را در دو نقطه قطع می کند.	۴
شعاع دایره $r = 2$ مرکز دایره $O(2 - 3)$ فاصله ی مرکز دایره تا خط $d = \frac{ -3 + 1 }{\sqrt{0 + 1}} = 2$ حال چون $d = r = 2$ لذا خط بر دایره مماس است.	۵
شعاع دایره $R = \frac{ a\alpha + b\beta + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ 3(1) + 4(2) + (-1) }{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{ 3 + 8 - 1 }{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$  $ax + by + c = 0$ معادله ی دایره $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$	۶

$x^2 + y^2 = 2 \rightarrow O(0,0), R = \sqrt{2}$ $y = -x - 2 \rightarrow x + y + 2 = 0$ $d = OH = \frac{ a\alpha + b\beta + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ (1)(0) + (1)(0) + 2 }{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ $d = R = \sqrt{2} \rightarrow$ خط بر دایره مماس است.	۷
$3x + 4y - 1 = 0$ $R = \frac{ a\alpha + b\beta + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ (3)(1) + (4)(2) + (-1) }{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{ 3 + 8 - 1 }{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$	۸
الف) $O(-1,0), R = 2$ ب) $(x+1)^2 + y^2 = 4 \xrightarrow{y=0} (x+1)^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ x+1=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow (1,0) \\ x=-3 \rightarrow (-3,0) \end{cases}$	۹
۲	۱۰
$d = \frac{ ax + by + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ 3(2) - 4(-3) + 2 }{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{ 6 + 12 + 2 }{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$ $d^2 + 3^2 = R^2 \xrightarrow{d=4} R^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow R = 5$ معادله دایره $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$	۱۱
مرکز دایره $O(1,0)$ شعاع دایره $R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 0 + 12} = \sqrt{2}$ فاصله مرکز دایره تا خط داده شده $OH = \frac{ (1)(1) + (0)(1) - 3 }{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \sqrt{2}$ و چون $OH < R$ ، خط و دایره متقاطع اند.	۱۲

$R = \frac{ a\alpha + b\beta + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ (3)(0) + (-4)(3) - 3 }{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3$ اندازه‌ی شعاع $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 9$ معادله‌ی دایره	۱۳
---	----

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

پاسخ سؤالات موضوعی نهایی

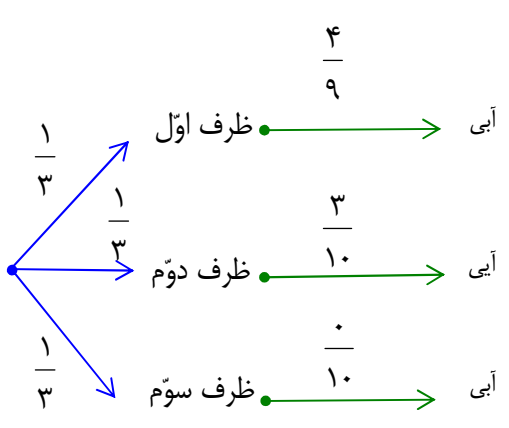
فصل هفتم ریاضی ۳ پایه دوازدهم علوم تجربی

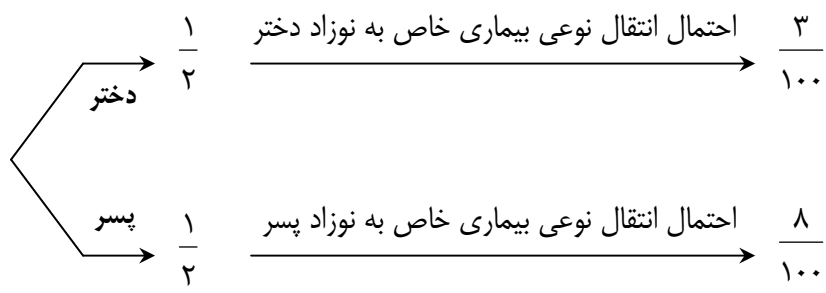
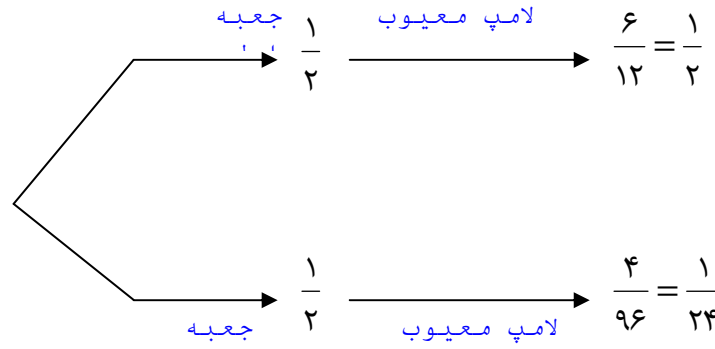
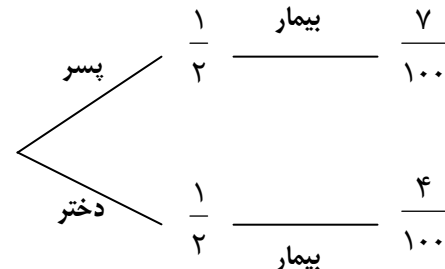
فصل ۷: احتمال

یادآوری مفاهیم

۱	ناسازگار
۲	نادرست
۳	درست. (طبق تعریف دو پیشامد ناسازگار)
۴	درست
۵	الف: مستقل ب: $P(A B)$

قانون احتمال کل

۱	$P(A) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times 3 = \frac{11}{16}$
۲	 $P(A) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{3} \times 0\right) = \frac{67}{270}$
۳	$P(A) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{0}{6}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + 0 = \frac{11}{24}$

$P(A) = \left(\frac{7}{12} \times \frac{7}{15}\right) + \left(\frac{5}{12} \times \frac{6}{15}\right) = \frac{79}{180}$	۴
$P(A) = \left(\frac{40}{100} \times \frac{3}{100}\right) + \left(\frac{60}{100} \times \frac{5}{100}\right) = \frac{12}{1000} + \frac{30}{1000} = \frac{42}{1000}$	۵
 $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{100} = \frac{11}{200}$	۶
 $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{13}{24} = \frac{13}{48}$	۷
رجوع به پاسخ ۶	
 $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{100} = \frac{11}{200}$	۹

$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{11}{24}$	۱۰
$P(A) = (\frac{1}{2} \times \frac{8}{100}) + (\frac{1}{2} \times \frac{3}{100}) = \frac{8}{200} + \frac{3}{200} = \frac{11}{200}$	۱۱
$P(A) = (\frac{6}{10})(\frac{6}{13}) + (\frac{4}{10})(\frac{5}{13}) = \frac{56}{130} = \frac{3}{65}$	۱۲
$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{14} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{57}{112}$	۱۳

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

بام نهایی

سؤالات موضوعی نهایی ریاضی ۳

پایه می دوازدهم رشته می علوم تجربی

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴

آخرین نسخه: شهریور ۱۴۰۴

(جلد دوم؛ خرداد ۱۴۰۱ به بعد)



تهیه کننده: جابر عامری



دبیر ریاضی دوره می دوم متوسطه استان خوزستان

فصل اول

((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۱)

توابع چندجمله‌ای

اگر n یک عدد صحیح نامنفی و $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. در این صورت تابع زیر را یک **تابع چندجمله‌ای** از درجه‌ی n می‌نامند.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

برای مثال توابع زیر توابع چندجمله‌ای هستند.

الف) تابع ثابت

$$f(x) = c$$

تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی صفر^۱

ب) تابع خطی

$$f(x) = ax + b$$

تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی یک

ج) تابع درجه‌ی ۲ (سه‌می)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی دو

د) تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی ۳

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی سه

توجه :

۱ : طبق تعریف، توابع کسری، رادیکالی، مثلثاتی، نمایی و لگاریتمی، تابع چندجمله‌ای محسوب نمی‌شوند.

۲ : دامنه‌ی هر تابع چندجمله‌ای مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. (مگر اینکه دامنه را محدود کرده باشیم).



۱. برای تابع $f(x) = 0$ درجه تعریف نمی‌شود.

توابع یکنوا

تابع $y = f(x)$ را روی دامنه‌اش صعودی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

تابع $y = f(x)$ را روی دامنه‌اش صعودی اکید (اکیداً صعودی) گویند، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع $y = f(x)$ را روی دامنه‌اش نزولی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

تابع $y = f(x)$ را روی دامنه‌اش نزولی اکید (اکیداً نزولی) گویند، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع $y = f(x)$ را روی دامنه‌اش ثابت گویند، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

توجه :

۱ : هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید را تابع اکیداً یکنوا می‌نامند.

۲ : اگر تابعی صعودی یا نزولی باشد، را یکنوا می‌نامند.

۳ : طبق تعریف تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است. پس یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نیست.

۴ : برای تعیین صعودی یا نزولی یا ثابت بودن تابع به کمک نمودار آن، نمودار را از چپ به راست نگاه کنید.

۵ : به طور مشابه، صعودی یا نزولی بودن تابع را می‌توان در یک فاصله مانند $I \subseteq D_f$ تعریف نمود.

۶ : اگر تابعی در یک بازه، اکیداً یکنوا باشد، در هر زیر بازه‌ای از آن نیز اکیداً یکنوا است.

۷ : هر تابع که در دامنه‌اش صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، تابعی یک به یک است. عکس این موضوع درست نمی‌باشد، برای

مثال تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ ، یک به یک است ولی اکیداً یکنوا نیست.

۸ : طبق تعریف توابع یکنوا، برای حالتی که تابع به صورت زوج مرتب یا نمودار آن به صورت نقاط غیر متصل، نمایش داده شده باشد. نیز قابل بررسی است.

تبدیل نمودار توابع

به کمک تبدیلات می‌توان نمودار یک تابع را به کمک نمودار تابعی ساده‌تر از آن رسم نمود. برای تابع $y = f(x)$ و با فرض مثبت بودن عدد k می‌توان تبدیلات را به شکل زیر خلاصه نمود.

تابع جدید	نحوه‌ی تبدیل	نتیجه
$y = f(x) + k$	به عرض نقاط k واحد اضافه می‌شود.	نمودار به اندازه‌ی k واحد بالا می‌رود.
$y = f(x) - k$	از عرض نقاط k واحد کم می‌شود.	نمودار به اندازه‌ی k واحد پایین می‌رود.
$y = kf(x)$	عرض نقاط در k ضرب می‌شود.	اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت عمودی منقبض می‌شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت عمودی منبسط می‌شود.
$y = f(x + k)$	از طول نقاط k واحد کم می‌شود.	نمودار به اندازه‌ی k واحد به عقب می‌رود.
$y = f(x - k)$	به طول نقاط k واحد اضافه می‌شود.	نمودار به اندازه‌ی k واحد به جلو می‌رود.
$y = f(kx)$	طول نقاط در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌شود.	اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت افقی منبسط می‌شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت افقی منقبض می‌شود.

توجه الف :

- اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.
- اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.
- اگر عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع $y = -f(x)$ به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x ها است.

توجه ب :

- اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.
- اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.
- اگر طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع $y = f(-x)$ به دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها است.

توجه پ : برای رسم نمودار تابعی نظیر $g(x) = 3f\left(\frac{5x+3}{4}\right) + 5$ به کمک نمودار تابع $f(x)$ می‌توان از **ترفند تغییر**

متغیر نیز استفاده کرد. این ترفند برای تعیین نقاط g به کمک نقاط متناظر آنها در f بکار می‌رود. بدین ترتیب که :

الف : عرض نقاط f را ابتدا سه برابر و سپس ۵ واحد اضافه می‌کنیم.

ب : عبارت $\frac{5x+3}{4}$ را برابر t قرار می دهیم و x را محاسبه می کنیم.

$$\frac{5x+3}{4} = t \rightarrow 5x+3 = 4t \rightarrow x = \frac{4t-3}{5}$$

یعنی طول نقاط f را ابتدا ۴ برابر کرده و سپس ۳ واحد کم می کنیم و در نهایت بر ۵ تقسیم می کنیم.
توجه ت : برای تعیین دامنه و برد تابع تبدیل یافته، می توانید قوانین تبدیلات را مطابق آنچه که گفته شد، بکار بگیرید.

تَهِیه کُننده : جابر عامری

دبیر عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل اول

((ریاضی ۳))

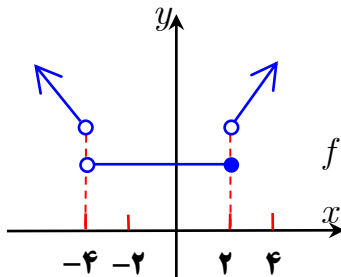


درس ۱: توابع چندجمله‌ای

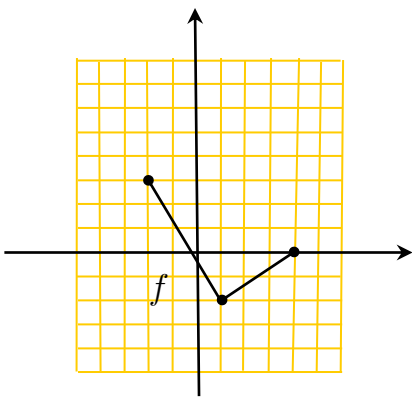
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = \sqrt{2}x - x^2$ یک تابع درجه‌ی دوم است.	۱
۵/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خارج از کشور) تابع $y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x$ یک تابع چندجمله‌ای است.	۲
۵/۵ نمره	دی ۱۴۰۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی سوم است. ب) نمودار تابع $y = x^2$ در بازه‌ی $(0, 1)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^3$ است.	۳
۵/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. تابع $y = \sqrt{3}x^3 - \pi x + 1$ ، یک تابع چندجمله‌ای است.	۴

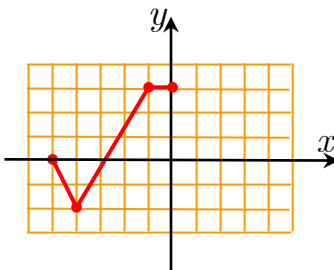
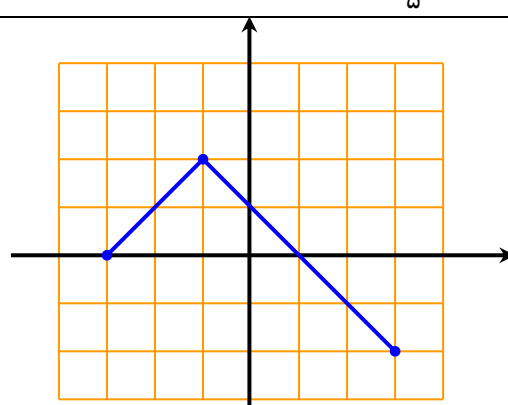
توابع یکنوا

۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = x^3$ ، تابع اکیداً صعودی است.	۱
۵/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	نمودار تابع $y = x + x $ را رسم کنید و مشخص کنید، در چه بازه‌هایی تابع صعودی یا نزولی یا ثابت است. (خارج از کشور)	۲
۵/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر تابع یکنوا، یک به یک است.	۳
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است.	۴
۵/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = \frac{1}{x}$ ، در دامنه‌اش یکنواست.	۵
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۳	جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.	۶

		تابع $g(x) = x^2 - 4x + 5$ ، در بازه‌ی $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است.											
۵/۲۵ نمره	مرداد ۱۴۰۳	جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. تابع هم صعودی و هم نزولی است.	۷										
۵/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۴	با توجه به نمودار تابع f، در جدول زیر برای هر یک از قسمت‌های ستون A، قسمت صحیح از ستون B را انتخاب کنید. (یکی از قسمت‌های ستون B اضافه است.)  <table data-bbox="478 754 1216 1019"><tr><th>B</th><th>A</th></tr><tr><td>(۱) $(-\infty, -4)$</td><td>الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است.</td></tr><tr><td>(۲) $(2, +\infty)$</td><td>ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.</td></tr><tr><td>(۳) $(-1, +\infty)$</td><td>پ) تابع در این بازه ثابت است.</td></tr><tr><td>(۴) $(-4, 2)$</td><td></td></tr></table>	B	A	(۱) $(-\infty, -4)$	الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است.	(۲) $(2, +\infty)$	ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.	(۳) $(-1, +\infty)$	پ) تابع در این بازه ثابت است.	(۴) $(-4, 2)$		۸
B	A												
(۱) $(-\infty, -4)$	الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است.												
(۲) $(2, +\infty)$	ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.												
(۳) $(-1, +\infty)$	پ) تابع در این بازه ثابت است.												
(۴) $(-4, 2)$													
۵/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = 7$ در دامنه‌اش هم صعودی و هم نزولی است.	۹										

تبدیل نمودار توابع

۵/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	برد تابع f بازه $(-3, 1]$ است. برد تابع $y = -2f(3x - 1) + 3$ ، کدام یک از موارد زیر است؟ الف) $(-8, 0]$ ب) $(-12, 0]$ پ) $[1, 9]$ ت) $[-10, 2]$	۱
۲ نمره	شهریور ۱۴۰۱	نمودار تابع f به صورت روبرو است. الف) نمودار تابع $g(x) = 2f(x - 1)$ را رسم کنید. ب) دامنه‌ی تابع g را به دست آورید. 	۲
۵/۷۵ نمره	دی ۱۴۰۱	اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $(-1, 3]$ و برد آن $(0, 2]$ باشد. دامنه و برد تابع $y = f(\frac{x}{2})$ را بیابید.	۳
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. نقطه‌ی $(-2, 4)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ می‌باشد. مختصات نقطه‌ی متناظر آن روی نمودار	۴

		تابع $y = f(2x)$ به شکل است.	
۵	شهریور ۱۴۰۲	نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم. ضابطه‌ی تابع جدید را بنویسید.	۵/۵ نمره
۶	دی ۱۴۰۲	نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنه و برد تابع $g(x) = 2f(-x)$ را بنویسید.	۱ نمره
			
۷	دی ۱۴۰۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. نمودار تابع $y = f(\frac{x}{3})$ ، از انقباض افقی نمودار تابع $y = f(x)$ به دست می‌آید.	۵/۲۵ نمره
۸	خرداد ۱۴۰۳	به کمک انتقال نمودار تابع $y = x^3$ ، نمودار تابع $y = (x-2)^3 + 1$ را رسم کنید.	۵/۵ نمره
۹	مرداد ۱۴۰۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = f(x)$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ مفروض است. در این صورت برد تابع‌های $y = f(3x)$ و $y = f(5x)$ یکسان است.	۵/۲۵ نمره
۱۰	مرداد ۱۴۰۳	نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 2$ را رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص کنید.	۵/۷۵ نمره
۱۱	دی ۱۴۰۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دامنه‌ی تابع‌های $y = -2f(x) + 4$ و $y = \frac{1}{5}f(x)$ با یکدیگر برابر است.	۵/۲۵ نمره
۱۲	دی ۱۴۰۳	نمودار تابع f به صورت زیر است. نمودار تابع $y = -f(3x) + 1$ را رسم کنید.	۵/۷۵ نمره
			
۱۳	خرداد ۱۴۰۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. نمودار تابع $y = 3f(x)$ با انبساط نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور y ها به دست می‌آید.	۵/۲۵ نمره
۱۴	شهریور ۱۴۰۴	نقطه‌ی $A(-3, 2)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد. مختصات نقطه‌ی متناظر آن روی نمودار $y = f(3x) + 1$ را بیابید.	۵/۵ نمره

فصل اوّل

((ریاضی ۳))

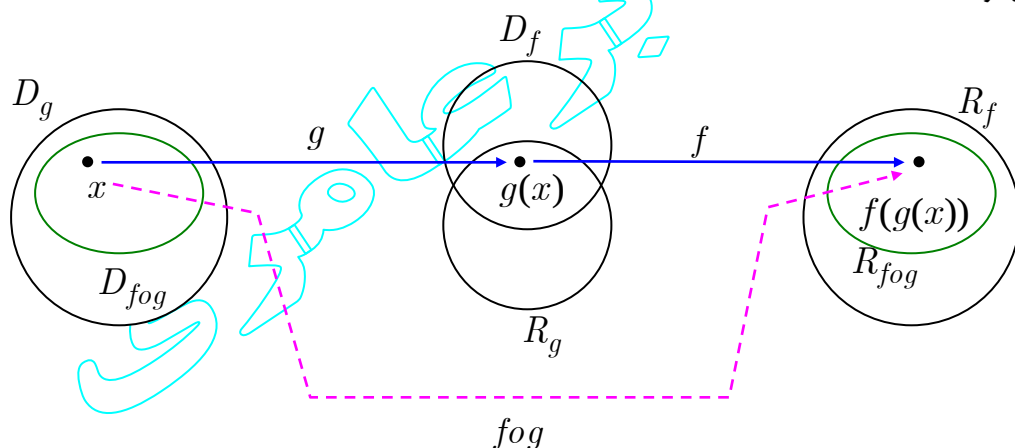
مرور نامه درس (۲)

ترکیب توابع

هرگاه g و f دو تابع باشند، ترکیب تابع g در f که به صورت $f \circ g$ نمایش داده می شود را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

به نمودار زیر توجه کنید.



دامنه ی تابع مرکب $f \circ g$ با توجه به نمودار فوق به شکل زیر مشخص می شود.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

توجه: ترکیب دو تابع در حالت کلی، خاصیت جابجایی ندارد.

یعنی بجز در موارد خاص $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره ی دوم متوسطه، استان خوزستان

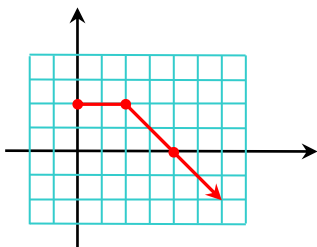
فصل اول

((ریاضی ۳))



درس ۲: ترکیب توابع

۵/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	۱ اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟ $\text{خروجی} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow 2x-2 \rightarrow x \text{ ورودی}$
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	۲ اگر $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. (خارج از کشور)
۵/۷۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	۳ اگر $f = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (9, 0), (-1, 4), (7, 7)\}$ ، تابع $g \circ f$ را در صورت وجود بنویسید.
۱/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۱	۴ اگر $f(x) = 7 - 4x^2$ و $g(x) = \sqrt{x+3}$ باشد: الف) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورد. ب) مقدار $(g \circ f)(1)$ را محاسبه کنید.
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	۵ اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x-1$ ، آنگاه الف) دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف بدست آورید. ب) ضابطه‌ی تابع $f \circ g$ را بنویسید.
۵/۷۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	۶ اگر $f(g(x)) = 4x^2 + 1$ و $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ ، آنگاه ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را بیابید.
۵/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۲	۷ جای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. اگر $f(x) = \frac{ x }{1+ x }$ ، مقدار $(f \circ f)(1)$ برابر است.
۵/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۳	۸ در شکل روبرو، نمودار تابع f رسم شده است. الف) نمودار تابع g با ضابطه‌ی $g(x) = f(2x)$ را رسم کنید. ب) مقدار $(g \circ f)(0)$ را بدست آورید.



۱ نمره	مرداد ۱۴۰۳	اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشند، آنگاه D_{fog} را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۹
۱/۷۵ نمره	دی ۱۴۰۳	تابع‌های $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ را در نظر بگیرید. الف) دامنه‌ی تابع $(fog)(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) مقدار $(gof^{-1})(2)$ را محاسبه کنید.	۱۰
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۴	اگر $f(x) = 3\sqrt{x} + 2$ و $f(g(x)) = 3x^2 - 4$ ، آنگاه ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را به دست آورید.	۱۱
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۴	اگر $f = \{(-2, 4), (0, -1)\}$ و $g(x) = \sqrt{x+5}$ ، تابع gof را به صورت زوج مرتب بنویسید.	۱۲

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل اول

((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۳)

تابع وارون

هر تابع که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مولفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می‌نامند. از این تعریف نتیجه می‌شود که هرگاه از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ تساوی $x_1 = x_2$ نتیجه شود. تابع یک به یک است، این نتیجه برای تعیین یک به یک بودن تابع وقتی که معادله‌ی آن معلوم باشد، بکار می‌رود.

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

برای تشخیص یک به یک بودن تابع وقتی که نمودار آن معلوم باشد، می‌توان از تعریف تابع یک به یک استفاده نمود. در واقع یک تابع یک به یک است هرگاه هر خط موازی محور طول‌ها (x ها)، نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (آزمون خط افقی)

اگر مؤلفه‌های اول و دوم تمام زوج‌های مرتب تابعی را جابجا کنیم، دو حالت پیش می‌آید. حالت اول) مجموعه‌ی جدید، تابع شود. در این صورت می‌گویند این تابع معکوس‌پذیر است و تابع جدید را تابع معکوس می‌نامند.

حالت دوم) مجموعه‌ی جدید، تابع نشود. در این صورت می‌گویند این تابع معکوس‌پذیر نیست. توجه داشته باشید که اگر تابع f معکوس‌پذیر باشد، معکوس آن را با f^{-1} نمایش می‌دهند.

با توجه به مفهوم تابع معکوس به سهولت نتیجه می‌شود که:

الف) تابعی معکوس‌پذیر است، هرگاه یک به یک باشد.

ب) دامنه‌ی تابع f^{-1} برابر برد تابع f است. $(D_{f^{-1}} = R_f)$

ج) برد تابع f^{-1} برابر دامنه‌ی تابع f است. $(R_{f^{-1}} = D_f)$

د) نمودار هر تابع معکوس‌پذیر با نمودار معکوس آن نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم $(y = x)$ متقارن هستند.

تعریف: برای هر دو تابع f و g اگر $(fog)(x) = x$ و $(gof)(x) = x$ آنگاه دو تابع f و g وارون همدیگرند.

توجه الف) برای تعیین معکوس یک تابع معکوس‌پذیر که معادله‌ی آن معلوم باشد، روش رایج، روش تعویض متغیرها است. بر

اساس این روش دو مرحله‌ی زیر را انجام می‌دهیم.

مرحله‌ی ۱) متغیر x را به y و برعکس تبدیل می‌کنیم.

مرحله‌ی ۲) متغیر y را بر حسب x محاسبه می‌کنیم.

توجه ب) تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ (سهمی) که در آن $a \neq 0$ در دامنه اش معکوس پذیر نیست. ولی با توجه به اینکه $x = -\frac{b}{2a}$ طول رأس سهمی است، می توان دامنه ی تابع را در یکی از بازه های زیر

$$(-\infty, -\frac{b}{2a}] \quad \text{یا} \quad [-\frac{b}{2a}, +\infty)$$

محدود کرد و یک تابع یک به یک ساخت. بدیهی است که تابع سهمی در هر یک از این بازه ها معکوس پذیر می باشد. توجه :

اولاً : برای تعیین تابع معکوس بهتر است اتحاد مربع تشکیل داد.

ثانیاً : بستگی به بازه ی تحدید، دامنه ی تابع معکوس را به یکی از صورت های زیر خواهد بود.

$$(-\infty, f(-\frac{b}{2a})] \quad \text{یا} \quad [f(-\frac{b}{2a}), +\infty)$$

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل اول

((ریاضی ۳))



درس ۳: تابع وارون

۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. اگر $f = \{(2,3), (3,5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر است.	۱
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	نشان دهید که توابع $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$ وارون یکدیگرند. (خارج از کشور)	۲
۵/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. ضابطه‌ی تابع وارون $y = x^3$ ، برابر است.	۳
۵/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۱	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. اگر $f(x) = 2x^3 - 1$ باشد، حاصل $f^{-1}(15)$ برابر است.	۴
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x-1}$ باشد، مقدار $(f \circ f^{-1})(5)$ برابر با است.	۵
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = x^2 + 4x + 3$ برابر $[-2, +\infty)$ باشد، ضابطه و دامنه‌ی تابع وارون را بدست آورید.	۶
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۲	ضابطه و دامنه‌ی تابع وارون تابع زیر را به دست آورید. $f(x) = -x^2 - 2$; $x \geq 0$	۷
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۳	تابع $f(x) = \sqrt{x+4} - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطه‌ی تابع وارون آن را بیابید.	۸
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در تابع $f(x) = 4 + \sqrt{x-1}$ ، دامنه‌ی $y = (f^{-1} \circ f)(x)$ تابع برابر $[1, +\infty)$ است.	۹
۵/۷۵ نمره	مرداد ۱۴۰۳	فرض کنید $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ و $g(x) = x^3 - 1$ باشند. در این صورت $(g \circ f)^{-1}(7)$ را بیابید.	۱۰
۵/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابعی یک به یک باشد، آنگاه اکیداً یکنوا است.	۱۱

۱ نمره	خرداد ۱۴۰۴	اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ باشد، آن گاه؛ الف) دامنه‌ی تابع $f^{-1} \circ f$ را به دست آورید. ب) مقدار $f^{-1}(5)$ را محاسبه کنید.	۱۲
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۴	تابع $f(x) = x^2 - 6x$ ، با دامنه‌ی $(-\infty, 3]$ را در نظر بگیرید و ضابطه‌ی تابع وارون f را به دست آورید.	۱۳

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل دوم

((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۱)

توابع متناوب

در واقع تابع متناوب، تابعی است که در فواصل معینی قطعه‌ای از نمودار آن تکرار می‌شود و دوره‌ی تناوب آن، کوچکترین طول بازه‌ای است که در آن، نمودار تابع تکرار می‌گردد. تعریف دقیق تابع متناوب به شکل زیر است.

اگر تابع $y = f(x)$ دو شرط زیر را داشته باشد، آن را **متناوب** گویند.

الف) هرگاه عدد مثبتی مانند C وجود داشته باشد، به طوری که وقتی x عضو دامنه باشد، آنگاه $x + C$ نیز عضو دامنه است.

$$x \in D_f \xrightarrow{\exists c > 0} (x + c) \in D_f$$

$$f(x + c) = f(x) \quad \text{ب)}$$

در این صورت کمترین مقدار مثبت c را با T نمایش می‌دهیم و آن را **دوره‌ی تناوب** (دوره‌ی تناوب اصلی) می‌نامیم.

توجه الف: برای توابع $f(x) = a \sin bx + c$ و $f(x) = a \cos bx + c$ می‌توان گفت که:

الف: مقدار ماگزیمم برابر $|a| + c$

ب: مقدار می‌نیمم برابر $-|a| + c$

$$\text{پ: دوره‌ی تناوب برابر } T = \frac{2\pi}{|b|}$$

توجه ب: برای نوشتن معادله‌ی توابع مثلثاتی به صورت

$$f(x) = a \sin bx + c \quad \text{یا} \quad f(x) = a \cos bx + c$$

وقتی که مقدار ماگزیمم و مقدار می‌نیمم و دوره‌ی تناوب معلوم باشد. می‌توان گفت که:

$$\text{الف: مقدار } b \text{ را مثبت قرار می‌دهیم و } b = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{ب: } a = \pm \frac{\max(f) - \min(f)}{2}$$

$$\text{ج: } c = \frac{\max(f) + \min(f)}{2}$$

توجه پ : گاهی نمودار یک تابع مثلثاتی داده می شود. برای تشخیص اینکه این تابع به صورت $f(x) = a \sin bx + c$ یا $f(x) = a \cos bx + c$ است. از نکات زیر استفاده می شود.

با فرض اینکه شروع نمودار از روی محور y ها است. علامت a و b را مشخص می کنیم.

الف) اگر $ab > 0$ باشد. نمودار $a \sin(bx)$ شبیه نمودار $y = \sin x$ است.

ب) اگر $ab < 0$ باشد. نمودار $a \sin(bx)$ شبیه نمودار $y = -\sin x$ است.

پ) اگر $a > 0$ ، نمودار $y = a \cos(bx)$ ، شبیه نمودار $y = \cos x$ است.

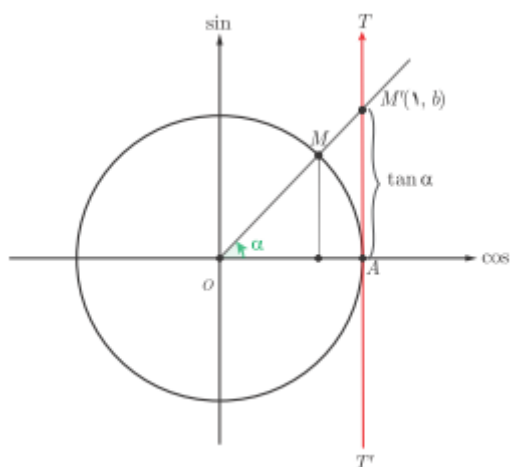
ت) اگر $a < 0$ ، نمودار $y = a \cos(bx)$ ، شبیه نمودار $y = -\cos x$ است.

در نهایت با توجه به میزان انتقال قائم نمودار تابع $a \sin(bx)$ یا $y = a \cos(bx)$ می توان مقدار c را تعیین کرد.

توجه کنید که فاصله ی بین دو ماکزیمم متوالی (یا دو می نیمم متوالی) برابر T ولی فاصله ی بین یک ماکزیمم و یک می نیمم مقدار $\frac{T}{2}$ را نشان می دهد.

تابع تانژانت

دایره ی مثلثاتی روبرو را در نظر بگیرید. در این دایره خط $T'AT$ در نقطه ی A بر محور کسینوس ها عمود است. اگر نقطه ی A



مبدأ این محور و جهت آن از پایین به بالا فرض شود، طبق تعریف تانژانت

می دانیم که $\tan(\alpha) = AM'$ و با توجه به مختصات نقطه ی M' می توان

نوشت: $\tan(\alpha) = b$

با این دید می توان گفت که با تغییر زاویه ی α مقدار $\tan(\alpha)$ نیز تغییر می -

کند. پس نتیجه گرفته می شود که $f(x) = \tan(x)$ تابعی از زاویه ی x است.

این تابع را **تابع تانژانت** می نامند. تابع تانژانت دارای ویژگی های زیر است.

الف : اگر زاویه ی α در ربع اوّل یا سوّم باشد، مقدار تابع مثبت است.

ب : اگر زاویه ی α در ربع دوّم یا چهارم باشد، مقدار تابع منفی است.

ج : اگر زاویه ی α برابر صفر یا π رادیان باشد، مقدار تابع صفر است.

د : تابع در نقاط $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ تعریف نمی شود. به طور کلی دامنه و برد تابع تانژانت به شکل زیر است.

$$Df = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$Rf = \mathbb{R}$$

و : چون $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ پس این تابع متناوب است و دوره ی تناوب آن $T = \pi$ می باشد.

به طور کلی دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = a \tan(bx) + c$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

با افزایش مقدار α در ربع اول مقدار تابع افزایش می‌یابد. با نزدیک

شدن مقدار α به $\frac{\pi}{2}$ ، مقدار تابع از صفر به مثبت بی نهایت صعود

می‌کند.

با افزایش مقدار α در ربع دوم مقدار تابع افزایش می‌یابد. با نزدیک

شدن مقدار α به π ، مقدار تابع از منفی بی نهایت به صفر نزدیک

می‌شود.

با افزایش مقدار α در ربع سوم مقدار تابع افزایش می‌یابد. با نزدیک

شدن مقدار α به $\frac{3\pi}{2}$ ، مقدار تابع از صفر به مثبت بی نهایت صعود

می‌کند.

با افزایش مقدار α در ربع چهارم مقدار تابع افزایش می‌یابد. با نزدیک شدن مقدار α به 2π ، مقدار تابع از منفی بی نهایت به صفر

نزدیک می‌شود.

نتیجه: تابع تانژانت در یک دوره‌ی تناوب محصور بین مضرب‌های متوالی $\frac{\pi}{2}$ اکیداً صعودی است. اما در دامنه‌اش نه صعودی و

نه نزولی می‌باشد.

تهیه کننده: جابر عامری

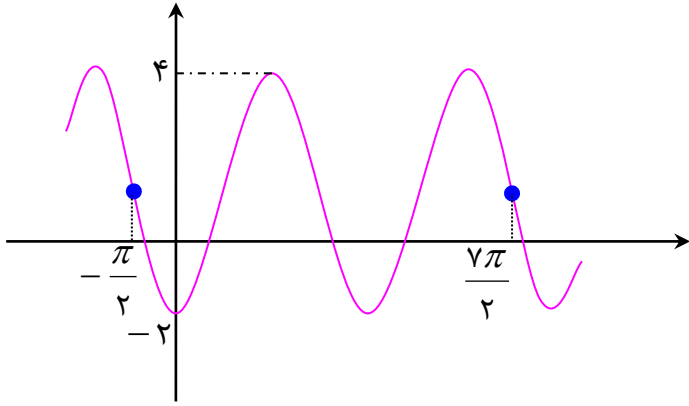
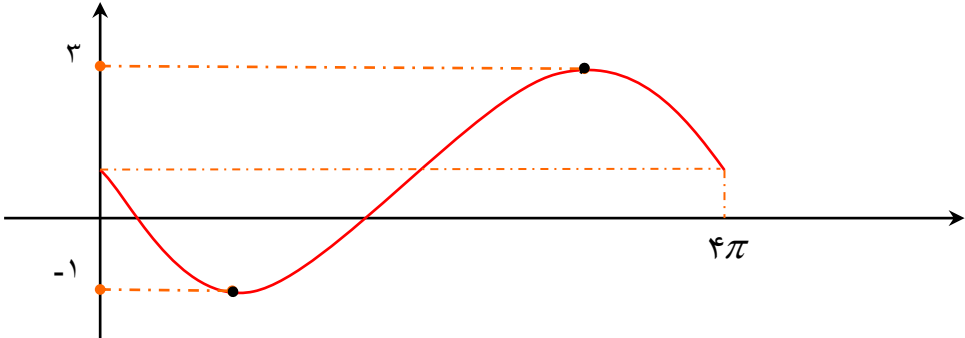
دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل دوم^۳

((ریاضی ۳))



درس ۱ : توابع متناوب

۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	معادله‌ی یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره‌ی تناوب اصلی آن ۲ است.	۱
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y = 1 + 2 \sin 7x$ را به دست آورید. (خارج از کشور)	۲
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y = 3 \cos(\pi x) + 2$ را به دست آورید.	۳
۱/۷۵ نمره	دی ۱۴۰۱	نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = a \cos bx + c$ به صورت مقابل رسم شده است. مقادیر a و b و c را به دست آورید. 	۴
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	نمودار زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin bx + 1$ است. حاصل ab را بیابید. 	۵

۶	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم تابع زیر را بدست آورید.	شهریور ۱۴۰۲	۱/۵ نمره
۷	مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = a \cos \frac{x}{2} + 3$ برابر ۶ می‌باشد. مقدار $ a $ و دوره‌ی تناوب را به دست آورید.	دی ۱۴۰۲	۱ نمره
۸	اگر بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = a \sin(\lambda x) + c$ به ترتیب ۹ و ۳ باشد. الف) مقادیر $ a $ و c را بیابید. ب) دوره‌ی تناوب تابع را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۳	۱/۵ نمره
۹	نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ به صورت زیر است. ضابطه‌ی آن را مشخص کنید.	مرداد ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۰	مقدار می‌نیمم و دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = c - 2 \sin(bx)$ به ترتیب ۴ و $\frac{\pi}{2}$ است. مقادیر $ b $ و c را محاسبه کنید.	دی ۱۴۰۳	۱ نمره
۱۱	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه‌ی $f(x) = a \cos(bx) + 2$ یا $f(x) = a \sin(bx) + 2$ است. با دقت به نمودار و محاسبه‌ی مقادیر a و b ، ضابطه‌ی مربوط به این تابع را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۴	۱/۵ نمره
۱۲	دوره‌ی تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = 1 - 3 \cos(\frac{\pi}{2}x)$ را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۴	۱ نمره

تابع تانژانت

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (خارج از کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	دوره‌ی تناوب تابع $y = \tan x$ برابر 2π است.	مرداد ۱۴۰۳	۰/۷۵ نمره
	با توجه به محورهای کسینوس و تانژانت، اگر $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ باشد، آن گاه مقادیر $\cos \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید.		

۵/۲۵ نمره	مرداد ۱۴۰۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = \tan x$ در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ ، صعودی است.	۳
۵/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. بازه‌ای که تابع تانژانت در آن نزولی باشد، وجود ندارد.	۴
۵/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۴	جمله‌ی زیر را با عبارت مناسب پر کنید. برد تابع $y = \tan x$ برابر با است.	۵

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل دوم^۳

((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۲)

روابط مثلثاتی

روابطی که نسبت های سینوس و کسینوس دو برابر کمان را نشان می دهند. این روابط به شکل زیر هستند.

الف) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

ب) $\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$

توجه: با توجه به روابط مثلثاتی فوق می توان نوشت^۱:

الف) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

ب) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$

معادله ی مثلثاتی

هر معادله که شامل نسبت های مثلثاتی باشد را معادله ی مثلثاتی می نامند.

برای حل هر معادله ی مثلثاتی باید ابتدا با انجام عملیاتی^۲ آن را به یکی از صورت های زیر تبدیل کرد و جواب عمومی آن را تعیین کرد.

ردیف	صورت معادله	شرط داشتن جواب	یافتن زاویه	جواب عمومی
۱	$\sin(u) = a$	$-1 \leq a \leq 1$	$\sin(u) = \sin \alpha$	$u = 2k\pi + \alpha$ $u = (2k + 1)\pi - \alpha$
۲	$\cos(u) = b$	$-1 \leq b \leq 1$	$\cos(u) = \cos \alpha$	$u = 2k\pi + \alpha$ $u = 2k\pi - \alpha$

^۱ . روابط طلایی مثلثات

^۲ . رایج ترین این عملیات، استفاده از فرمول های مثلثاتی و فاکتورگیری است. این عملیات به دو منظور بکار می روند.

الف: یکسان سازی نسبت های مثلثاتی

ب: یکسان سازی زاویه ی مثلثاتی

تذکر: با توجه به جدول فوق

الف) در معادله $\sin(u) = a$ ، اگر مقدار a منفی باشد، در فرمول جواب قرینه‌ی زاویه‌ی α را قرار دهید.

ب) در معادله $\cos(u) = b$ ، اگر مقدار b منفی باشد، در فرمول جواب مکمل زاویه‌ی α را قرار دهید.

ج) α کوچکترین زاویه‌ی غیر منفی است که تساوی به ازاء آن برقرار می‌باشد و آنرا **زاویه اصلی** می‌نامند.

برای تعیین زاویه اصلی در صورت وجود می‌توانید از جدول مقادیر نسبت‌های مثلثاتی استفاده کنید و در غیر این صورت می‌توانید فقط به ذکر α اکتفا کنید.

حالت‌های خاص معادلات مثلثاتی

علاوه بر جدول کلی فوق در حل معادلات مثلثاتی می‌توان از حالت‌های خاص زیر نیز استفاده نمود.

$\sin(u) = 1 \rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\cos(u) = 1 \rightarrow u = 2k\pi$
$\sin(u) = 0 \rightarrow u = k\pi$	$\cos(u) = 0 \rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin(u) = -1 \rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	$\cos(u) = -1 \rightarrow u = 2k\pi + \pi$

توجه: دو تساوی مهم و مفید زیر را به خاطر داشته باشید.

الف) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ب) $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل دوم

((ریاضی ۳))

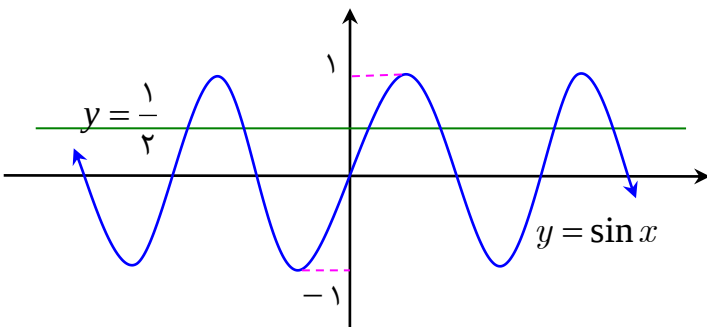


درس ۲: روابط مثلثاتی

۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	حاصل $\cos 15^\circ$ را به دست آورید.	۱
۵/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. مقدار عددی عبارت $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.	۲
۵/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۲	جای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. اگر α یک زاویه ی حاده و $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ حاصل $\cos 2\alpha$ برابر است.	۳
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۳	جای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. مقدار عددی عبارت $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ برابر است.	۴
۵/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۴	مقدار عددی A را محاسبه کنید. $A = \cos^2 (22/5^\circ) - \sin^2 (22/5^\circ)$	۵

معادلات مثلثاتی

۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	معادله ی مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.	۱
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	معادله ی مثلثاتی $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید. (خارج کشور)	۲
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	معادله ی زیر را حل کنید. $\cos 2x - 3\sin x + 4 = 0$	۳
۱ نمره	دی ۱۴۰۱		۴

		نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \sin x$ و خط به معادله‌ی $y = \frac{1}{2}$ در دستگاه زیر، رسم شده است. طول نقاط برخورد آنها را بیابید. 	
۵	جواب (های) معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x - \cos x = 0$ را در بازه‌ی $(0, \pi)$ مشخص کنید.	خرداد ۱۴۰۲ نمره ۵/۷۵	
۶	معادله‌ی $2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را حل کنید.	شهریور ۱۴۰۲ نمره ۱/۲۵	
۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. خط $y = \frac{1}{2}$ ، نمودار تابع $y = \sin x$ را در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ ، در یک نقطه قطع می‌کند.	شهریور ۱۴۰۲ نمره ۵/۲۵	
۸	جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $2 \sin 4x = 1$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه‌ی $[0, \frac{\pi}{2}]$ هستند؟	دی ۱۴۰۲ نمره ۱/۵	
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. فقط دو زاویه وجود دارد که مقدار کسینوس آنها $\frac{2}{5}$ باشد.	دی ۱۴۰۲ نمره ۵/۲۵	
۱۰	جواب‌های معادله‌ی $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$ را در بازه‌ی $(0, \pi)$ به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۳ نمره ۱/۲۵	
۱۱	معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید. $\cos 2x - 13 \cos x - 6 = 0$	مرداد ۱۴۰۳ نمره ۱	
۱۲	معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x - 3 \cos x - 1 = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.	دی ۱۴۰۳ نمره ۱/۵	
۱۳	جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. تعداد جواب‌های معادله‌ی $\sin x = \frac{1}{3}$ در بازه‌ی $(0, \pi)$ برابر است.	دی ۱۴۰۳ نمره ۵/۲۵	
۱۴	معادله‌ی مثلثاتی $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.	خرداد ۱۴۰۴ نمره ۱/۵	
۱۵	معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 x - 2 \cos x = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.	شهریور ۱۴۰۴ نمره ۱/۲۵	

فصل سوم

((ریاضی ۳))



مرور نامه درس (۱)

بخش پذیری در چند جمله‌ای‌ها

چند جمله‌ای $A(x)$ را بر چند جمله‌ای $B(x)$ بخش پذیر گویند، هرگاه باقی مانده‌ی تقسیم $A(x)$ بر $B(x)$ صفر شود.^۱
نتیجه: در تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ ، باقی مانده‌ی تقسیم برابر $P(a)$ است. حال اگر $P(a)$ برابر صفر باشد، $P(x)$ بر $x - a$ بخش پذیر می‌باشد.

توجه: اگر مجموع ضرایب جملات یک چند جمله‌ای برابر صفر باشد، آن چند جمله‌ای بر $x - 1$ بخش پذیر است.

حدهای مبهم

الف: برای محاسبه‌ی حد تابع‌های کسری که صورت و مخرج آنها عبارت جبری بوده و به صورت حالت مبهم $(\frac{0}{0})$ باشند، اگر صورت و مخرج چند جمله‌ای باشد، می‌توانید صورت و مخرج را تجزیه و سپس ساده کنید.

ب: برای محاسبه‌ی حد تابع‌های کسری که صورت یا مخرج یا هر دو شامل رادیکال باشد صورت یا مخرج را گویا کنید.

همسایگی یک نقطه

فرض کنید که a عددی حقیقی باشد. در این صورت هر بازه‌ی باز شامل a را یک همسایگی برای a می‌نامند.
در شکل فوق چون $a \in (m, n)$ است، پس بازه‌ی (m, n) یک همسایگی برای نقطه‌ی a محسوب می‌شود. حال اگر نقطه‌ی a را از همسایگی فوق حذف کنیم، مجموعه‌ی $(m, n) - \{a\}$ حاصل می‌شود که به آن همسایگی محذوف نقطه‌ی a می‌گویند.

تذکر: برای هر نقطه مانند a می‌توان تعداد بیشمار بازه‌ی باز تعریف نمود که شامل a باشند. به عبارتی دیگر برای هر نقطه، همسایگی‌های بیشمار می‌توان تعریف کرد. مثلاً بازه‌های $(-1, 1)$ و $(-3, 2)$ همسایگی صفر هستند.

همسایگی چپ و همسایگی راست یک نقطه

اگر (m, n) یک همسایگی برای نقطه‌ی a باشد. در این صورت بازه‌ی (m, a) همسایگی چپ و بازه‌ی (a, n) همسایگی راست نقطه‌ی a تعریف می‌شوند.



تهیه کننده: جابر عامری، دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

^۱ . چند جمله‌ای $B(x)$ را عامل $A(x)$ نیز می‌نامند.

فصل سوم

((ریاضی ۳))



درس ۱ : تقسیم چندجمله‌ای‌ها

۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. باقی مانده‌ی تقسیم عبارت $2x^2 - 5x + 1$ بر $x - 3$ برابر است.	۱
۵/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ بر $x - 1$ برابر ۲ است.	۲
۵/۲۵ نمره	مرداد ۱۴۰۳	جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. در تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر $x + 2$ ، باقی مانده‌ی تقسیم برابر است.	۳
۵/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۳	هر یک از جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $4x^3 - 5x + 2$ بر $x + 1$ برابر است.	۴

حدهای مبهم

۵/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 7x + 3}$	۱
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (خارج کشور) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$	۲
۵/۷۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$	۳
۱ نمره	دی ۱۴۰۱	حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$	۴

۵	حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$	خرداد ۱۴۰۲	۵/۵ نمره
۶	حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$	شهریور ۱۴۰۲	۱ نمره
۷	حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$	خرداد ۱۴۰۳	۵/۵ نمره
۸	حد زیر را محاسبه کنید.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{\sqrt[3]{x}+1}$	مرداد ۱۴۰۳	۵/۷۵ نمره
۹	حد زیر را محاسبه کنید.	$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$	خرداد ۱۴۰۴	۱ نمره
۱۰	حد زیر را محاسبه کنید.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-3x+1}{x^3-1}$	شهریور ۱۴۰۴	۵/۷۵ نمره

همسایگی یک نقطه

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. بازه‌ی (۲,۵)، یک همسایگی ۴ است.	شهریور ۱۴۰۱	۵/۲۵ نمره
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. بازه‌ی (-۲,۰)، یک همسایگی چپ برای عدد است.	دی ۱۴۰۲	۵/۲۵ نمره
۳	جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. بازه‌ی (۷,۹) یک همسایگی راست عدد است.	دی ۱۴۰۳	۵/۲۵ نمره
۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. مجموعه‌ی (۲,۴) یک همسایگی محذوف عدد ۲ است.	شهریور ۱۴۰۴	۵/۲۵ نمره

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل سوم

((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۲)

تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی

فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

به طور مشابه می‌توان حدهای یک طرفه‌ی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ را نیز تعریف کرد.

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از هر دو سمت راست و چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

یعنی اینکه می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد منفی کوچکتر کنیم به شرطی که x را از هر دو سمت راست و چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

قضایای حدهای بی‌نهایت

قضیه ۱: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه :

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ در صورتی که n زوج باشد.

ج) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ در صورتی که n فرد باشد.

قضیه ۲:

الف: اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و برعکس

ب: اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و برعکس

قضیه ۳: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آنگاه :

الف: اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب: اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ج: اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

د: اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

تذکر: این قضیه برای حدهای یک طرفه نامتناهی (یعنی در حالت‌های که $x \rightarrow a^+$ و $x \rightarrow a^-$) نیز برقرار است.

قضیه ۴: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (یا $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$) آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

تذکر: این قضیه برای حدهای یک طرفه نامتناهی (یعنی در حالت‌های که $x \rightarrow a^+$ و $x \rightarrow a^-$) نیز برقرار است.

قضیه ۵: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \neq 0$ آنگاه

الف: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$

ب: اگر $L > 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = +\infty$

ج: اگر $L < 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = -\infty$

تذکر: این قضیه برای حدهای یک طرفه نامتناهی (یعنی در حالت‌های که $x \rightarrow a^+$ و $x \rightarrow a^-$) نیز برقرار است.

قضیه ۶: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \neq 0$ آنگاه

الف: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty$

ب: اگر $L > 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = -\infty$

ج: اگر $L < 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = +\infty$

حد در بی نهایت

الف: اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدر کافی بزرگ، فاصله‌ی $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.

ب: اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدر کافی بزرگ، فاصله‌ی $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.

قضیه های حد در بی نهایت

قضیه ۱: اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

قضیه ۲: اگر L_1 و L_2 اعداد حقیقی و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_2$ آنگاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 + L_2$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 - L_2$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 \times L_2$

د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad ; \quad L_2 \neq 0$

تذکر: قضیه‌ی فوق وقتی x به سمت $-\infty$ میل می کند، نیز برقرار است.

حدهای نامتناهی در بی نهایت

در محاسبه‌ی حد توابع ممکن است وقتی x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند و از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند یا از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند.

الف : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند، می‌نویسند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند، می‌نویسند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

ج : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند، می‌نویسند.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

د : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند، می‌نویسند.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

قضیه‌های حدهای نامتناهی در بی‌نهایت

قضیه ۱ : فرض کنید که a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، در این صورت

الف : اگر n زوج باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty$

ب : اگر n فرد باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

قضیه ۲ : اگر L عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ آنگاه :

الف : اگر L مثبت باشد.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

ب : اگر L منفی باشد.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

تذکر : این قضیه برای $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ به طور مشابه برقرار است.

قضیه ۳ : اگر L عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ آنگاه :

الف : اگر L مثبت باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

ب : اگر L منفی باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

تذکر: این قضیه برای $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ به طور مشابه برقرار است.

و به طور کلی قضیه‌ی فوق را می‌توان به شکل جدول زیر تعمیم داد.

	n فرد	n زوج
a مثبت	$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = +\infty$
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = +\infty$
a منفی	$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = -\infty$
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = -\infty$

قضیه ۴: حد هر چندجمله‌ای به صورت

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

در $\pm \infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگترین درجه است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} a_n x^n$$

در حد توابع چندجمله‌ای، حد تابع چند جمله‌ای، با حد جمله‌ای از آن که دارای بیشترین توان باشد، برابر است. اگر در یک چندجمله‌ای، جمله‌ای که دارای بیشترین توان باشد، را **جمله‌ی ارشد** نام گذاری کنیم. در این صورت:

حد تابع چند جمله‌ای، با حد جمله‌ی ارشد آن برابر است.

حد توابع کسری^۱، مانند توابع چندجمله‌ای، ابتدا جملات ارشد را از صورت و مخرج انتخاب نموده و پس از ساده کردن، حد را محاسبه می‌کنیم. بر این اساس نتایج زیر را داریم؛
نتیجه می‌شود که در محاسبه‌ی حد توابع کسری سه حالت وجود دارد.
الف) توان جمله‌ی ارشد صورت از توان جمله‌ی ارشد مخرج، بیشتر باشد. در این صورت جواب مثبت بی‌نهایت یا منفی بی‌نهایت می‌شود.

ب) توان جمله‌ی ارشد صورت از توان جمله‌ی ارشد مخرج، کمتر باشد. در این صورت جواب صفر حدی می‌شود.

ج) توان جمله‌ی ارشد صورت و مخرج برابر باشد. در این صورت جواب عددی غیر صفر بوده و برابر نسبت ضریب‌های جملات ارشد می‌شود.

برای محاسبه‌ی حد تابع رادیکالی با فرجه‌ی ۲ (اصم)، ارزی‌های زیر را بکار می‌گیریم. این هم ارزی‌ها را **هم ارزی‌های نیوتن** می‌نامند. توجه داشته باشید که دو تابع را **هم ارز** گویند هرگاه حد برابر داشته باشند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} \equiv \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right)$$

^۱. تابعی که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} \equiv - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right)$$

در این دو هم ارزی عدد a مثبت فرض شده است و اگر منفی باشد، تابع دارای حد نیست.

تهیه کننده : جابر عامری

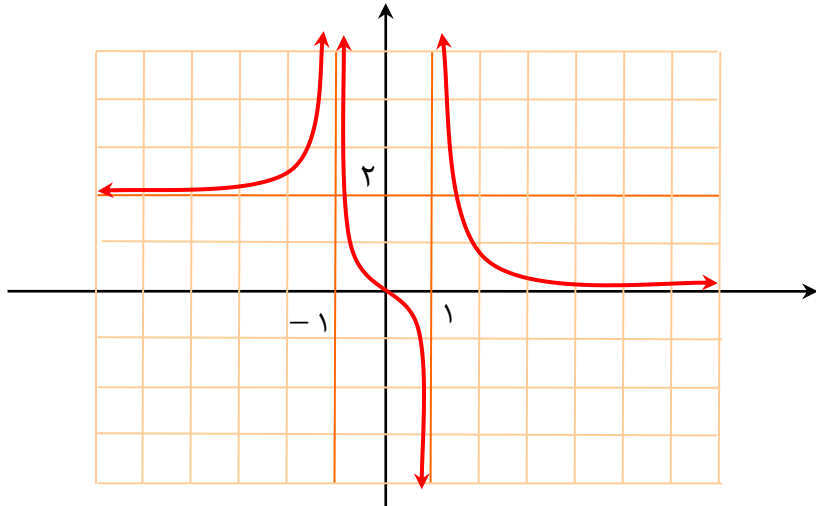
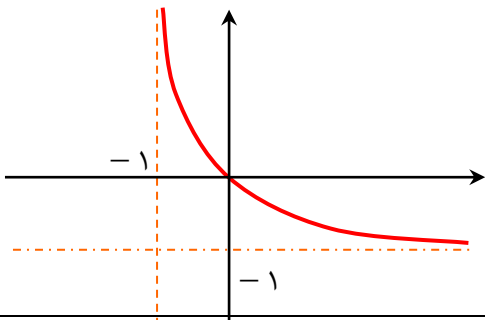
دبیر ریاضی دوره ی دوم متوسطه، استان خوزستان

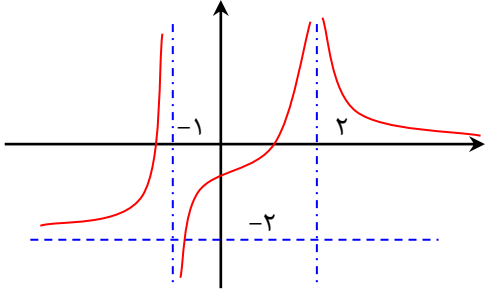
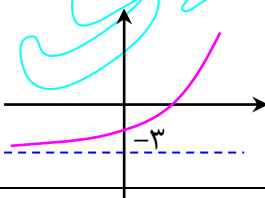
فصل سوم

((ریاضی ۳))



درس ۲: حد بی‌نهایت و حد در بینهایت

۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. حدود خواسته شده است را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$ پ) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$ ت) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$ 	۱
۵/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	حاصل حدهای زیر را در صورت وجود حساب کنید. (خارج از کشور) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$	۲
۵/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	با توجه به نمودار تابع $f(x)$، طرف دوم تساوی‌ها را کامل کنید. (خارج کشور) الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \dots$ 	۳

۴	۱ شهریور نمره ۱۴۰۱	حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{5x+4}$
۵	۵/۷۵ نمره دی ۱۴۰۱	نمودار تابع f به شکل زیر است. حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 
۶	۵/۲۵ نمره دی ۱۴۰۱	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. حاصل حد تابع $f(x) = \frac{2x^2}{3x^2-1}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ میل می کند، برابر است.
۷	۵/۵ نمره خرداد ۱۴۰۲	آیا مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{[x]-1}$ وجود دارد؟ چرا؟
۸	۱ نمره خرداد ۱۴۰۲	حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{ \sin x }$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+4x^5}{x^3-x}$
۹	۵/۵ نمره شهریور ۱۴۰۲	با توجه به نمودار تابع f ، حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$ 
۱۰	۵/۵ نمره شهریور ۱۴۰۲	حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{ 2-x }$
۱۱	۱/۵ نمره دی ۱۴۰۲	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{x-2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x-4x^2}{3x+x^2}$
۱۲	۱/۵ نمره خرداد ۱۴۰۳	حدود زیر را محاسبه کنید. (نماد $[\]$ علامت جزء صحیح است.) الف) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3}$ ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}$

۱ نمره	مرداد ۱۴۰۳	حدود زیر را محاسبه کنید. $\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2 - \frac{3}{x^3}} \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} \frac{1}{\sin x}$	۱۳
۱ نمره	دی ۱۴۰۳	حدهای زیر را محاسبه کنید. $\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2[-x] + 1}{ x - 2 } \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{-x^5 + 2x^2 - 3}$	۱۴
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۴	حدود زیر را محاسبه کنید. ([] نماد جزء صحیح است). $\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + 4}{x^3 + x^5} \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x] - 4}{4 - x}$	۱۵
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۴	حدهای زیر را محاسبه کنید. $\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x}{3x^4 + x^2} \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos x}$	۱۶

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل چهارم

((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۱)

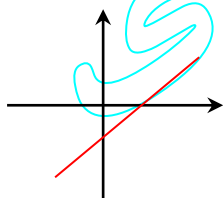
مشتق تابع در یک نقطه

اگر $y = f(x)$ یک تابع پیوسته در نقطه‌ی $x = a$ باشد. در این صورت مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ را به صورت زیر تعریف می‌کنند و آنرا با $f'(a)$ یا $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}$ نمایش می‌دهند.

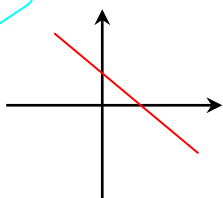
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

حالت‌های مختلف یک خط در صفحه

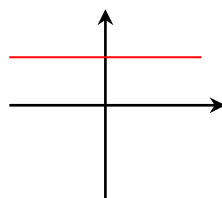
می‌دانیم که در صفحه، هر خط می‌تواند حالت‌های زیر را داشته باشد. علامت شیب هر کدام را نیز با توجه به هر حالت قابل مشاهده است.



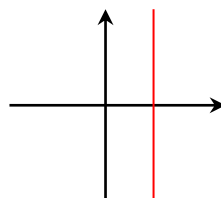
شیب خط، مثبت است



شیب خط، منفی است



شیب خط، صفر است



شیب خط، تعریف نشده

تعبیر هندسی مشتق

مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ ، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه برابر است.

$$m = f'(a)$$

معادله‌ی خط مماس

معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$y = m(x - a) + b$$

مشتق‌های یک طرفه

اگر تابع f در نقطه‌ی a و یک همسایگی راست a تعریف شده باشد، حد یک طرفه‌ی $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ را در صورت

وجود، **مشتق راست** تابع f در نقطه‌ی a می‌نامند و آن را با نماد $f'_+(a)$ نمایش می‌دهند.

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مشتق راست $f'_+(a)$

اگر تابع f در نقطه‌ی a و یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد، حد یک طرفه‌ی $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ را در صورت

وجود، **مشتق چپ** تابع f در نقطه‌ی a می‌نامند و آن را با نماد $f'_-(a)$ نمایش می‌دهند.

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مشتق چپ $f'_-(a)$

قضایای مشتق تابع در یک نقطه

قضیه ۱: اگر $f(x) = k$ یک تابع ثابت باشد. آنگاه $f'(a) = 0$

قضیه ۲: اگر $f(x) = x$ یک تابع همانی باشد. آنگاه $f'(a) = 1$

قضیه ۳: اگر توابع g و f در نقطه‌ی a مشتق پذیر باشند. در این صورت:

(الف) تابع kf نیز در a مشتق پذیر است و $(kf)'(a) = kf'(a)$

(ب) تابع $f + g$ نیز در a مشتق پذیر است و $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

(پ) تابع $f - g$ نیز در a مشتق پذیر است و $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$

(ث) تابع $f \cdot g$ نیز در a مشتق پذیر است و $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

(ح) تابع $\frac{f}{g}$ نیز (به شرط $f(a) \neq 0$) در a مشتق پذیر است و $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{g^2(a)}$

(خ) تابع $\frac{f}{g}$ نیز (به شرط $g(a) \neq 0$) در a مشتق پذیر است و $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$$

قضیه ۴: فرض کنید تابع g در نقطه‌ی a و تابع f در $g(a)$ مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع $f \circ g$ در a مشتق پذیر است و

$$(f \circ g)'(a) = g'(a)f'(g(a))$$

تهیه کننده : جابر عامری

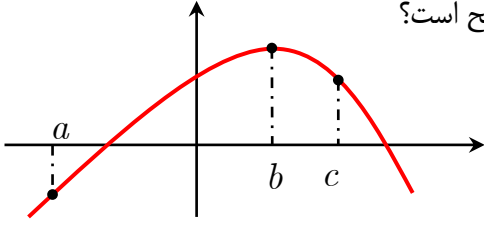
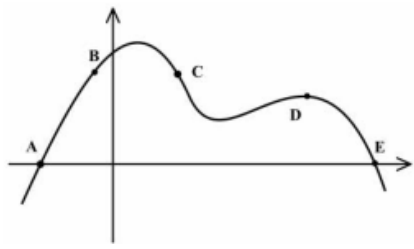
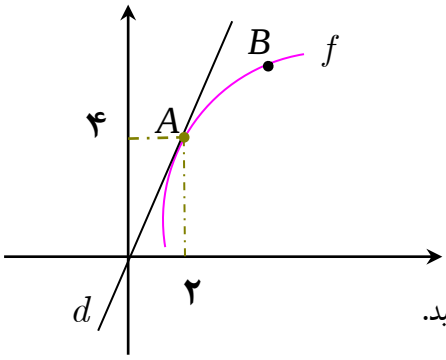
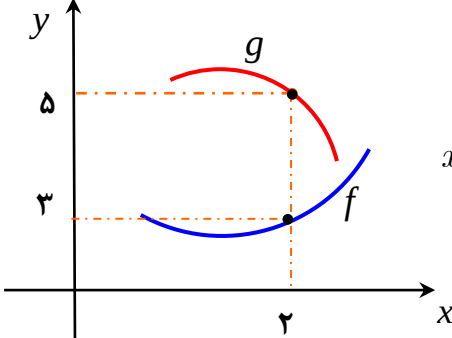
دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

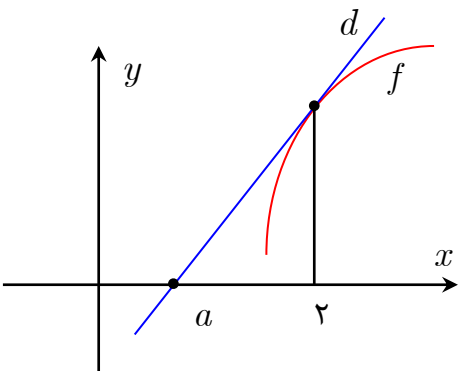
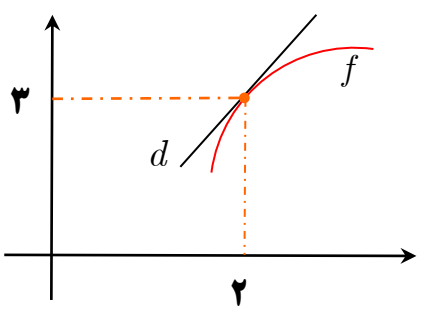
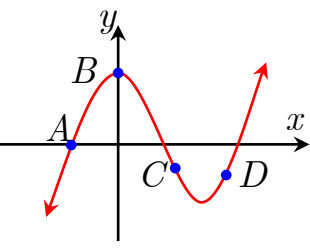
فصل چهارم

((ریاضی ۳))



درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق

۵/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	با توجه به نمودار تابع f، اگر شیب خط مماس در نقاط a و b و c به ترتیب با m_a و m_b و m_c نمایش داده شود. کدامیک از گزینه های زیر صحیح است؟ الف) $m_c > m_b > m_a$ ب) $m_b > m_a > m_c$ پ) $m_a > m_b > m_c$ ت) $m_c = m_b = m_a$ 	۱
۵/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	از بین نقاط مشخص شده روی نمودار زیر، در کدام نقطه: الف: مقدار تابع صفر، ولی مشتق آن مثبت است. ب: مقدار تابع مثبت، ولی مشتق آن منفی است. 	۲
۵/۷۵ نمره	دی ۱۴۰۱	نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. اگر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس باشد: الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ را بیابید. ب) شیب خط های مماس در نقاط A و B را مقایسه کنید. 	۳
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۲	با توجه به نمودارهای توابع f و g، تعیین کنید که حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2}$ چند برابر $f'(2)$ است؟ 	۴

۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۲	 خط d در نقطه‌ای با طول $x=2$ بر نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ مماس است. با توجه به شکل مقدار a (نقطه‌ی برخورد خط d با محور x ها) را بیابید.	۵
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۳	اگر نمودار تابع f از نقطه‌ی $A(2,4)$ بگذرد و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$ باشد، معادله‌ی خط مماس بر نمودار f را در نقطه‌ی A به دست آورید.	۶
۱/۲۵ نمره	مرداد ۱۴۰۳	 با توجه به شکل زیر، اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5f(x) - 15}{x - 2} = 10$ باشد، معادله‌ی خط d را به دست آورید.	۷
۵/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۴	 نقاط A و B و C و D روی نمودار تابع f، به صورت مقابل مشخص شده‌اند. الف) در کدام نقطه مقدار مشتق مثبت و مقدار تابع صفر است؟ ب) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق هر دو منفی است؟	۸

مشتق تابع در یک نقطه

۱ نمره	دی ۱۴۰۳	شیب خط مماس بر منحنی $f(x) = x^2 - x$ در نقطه‌ی $x=3$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.	۱
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۴	مشتق تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در نقطه‌ی $x=2$، با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.	۲

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل چهارم

((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۲)

مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه

تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ مشتق پذیر گویند، هرگاه:
الف) در این نقطه پیوسته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

ب) مشتق راست و مشتق چپ آن در این نقطه موجود و برابر باشند.

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

در غیر این صورت تابع در نقطه $x = a$ مشتق پذیر نیست.

نقاط مشتق ناپذیری تابع

در هر یک از موارد زیر، یک تابع در یک نقطه مانند $x = a$ مشتق پذیر نیست.

۱: تابع در این نقطه پیوسته نباشد.

در این مورد نقطه‌ای داده شده را **نقطه‌ی ناپیوستگی** می‌گویند.

۲: تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود (متناهی) ولی برابر نباشند.

در این مورد نقطه‌ای داده شده را **نقطه‌ی گوشه‌ای** (نقطه‌ی زاویه‌دار) می‌گویند و خطوط مماس را **نیم مماس چپ و نیم مماس راست** می‌نامند.

۳: تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع در این نقطه یکی عدد (متناهی) و دیگری بی‌نهایت (نامتناهی) شود.

در این مورد نیز نقطه‌ای داده شده را **نقطه‌ی گوشه‌ای** (نقطه‌ی زاویه‌دار) می‌گویند و خطوط مماس را **نیم مماس چپ و نیم مماس راست** می‌نامند.

۴: تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ شود.

۵: تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند.

توجه:

۱: اگر تابعی در همسایگی (راست یا چپ) این نقطه تعریف نشده باشد. تابع در آن نقطه پیوسته نیست و لذا مشتق پذیر نمی‌باشد.

۲: اگر تابع f در a پیوسته بوده و

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \vee -\infty$$

باشد، آنگاه خط $x = a$ که از نقطه‌ی $A(a, f(a))$ می‌گذرد و **خط مماس قائم** بر نمودار f گفته می‌شود.

تابع مشتق

اگر x عضو از دامنه‌ی تابع $y = f(x)$ باشد و تابع f در x مشتق‌پذیر باشد. در این صورت متناظر آن تابع دیگری تحت عنوان تابع مشتق (مشتق اول) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تابع مشتق را به اختصار **مشتق** تابع می‌نامیم و آن را به صورت $f'(x)$ یا y' یا $\frac{df}{dx}$ نمایش می‌دهیم.

دامنه‌ی تابع مشتق، زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی تابع f است که در آن تابع مشتق‌پذیر باشد. یعنی

$$Df' = Df - \{ f \text{ نقاط مشتق‌ناپذیر تابع } f \}$$

توجه: ضریب عددی تابع در مشتق‌گیری شرکت نمی‌کند. یعنی؛

$$y = af(x) \rightarrow y' = af'(x)$$

الف: فرمول‌های مقدماتی

ردیف	تابع	مشتق
۱	$y = a$	$y' = 0$
۲	$y = ax$	$y' = a$
۳	$y = ax^n$	$y' = anx^{n-1}$
۴	$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$
۵	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
۶	$y = \sqrt[m]{x^n}$	$y' = \frac{n}{m \sqrt[m]{x^{m-n}}}$

ب: فرمول‌های تکمیلی (روش‌های مشتق‌گیری)

فرض کنید که u و v و ... توابعی بر حسب متغیر x باشند. در این صورت می‌توان فرمول‌های زیر را نیز بیان کرد.

ردیف	تابع	مشتق
۱	$y = au$	$y' = au'$
۲	$y = u + v + \dots$	$y' = u' + v' + \dots$
۳	$y = u.v$	$y' = u'v + v'u$
۴	$y = u.v.w$	$y' = u'.v.w + v'.u.w + w'.u.v$

۵	$y = u^n$	$y' = nu'u^{n-1}$
۶	$y = \frac{1}{v}$	$y' = \frac{-v'}{v^2}$
۷	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$
۸	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
۹	$y = \sqrt[m]{u^n}$	$y' = \frac{n.u'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$
۱۰	$y = f(u)$	$y' = u'.f'(u)$

مشتق‌پذیری در یک بازه

برای بررسی مشتق‌پذیری تابع در یک بازه می‌توان از تعاریف زیر استفاده نمود.
 تابع f را روی بازه‌ی (a, b) مشتق‌پذیر گویند، هرگاه در هر نقطه از این بازه مشتق‌پذیر باشد.
 تابع f را روی بازه‌ی $[a, b]$ مشتق‌پذیر گویند، هرگاه در بازه‌ی (a, b) مشتق‌پذیر بوده و در نقطه‌ی آن a مشتق راست و در نقطه‌ی b مشتق چپ داشته باشد.

تابع f را روی بازه‌ی $[a, b)$ مشتق‌پذیر گویند، هرگاه در بازه‌ی (a, b) مشتق‌پذیر بوده و در نقطه‌ی a مشتق راست داشته باشد.
 تابع f را روی بازه‌ی $(a, b]$ مشتق‌پذیر گویند، هرگاه در بازه‌ی (a, b) مشتق‌پذیر بوده و در نقطه‌ی b مشتق چپ داشته باشد.

مشتق مراتب بالاتر

تابع مشتق هر تابعی را مشتق مرتبه‌ی اول می‌نامند. حال اگر از مشتق تابعی، مشتق دیگری گرفته شود، مشتق مرتبه‌ی دوم بدست می‌آید.

تهیه کننده : جابر عامری

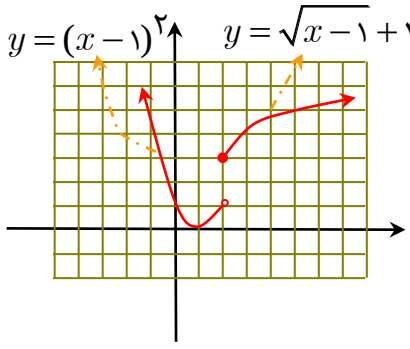
دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل چهارم

((ریاضی ۳))



درس ۲: مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه

۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	۱ $f(x) = \begin{cases} ax+1 & x < 0 \\ x^2+3x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ اگر $x=0$ مشتق پذیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید.
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	۲ مشتق پذیری تابع $f(x) = x^2 - 1 $ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید. (خارج کشور)
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	۳ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (خارج کشور) در تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ خط $x=0$ را می گویند.
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	۴ معادله‌ی نیم مماس راست تابع $f(x) = x^2 - 1 $ را در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر منحنی بنویسید.
۵/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	۵ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $y = [x]$ در صفر مشتق پذیر است.
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۱	۶ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}+2 & x \geq 2 \\ (x-1)^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت زیر است.  الف) آیا تابع f در نقطه‌ی $x=2$ مشتق پذیر است؟ ب) آیا تابع در بازه‌ی $(-\infty, 2)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟ پ) مشتق راست تابع f در نقطه‌ی $x=2$ را به دست آورید.
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. نقطه‌ی $(1,1)$ یک نقطه‌ی گوشه‌ای برای تابع $f(x) = 2 - x^2 $ است.
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۳	۸ با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم مماس چپ تابع $f(x) = x^2 - 4 $ را در $x=2$ بیابید.

۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر است.	۹
۱/۲۵ نمره	مرداد ۱۴۰۳	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x < 2 \\ 6x - 4 & x = 2 \\ 2\sqrt{x-1} + 6 & x > 2 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x = 2$ بررسی کنید.	۱۰
۵/۲۵ نمره	مرداد ۱۴۰۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x) = x $ در تمام نقاط حقیقی پیوسته است. پس در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است.	۱۱
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۴	شیب نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = x^2 - 4 $ در نقطه‌ی $x = 2$ را با استفاده از تعریف مشتق به-دست آورده، سپس معادله‌ی نیم‌مماس چپ را بنویسید.	۱۲

تابع مشتق

۱ نمره	شهریور ۱۴۰۲	اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، آنگاه به کمک تعریف مشتق نشان دهید: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	۱
-----------	----------------	--	---

محاسبه‌ی مشتق تابع

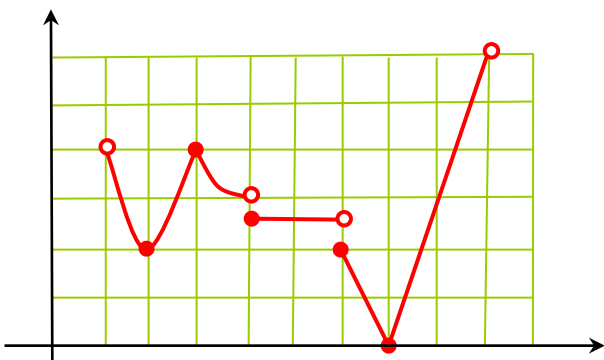
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند $f(2) = 3$ و $f'(2) = 5$ و $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ حاصل $(f \times g)'(2)$ را به دست آورید.	۱
۵/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). $f(x) = \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$	۲
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ باشد، آنگاه $(3f + 2g)'(1)$ برابر است.	۳
۱/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	مشتق توابع داده شده را بیابید. (ساده کردن الزامی نیست). (خارج کشور) الف) $f(x) = (x^2 - \sqrt{x} + 1)^4$ ب) $g(x) = \frac{3x^2 + x - 1}{2x - 3}$	۴
۱/۷۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = \frac{-2x + 3}{x + 4}$ ب) $g(x) = (\sqrt{3x+1})(x^2 + 2x)$	۵
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۱	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = x(x-1)(x+1)$ ب) $g(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^3$	۶
۲/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست). الف) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 4)$	۷

		$g(x) = \frac{-7x^2 + 1}{x - 6}$ $h(x) = (2x^5 - 1)^4$	
۲/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) $f(x) = \frac{(2x-1)^4}{x^3 + 8}$ $g(x) = \sqrt[3]{2x+1}$	۸
۲ نمره	دی ۱۴۰۲	مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1)(x^4 - 2x)$ $g(x) = \frac{3x+1}{x^5 - x + 1}$	۹
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۳	مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) $f(x) = (x-6)^3 + \frac{5x+3}{\sqrt{2x-1}}$	۱۰
۱ نمره	مرداد ۱۴۰۳	مشتق تابع مقابل را به دست آورید. $f(x) = \left(\frac{\sqrt{1-3x}}{7+x} \right)^6$	۱۱
۲ نمره	دی ۱۴۰۳	مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) $f(x) = (2x^6 + \sqrt{2x})^7$ $g(x) = \frac{2x^3 - 1}{-x^2 + 2x}$	۱۲
۱/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۴	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) $f(x) = (x^3 + 6x)\sqrt[3]{x}$ $g(x) = \frac{2x+3}{5x^2 + 4}$	۱۳
۱/۷۵ نمره	شهریور ۱۴۰۴	مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) $f(x) = (5\sqrt{x} + 2)\left(\frac{1}{x}\right)$ $g(x) = (2x^3 + 5)^4$	۱۴

مشتق تابع مرکب و قاعده‌ی زنجیری

۱ نمره	خرداد ۱۴۰۴	اگر $g'(2) = 3$ و $g(2) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = 4$ باشد. آنگاه مشتق تابع $h(x) = (f \circ g)(x)$ را در نقطه‌ی $x = 2$ به دست آورید.	۱
-----------	---------------	--	---

مشتق پذیری تابع در یک فاصله

۵/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۴		۱ نمودار تابع f در زیر رسم شده است. الف) تابع f در چند نقطه از دامنه اش مشتق ناپذیر است؟ ب) آیا تابع f روی بازه $[4, 6]$ مشتق پذیر است؟ چرا؟
--------------	---------------	---	---

مشتق مرتبه‌ی دوم تابع در یک نقطه

۵/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	۱ جمله‌ی زیر را کامل کنید. اگر $f(x) = -x^3$، آنگاه $f''(1)$ برابر است.	
۵/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۴	۲ جمله‌ی زیر را با عدد مناسب پر کنید. اگر $f(x) = 4x^5 + 2$، مقدار $f''(1)$ برابر با است.	

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل چهارم

((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۳)

آهنگ تغییر

الف: آهنگ متوسط تغییرات

آهنگ متوسط تغییرات تابع f نسبت به تغییرات x . وقتی x از $x = a$ تا $x = b$ تغییر کند. برابر است با:

$$\overline{f(x)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ب: آهنگ تغییرات آنی (لحظه‌ای)

حد آهنگ تغییرات متوسط تابع f نسبت به تغییرات x وقتی تغییر x خیلی ناچیز باشد، را آهنگ لحظه‌ای یا به اختصار آهنگ تغییر کمیت $y = f(x)$ به کمیت x در a می‌گویند.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$



تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل چهارم

((ریاضی ۳))



درس ۳: آهنگ تغییر

۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	۱ معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه‌ی $[0, 5]$ t بر حسب ثانیه) داده شده است. سرعت متوسط را در بازه‌ی زمانی $[0, 5]$ و سرعت لحظه‌ای را در لحظه‌ی $t = 2$ به دست آورید.
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	۲ نمودار مقابل نمایش فروش نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است. (الف) آهنگ تغییر متوسط N را وقتی t از ۲ به ۳ تغییر می‌کند، به دست آورید. (ب) چرا آهنگ تغییرات وقتی مقادیر t افزایش می‌یابد، در حال کاهش است.
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۱	۳ تابع $f(x) = 4\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی‌متر تا حدود شصت ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟
۱/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۱	۴ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله‌ی $h(t) = -4t^2 + 40t$ به دست می‌آید. (الف) سرعت متوسط در بازه‌ی $[2, 4]$ را بیابید. (ب) در چه زمانی سرعت لحظه‌ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	۵ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ در نقطه‌ای به طول $x = 2$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه‌ی $[-2, 0]$ است؟
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	۶ معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 + 2t + 3$ ، بر حسب متر در بازه‌ی زمانی $[0, 2]$ t (بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط، در بازه‌ی

		زمانی $[0, 2]$ ، با هم برابرند؟	
۷	دی ۱۴۰۲	معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^3 + t - 1$ است. الف) سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی $[1, 2]$ را محاسبه کنید. ب) سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه‌ی $t = 2$ را تعیین کنید.	۱/۵ نمره
۸	خرداد ۱۴۰۳	تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نظر بگیرید. الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را در بازه‌ی $[0, 2]$ به دست آورید. ب) حدود x را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f از آهنگ تغییر متوسط آن، در بازه‌ی $[0, 2]$ بزرگتر باشد.	۱/۲۵ نمره
۹	مرداد ۱۴۰۳	گنجایش ظرفی ۲۰ لیتر مایع است. در لحظه‌ی $t = 0$ ، سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه‌ی $v = 20\left(1 - \frac{t}{50}\right)^2$ به دست آید، تعیین کنید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم مایع برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه‌ی $[0, 50]$ می‌شود؟	۱/۲۵ نمره
۱۰	دی ۱۴۰۳	تابع $f(x) = x^3 + x - 5$ را در نظر بگیرید. الف) آهنگ تغییر متوسط تابع f را بازه $[0, 3]$ به دست آورید. ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در چه نقطه‌ای از بازه‌ی $[0, 3]$ برابر ۱۳ است؟	۲ نمره
۱۱	خرداد ۱۴۰۴	تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. در این تابع x مدت زمان پس از تولد بر حسب ماه است. آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی به دست آورید.	۵/۵ نمره
۱۲	شهریور ۱۴۰۴	اگر $f(x) = 2x^2 - 1$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع از $x = 2$ تا $x = 5$ را به دست آورید.	۱ نمره

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل پنجم

((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۱)

تابع صعودی و نزولی

الف : تابع f را روی بازه I یکنوا گوئیم، هرگاه تابع f روی بازه I یا صعودی و یا نزولی باشد.
ب : تابع f را روی بازه I اکیداً یکنوا گوئیم، هرگاه تابع f روی بازه I یا اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد.
توجه ۱ : طبق تعریف، تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

توجه ۲ : اگر تابع f روی بازه I اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) باشد، آنگاه روی این بازه صعودی (نزولی) است.

کاربرد مشتق در تشخیص یکنوایی توابع

فرض کنید تابع f بر روی بازه $[a, b]$ پیوسته و بر بازه (a, b) مشتق پذیر باشد. در این صورت :
الف : اگر به ازای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $f'(x) > 0$ ، آنگاه تابع بر $[a, b]$ اکیداً صعودی است.
ب : اگر به ازای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $f'(x) < 0$ ، آنگاه تابع بر $[a, b]$ اکیداً نزولی است.
ج : اگر به ازای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $f'(x) = 0$ ، آنگاه تابع بر $[a, b]$ ثابت است.

توجه ۱ : شرط استفاده از قضیه ی فوق آن است که تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر بازه (a, b) مشتق پذیر باشد.

توجه ۲ : برای تعیین یکنوایی یک تابع، از تابع مشتق گرفته و ریشه های مشتق را در صورت وجود به دست می آوریم. سپس تابع مشتق را در قالب یک جدول^۱ تعیین علامت می کنیم. در هر فاصله که علامت مشتق، مثبت بود، منحنی تابع در آن فاصله اکیداً صعودی و در هر فاصله که علامت مشتق منفی بود، منحنی تابع در آن فاصله اکیداً نزولی است.
توجه :

۱ : عکس این قضیه برای توابع یکنوا درست نیست. برای مثال تابع $f(x) = x^3$ صعودی اکید است. اما مشتق آن در $x = 0$ مثبت نیست.

۲ : ممکن است مشتق تابعی صفر شود و آن تابع صعودی یا نزولی (غیر اکید) باشد. مانند تابع $f(x) = [x]$

^۱ . این جدول را جدول تغییرات یا جدول رفتار تابع می نامند.

نقاط و مقدارهای اکسترمم مطلق (سراسری)

نقطه‌ی $c \in Df$ را نقطه‌ی **مینیمم مطلق** (سراسری) تابع f گویند، هرگاه به ازای هر $x \in Df$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. همچنین مقدار $f(c)$ را مقدار **مینیمم مطلق** تابع f می‌نامند. (به عبارت دیگر نقطه‌ی $(c, f(c))$ نقطه‌ی مینیمم مطلق تابع f است، هرگاه این نقطه از هیچ یک از نقاط واقع بر نمودار تابع f ، بالاتر نباشد).

نقطه‌ی $c \in Df$ را نقطه‌ی **ماکزیمم مطلق** (سراسری) تابع f گویند، هرگاه به ازای هر $x \in Df$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. همچنین مقدار $f(c)$ را مقدار **ماکزیمم مطلق** تابع f می‌نامند. (به عبارت دیگر نقطه‌ی $(c, f(c))$ نقطه‌ی ماکزیمم مطلق تابع f است، هرگاه این نقطه از هیچ یک از نقاط واقع بر نمودار تابع f ، پایین‌تر نباشد).

هر نقطه‌ی مینیمم مطلق یا ماکزیمم مطلق، نقطه‌ی **اکسترمم مطلق** تابع نامیده می‌شود.

توجه :

- ۱: اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه هم مقدار ماکزیمم و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.
- ۲: فرض کنید که تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ تعریف شده باشد. در این صورت در سه حالت زیر مقادیر اکسترمم مطلق تابع را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: وقتی مقادیر اکسترمم مطلق را در نقاط انتهایی بازه داشته باشیم.

حالت دوم: وقتی مقادیر اکسترمم مطلق را در نقاط درونی^۲ بازه داشته باشیم و در آن نقاط مقدار مشتق صفر باشد.

حالت سوم: وقتی مقادیر اکسترمم مطلق را در نقاط درونی بازه داشته باشیم و در آن نقاط تابع مشتق‌پذیر نباشد.

نقاط بحرانی تابع

نقطه‌ی $c \in Df$ را **نقطه‌ی بحرانی** تابع f می‌نامیم، هرگاه یا $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد یا $f'(c)$ وجود داشته باشد.

اگر نمودار تابع معلوم می‌باشد به راحتی نقاطی که تابع در آنها مشتق ناپذیر بوده و یا مشتق تابع در آنها صفر است را تعیین نمود. علاوه بر این برای تعیین نقاط بحرانی یک تابع، می‌توان مشتق تابع را بدست آورده و ریشه‌های صورت و مخرج آن را به عنوان نقطه‌ی بحرانی می‌پذیریم.

توجه : با توجه به این تعریف نتیجه می‌شود که اگر تابع f بر بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ تعریف شده باشد، چون تابع در نقاط $x = b$ و $x = a$ ، مشتق‌پذیر نیست، پس این نقاط، نقطه‌ی بحرانی محسوب می‌شوند.

نقاط و مقدارهای اکسترمم نسبی (موضعی)

اگر تابع f روی بازه‌ی باز I تعریف شده باشد و نقطه‌ای مانند $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. آنگاه گوییم تابع f در نقطه‌ی c **مینیمم نسبی** (موضعی) دارد. c را نقطه‌ی مینیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع می‌نامند.

اگر تابع f روی بازه‌ی باز I تعریف شده باشد و نقطه‌ای مانند $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. آنگاه گوییم تابع f در نقطه‌ی c **ماکزیمم نسبی** (موضعی) دارد. c را نقطه‌ی ماکزیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی تابع می‌نامند.

توجه : هر نقطه‌ی مینیمم نسبی یا ماکزیمم نسبی، نقطه‌ی **اکسترمم نسبی** تابع نامیده می‌شود.

- ۱: شرط لازم برای آن که c نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f باشد، آن است که تابع f در یک همسایگی

^۲. اگر تابع در بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شده باشد. آنگاه تمام نقاط بازه‌ی (a, b) را نقاط درونی و نقاط $x = a$ و $x = b$ را نقاط کناری می‌نامند. در بازه-
ی $[a, b]$ فقط $x = a$ و در بازه‌ی $[a, b]$ فقط $x = b$ مرزی و سایر نقاط درونی هستند.

(دو طرفه‌ی) نقطه‌ی C تعریف شده باشد. بنابراین اگر تابع f فقط روی بازه‌ی $[a, b]$ تعریف شده باشد، آنگاه نقاط a و b نمی‌توانند اکسترمم نسبی f باشند. (خلاصه اینکه نقاط انتهایی بازه‌ی $[a, b]$ ، اکسترمم نسبی نیستند.)

۲: لزومی ندارد که تابع f در نقاط اکسترمم نسبی خود، پیوسته یا مشتق پذیر باشد.

۳: اگر تابع f در نقطه‌ی C دارای اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$ است.

(یعنی در نقاط اکسترمم نسبی مشتق پذیر هر تابع ، مقدار عدد مشتق برابر با صفر و خط مماس در آن نقطه افقی است.)

۴: نقطه‌ی اکسترمم نسبی می‌تواند نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f نیز باشد.

۵: اگر C نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه‌ی آن باشد و تابع f در یک همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، آنگاه نقطه‌ی C نقطه‌ی اکسترمم نسبی f نیز هست.

۶: هر نقطه‌ی واقع بر یک تابع ثابت یا واقع بر بخشی از یک تابع که ثابت است. هم مینیمم نسبی و هم ماکزیمم نسبی محسوب می‌شود. (زیرا در هر دو تعریف اکسترمم نسبی صدق می‌کند.)

۷: هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی یک نقطه‌ی بحرانی f است. اما هر نقطه‌ی بحرانی درونی لزوماً اکسترمم نسبی (یا مطلق)

نیست. $x = 0$: نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x) = x^3$ است. اما اکسترمم f (نسبی یا مطلق) نیست.

قضیه‌ی فرما: اگر تابع f در نقطه‌ی C دارای اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد. آنگاه $f'(c) = 0$ است.

نتیجه: هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه‌ی بحرانی است.

آزمون مشتق اول (چگونگی تعیین نقاط اکسترمم نسبی تابع)

فرض کنید c نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد. $(a < c < b)$ و تابع f بر بازه‌ی $I = (a, b)$ پیوسته و بر این بازه بجز احتمالاً در c ، مشتق پذیر باشد. در این صورت:

الف: اگر f' روی (a, c) مثبت و روی (c, b) منفی باشد، آنگاه f در C ماکزیمم نسبی دارد.

ب: اگر f' روی (a, c) منفی و روی (c, b) مثبت باشد، آنگاه f در C مینیمم نسبی دارد.

ج: اگر f' روی (a, c) و (c, b) تغییر علامت ندهد، آنگاه f در C اکسترمم نسبی ندارد.

توجه کنید که f می‌تواند در $x = c$ مشتق پذیر ($f'(c) = 0$) یا مشتق ناپذیر ($f'(c)$ وجود ندارد) باشد. اما حتماً باید در این نقطه پیوستگی دو طرفه داشته باشد. در واقع با آزمون مشتق اول، اکسترمم‌های نسبی پیوسته‌ی توابع را می‌توان تعیین نمود.

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل پنجم

((ریاضی ۳))

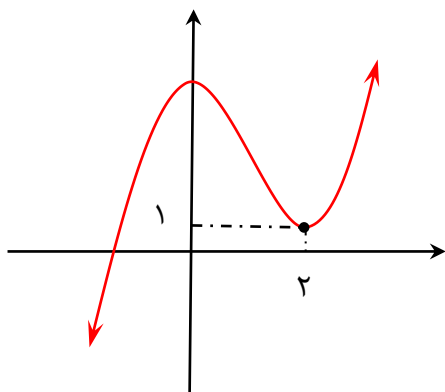


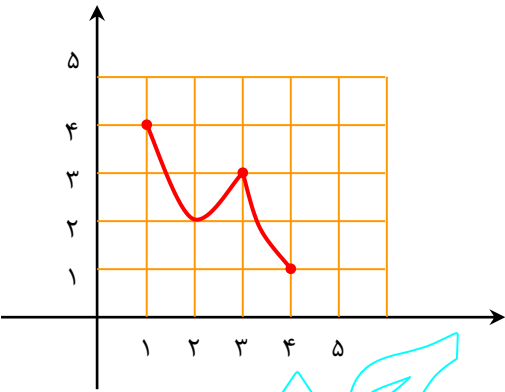
درس ۱: بررسی یکنوایی توابع و تعیین اکسترم‌های آن

۲ نمره	خرداد ۱۴۰۱	۱ اکسترم‌های نسبی تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$ را در صورت وجود به دست آورید.
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	۲ با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ ، مشخص کنید، تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید است؟
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	۳ بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = -2x^3 + 6x + 11$ در آن صعودی اکید باشد، را با استفاده از جدول تغییرات بیابید.
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۲	۴ با رسم جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 27x + 1$ ، مشخص کنید تابع در کدام بازه‌ها اکیداً صعودی است؟

نقاط بحرانی

۱/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	۱ تابع $y = x^3 - 3x + 2$ را در نظر بگیرید. نقاط بحرانی و مقادیر اکسترم‌های مطلق تابع را در صورت وجود در بازه $[0, 2]$ به دست آورید. (خارج کشور)
۰/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	۲ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر نقطه‌ی دلخواه از دامنه‌ی تابع ثابت، یک نقطه‌ی بحرانی است.
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۱	۳ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ به صورت مقابل رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.
۰/۲۵	خرداد	۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.



نمره	۱۴۰۲	هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه‌ی بحرانی آن تابع است.	
۱/۷۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	نقاط بحرانی تابع زیر را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$	۵
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۳	با توجه به نمودار مقابل، طول نقاط ماکزیمم نسبی، می‌نیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق نمودار تابع را بیابید. 	۶
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه‌ی بحرانی آن است.	۷
۱/۵ نمره	مرداد ۱۴۰۳	با رسم جدول تغییرات، تابع، طول نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی تابع زیر را در صورت وجود بیابید. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 15x + 4$	۸
۵/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۳	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. هر نقطه‌ی اکسترمم مطلق، اکسترمم نسبی نیز هست.	۹
۱/۷۵ نمره	دی ۱۴۰۳	با رسم جدول تغییرات تابع $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$ طول ماکزیمم و می‌نیمم نسبی تابع را در صورت وجود بیابید.	۱۰
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۴	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. نقطه‌ی به طول c از دامنه‌ی تابع f که در آن $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد را یک نقطه‌ی می‌نامیم.	۱۱
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۴	تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ را در نظر بگیرید. الف) بزرگترین بازه از دامنه که تابع f در آن نزولی اکید است را به دست آورید. ب) طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f را مشخص کنید.	۱۲
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۴	اگر $f(x) = x^3 + 4x$ ، مقدار اکسترمم‌های مطلق تابع در بازه‌ی $[-2, 1]$ را بیابید.	۱۳

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل پنجم

((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۲)

الف: معادله‌ی خط مماس بر منحنی

شیب خط مماس و همچنین معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ واقع بر منحنی را به کمک مشتق می‌توان تعیین کرد.

$$m = f'(a) \text{ شیب خط مماس}$$

$$y = m(x - a) + b \text{ معادله‌ی خط مماس}$$

ب: قاعده‌ی هوییتال

یعنی برای محاسبه‌ی حد کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ وقتی که $x \rightarrow a$ اگر به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآید، کسری تشکیل می‌دهیم که صورت آن مشتق صورت کسر داده شده و مخرج آن نیز مشتق مخرج کسر داده شده باشند و سپس حد کسر بدست آمده را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

توجه: اگر حد کسر جدید نیز به شکل $\frac{0}{0}$ در آید، عمل مشتق‌گیری را مجدداً تکرار می‌کنیم.

ج: روش‌هایی برای حل مسائل پارامتری

(۱) هر نقطه‌ی عادی واقع بر منحنی دارای یک خاصیت است و آن این است که مختصاتش در معادله‌ی منحنی صدق می‌کند. نقطه‌ی عادی نقطه‌ای است که هیچگونه ویژگی در مورد آن ذکر نشده باشد.

(۲) نقطه‌ی ماگزیمم یا مینیمم دارای دو خاصیت می‌باشد.

الف) مانند یک نقطه‌ی عادی در تابع صدق می‌کند.

ب) با فرض وجود مشتق مرتبه‌ی اول در نقطه‌ی داده شده، به ازاء طول این نقطه، مقدار مشتق مرتبه‌ی اول، برابر صفر می‌شود.
($y' = 0$)

(۳) نقطه‌ی عطف دارای دو خاصیت می‌باشد. (برای مطالعه)

الف) مانند یک نقطه‌ی عادی در تابع صدق می‌کند.

ب) با فرض وجود مشتق مرتبه‌ی دوم در نقطه‌ی داده شده، به ازاء طول این نقطه مقدار مشتق مرتبه‌ی دوم، برابر صفر می‌شود.
($y'' = 0$)

۳) نقطه‌ی تماس دارای دو خاصیت می‌باشد.

الف) مانند یک نقطه‌ی عادی در تابع صدق می‌کند.

ب) با فرض وجود مشتق مرتبه‌ی اول در نقطه‌ی داده شده، به ازاء طول این نقطه مقدار مشتق مرتبه‌ی اول، برابر شیب خط مماس می‌شود. $(y' = m)$

د : حل مسائل بهینه‌سازی

در صنعت و اقتصاد فهمیدن بیشترین سود، کمترین هزینه، کمترین سطح، کمترین فاصله، کمترین زمان و ... بسیار مورد توجه قرار می‌گیرد. هرگاه به دنبال کمترین یا بیشترین مقدار توابع باشیم، می‌توان از مفهوم مشتق تابع استفاده کنیم. برای حل این قبیل مسائل، ابتدا با توجه به صورت مسئله تابعی یک متغیره تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های مشتق مرتبه‌ی اول آن را تعیین می‌کنیم و اگر لازم باشد، جدول تغییرات رسم کنید. توجه داشته باشید که فقط ریشه‌هایی را می‌پذیریم که شرایط مسئله‌ی را داشته باشند و در دامنه‌ی اعتباری^۱ مسئله باشند.

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

^۱ . دامنه‌ی اعتباری، مجموعه‌ی مقادیری است که متغیر در آنها با معنی باشد. برای مثال وقتی گفته می‌شود که مساحت مربعی به ضلع x برابر $f(x) = x^2$ می‌باشد. دامنه‌ی اعتباری این تابع این است که x فقط یک عدد مثبت است.

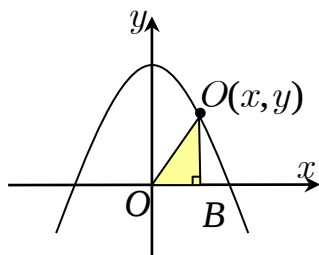
فصل پنجم

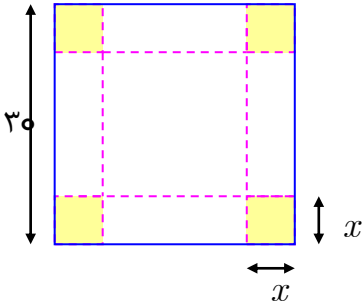
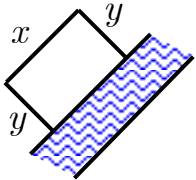
((ریاضی ۳))



درس ۲: بهینه سازی

۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه‌ی $5x - y = 10$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصل ضرب این دو عدد مینیمم گردد.	۱
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع ۳۰ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه‌ی جعبه را به اندازه‌ی x بر می‌گردانیم تا یک جعبه‌ی در باز ساخته شود، طوری که حجم آن به صورت $V = x(30 - 2x)^2$ است. مقدار x چقدر باشد، تا حجم جعبه حداکثر شود؟ (خارج کشور)	۲
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	نشان دهید در بین مستطیل‌هایی با محیط ۱۶ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند.	۳
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۱	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.	۴
۱/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	پنجره‌ای به شکل یک مستطیل و نیم دایره ای بر آن وجود دارد. طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط این پنجره ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.	۵
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۸ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.	۶
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۲	می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم، طوری که گنجایش آن دقیقاً ۹۰۰ سانتی متر مکعب باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \cong 3$)	۷
۱/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۳	مطابق شکل زیر، نقطه‌ی A در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 12 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه‌ی A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم الزاویه - OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۸



۱/۵ نمره	مرداد ۱۴۰۳	ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ سانتی متر را در نظر بگیرید. مطابق شکل می خواهیم از چهارگوشه ی آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین های مشخص شده در شکل، یک جعبه ی در باز بسازیم. تعیین کنید مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه، حداکثر مقدار ممکن گردد؟ 	۹
۱ نمره	دی ۱۴۰۳	طول مستطیلی را بیابید که مساحت آن ۱۶ سانتی متر مربع و محیط آن کمترین مقدار ممکن گردد.	۱۰
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۴	می خواهیم مطابق شکل مقابل، سه ضلع یک محوطه به شکل مستطیل را در کنار رودخانه نرده کشی کنیم. اگر تنها هزینه ی ۱۵۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، به کمک جدول تغییرات، بیشترین مساحت ممکن برای این مستطیل را محاسبه کنید. 	۱۱
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۴	غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه ی $C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27}$ به دست می آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود. (رسم جدول تغییرات الزامی است.)	۱۲

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل ششم

((ریاضی ۳))



مرور نامه درس (۱)

تفکر تجسمی (دوران و برش)

استفاده از تصویرسازی ذهنی به جای بکارگیری عبارات و جملات کلامی را تفکر تجسمی می‌نامند.

دوران حول یک محور

وقتی که شکل‌های هندسی متفاوتی در فضا حول یک محور دوران داده شوند، جسم‌های مختلفی ایجاد می‌کنند.

برش

شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، **سطح مقطع** آن جسم نامیده می‌شود.

آشنایی با مقاطع مخروطی

دو خط d و l در نقطه‌ای مانند A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط l دوران کامل دهیم. شکل حاصل را **سطح مخروطی** می‌نامند. در این حالت خط l را **محور**، نقطه‌ی A را **رأس** و خط d **مولد** این سطح مخروطی می‌گویند.

وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده شود. معمولاً سطح مقطع ایجاد شده یک منحنی است. از آنجا که منحنی‌ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، **مقاطع مخروطی** نامیده می‌شوند.

الف: اگر صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل **دایره** است.

ب: اگر صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس عبور نکند، شکل حاصل **بیضی** خواهد بود.

پ: اگر صفحه‌ی P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل **سه‌می** خواهد بود.

ت: اگر صفحه‌ی P ، سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند. شکل حاصل **هذلولی** خواهد بود.



تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل ششم

((ریاضی ۳))



درس ۱: تفکر تجسمی (دوران و برش)

۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	۱ درست‌ی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. جسم حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، مخروط نام دارد.
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	۲ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (خارج کشور) شکل حاصل از دوران یک نیم‌دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن یک است.
۵/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	۳ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، آن نامیده می‌شود.
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۴	۴ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌ی آن است.
۵/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۴	۵ درست‌ی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک نیم‌کره است.

مقاطع مخروطی

۵/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	۱ جمله‌ی زیر را کامل کنید. اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل است.
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۳	۲ جای خالی را با عبارت کامل کنید. اگر صفحه‌ی P در یکی از موقعیت‌ها با مولد مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند. شکل حاصل است.
۵/۲۵ نمره	مرداد ۱۴۰۳	۳ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. اگر صفحه‌ای سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس نگذرد، شکل حاصل را می‌نامیم.

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل ششم

((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۲)

معادله‌ی دایره

دایره مجموعه‌ی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت به یک فاصله‌ی ثابتی باشند. نقطه‌ی ثابت را مرکز دایره و فاصله‌ی ثابت را شعاع دایره می‌گویند.

معادله‌ی استاندارد دایره

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

نتیجه: در حالت خاص اگر مرکز دایره روی مبدأ مختصات باشد، معادله‌ی دایره به شکل زیر خواهد آمد.

$$x^2 + y^2 = R^2$$

معادله‌ی گسترده‌ی دایره

معادله‌ی دایره را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

این صورت از معادله‌ی دایره را **معادله‌ی گسترده** یا **معادله‌ی ضمنی** دایره می‌نامند.

توجه داشته باشید که اگر معادله‌ای $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ به شکل معلوم باشد. این معادله به شرطی معادله‌ی دایره است که

الف) ضرایب x^2 و y^2 برابر یک باشند. (یا دو عدد غیر صفر مساوی باشند).

ب) معادله شامل جمله‌ی xy نباشد.

ج) مقدار $\Delta = a^2 + b^2 - 4c$ مثبت باشد.

با این شرایط داریم:

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \text{ مختصات مرکز دایره}$$

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \text{ اندازه‌ی شعاع دایره}$$

روش تعیین وضعیت یک نقطه و یک دایره

می‌دانیم که وضعیت یک نقطه نسبت به یک دایره می‌تواند یکی از حالت‌های زیر باشد.

الف: نقاط خارج دایره: فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع بزرگتر است.

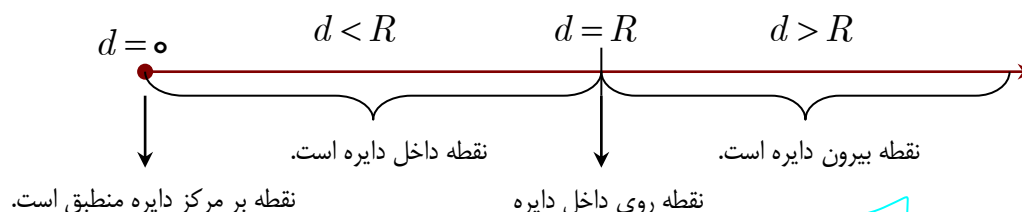
ب: نقاط روی دایره: فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره برابر شعاع است.

ج: نقاط داخل دایره: فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع کوچکتر است.

برای تعیین وضعیت یک نقطه نسبت به یک دایره، ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره را تعیین نموده و به دنبال آن

فاصله‌ی این نقطه تا مرکز دایره را بدست آورده و با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

توجه: برای بررسی وضعیت یک نقطه مانند P ، نسبت به یک دایره می‌توان از نمودار زیر نیز کمک گرفت که در آن $d = OP$



روش تعیین وضع نسبی یک خط و یک دایره

خط و دایره نسبت به هم دارای سه حالت زیر هستند.

۱. خط و دایره دو نقطه‌ی مشترک دارند. (مقاطع)

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط از شعاع دایره کمتر است و برعکس

۲. خط و دایره یک نقطه‌ی مشترک دارند. (مماس)

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است و برعکس

نتیجه: شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس بر آن دایره عمود است.

۳. خط و دایره هیچ نقطه‌ی مشترک ندارند.

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بیشتر است و برعکس

برای تعیین وضعیت نسبی یک خط و یک دایره، ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع آن را تعیین می‌کنیم. سپس فاصله‌ی مرکز را تا

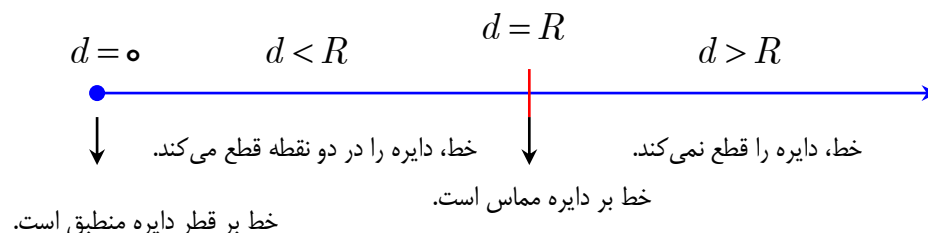
خط داده شده بدست می‌آوریم. با توجه به این فاصله و اندازه‌ی شعاع، وضعیت خط و دایره مشخص می‌شود.

توجه: اگر $O(\alpha, \beta)$ مختصات مرکز دایره باشد. فاصله‌ی مرکز دایره تا خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ بدین شکل

بدست می‌آید.

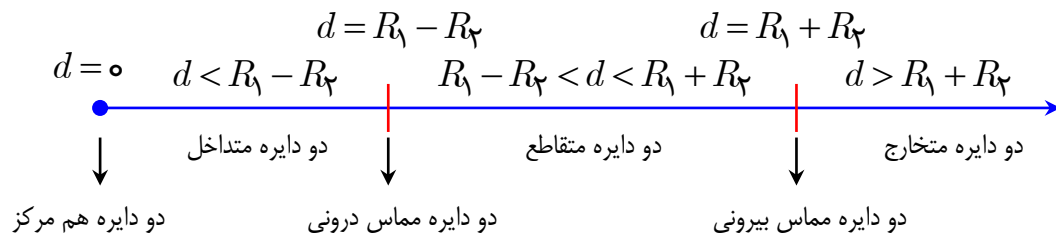
$$d = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

توجه: به کمک نمودار زیر نیز می‌توان وضع نسبی یک خط و یک دایره را نیز تعیین کرد. ($d = OH$)



روش تعیین وضع دو دایره نسبت به هم

توجه: اگر دایره‌ی C_1 به مرکز O_1 و شعاع R_1 و دایره‌ی C_2 به مرکز O_2 و شعاع R_2 و طول خط‌المرکزین دو دایره $d = O_1O_2$ باشد. با فرض اینکه $R_1 > R_2$ به کمک نمودار زیر نیز می‌توان حالت‌های مختلف دو دایره را تعیین کرد.



$$d = O_2O_1 = \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2}$$

اندازه‌ی خط‌المرکزین

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل ششم

((ریاضی ۳))



درس ۲: دایره

۵/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	کدامیک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ قرار دارد؟ الف) $(0, 0)$ ب) $(1, 0)$ پ) $(0, -1)$ ت) $(-1, 0)$	۱
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.	۲
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	دایره‌ی A به مرکز $O(-1, 2)$ و شعاع یک و دایره‌ی $B: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ را در نظر بگیرید. وضعیت دو دایره‌ی A و B را نسبت به هم مشخص کنید. (خارج کشور)	۳
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	معادله‌ی گسترده‌ی دایره‌ی $C(O, R)$ به شکل $x^2 + y^2 + 2y - 4x - 4 = 0$ را محاسبه کنید. الف) مختصات مرکز و شعاع دایره‌ی C را محاسبه کنید. ب) آیا نقطه‌ی $A(0, 3)$ روی محیط دایره‌ی C قرار دارد؟ چرا؟	۴
۱ نمره	دی ۱۴۰۱	معادله‌ی گسترده‌ی یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه‌ی شعاع دایره را بیابید.	۵
۱/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	اگر دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ و $(x-2)^2 + (y+1)^2 = m^2$ مماس خارج باشند، مقدار m را بیابید.	۶
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	وضعیت خط $3x + 4y = 0$ را نسبت به دایره به معادله $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$ ، مشخص کنید.	۷
۵/۷۵ نمره	دی ۱۴۰۲	معادله‌ی دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ است. مختصات مرکز این دایره را به دست آورید.	۸
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۳	اگر مرکز دایره‌ی $x^2 + y^2 + ax - 4y - 4 = 0$ ، نقطه‌ی $O(1, 2)$ باشد. الف) مقدار a را بیابید. ب) شعاع دایره را محاسبه کنید.	۹
۱ نمره	مرداد ۱۴۰۳	معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن $(1, 2)$ باشد.	۱۰
۱/۷۵ نمره	دی ۱۴۰۳	وضعیت دو دایره به معادله‌ی $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ را نسبت به هم بررسی کنید.	۱۱

۱ نمره	خرداد ۱۴۰۴	معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $(۱, -۲)$ بوده و بر خط $۴x - ۳y = ۲۵$ مماس باشد.	۱۲
۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۴	معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(۵, ۳)$ و $B(-۴, -۱)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشد.	۱۳

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

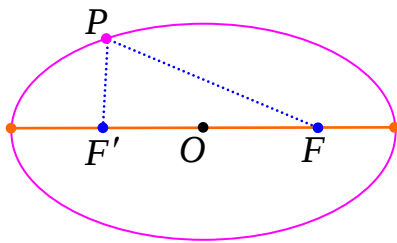
فصل ششم

((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۳)

بیضی



مکان هندسی نقاطی از صفحه، که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه‌ی ثابت مقدار ثابتی باشد، را **بیضی** می‌نامند.

دو نقطه‌ی ثابت را کانون‌های بیضی می‌نامند و آنها را با F و F' نمایش می‌دهیم. همچنین نقطه‌ی وسط پاره‌خط FF' را مرکز بیضی می‌گویند که در شکل مقابل با O نمایش داده شده است.

با توجه به این تعریف واضح است که اگر P یک نقطه روی بیضی باشد. در این صورت $PF + PF' = l$ یا $PF + PF' = 2a$

همواره $l = 2a$ می‌باشد. به همین دلیل است که عدد $2a$ را **ثابت بیضی** می‌نامند. توجه داشته باشید که :

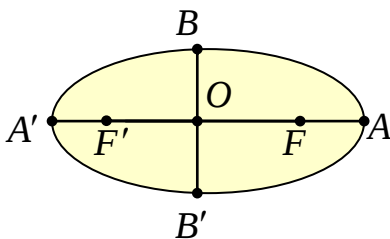
الف : مجموع فاصله‌های هر نقطه درون بیضی تا کانون‌ها از l کمتر است.

$$MF + MF' < l$$

ب : مجموع فاصله‌های هر نقطه بیرون بیضی تا کانون‌ها از l بیشتر است.

$$MF + MF' > l$$

اجزای بیضی



$$AA' = 2a \quad \text{قطر بزرگ}$$

$$BB' = 2b \quad \text{قطر کوچک}$$

$$FF' = 2c \quad \text{فاصله‌ی کانونی}$$

هر بیضی دارای دو قطر می‌باشد که یکی از دو کانون گذشته و دیگری عمود بر آن در مرکز بیضی است. قطری که از دو کانون می‌گذرد را قطر بزرگ (اطول) یا قطر کانونی می‌نامند و آنرا با $2a$ نمایش می‌دهند و قطر دیگر را قطر کوچک (اقصر) یا ناکانونی می‌گویند و آنرا با $2b$ نمایش می‌دهند.

اگر فاصله‌ی بین دو کانون را با $2c$ نمایش دهیم. نتیجه می‌شود که در هر بیضی رابطه‌ی زیر برقرار است.

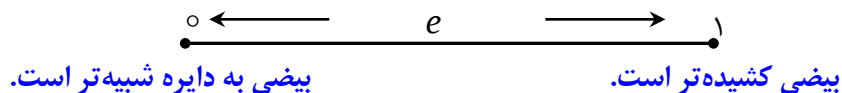
$$b^2 + c^2 = a^2$$

رابطه‌ی طلایی بیضی

نسبت $\frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز بیضی** می نامند و آنرا با e نمایش می دهند. واضح است که

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

در واقع خروج از مرکز بیضی نشان دهنده ی کشیدگی بیضی است. اگر e به صفر نزدیکتر باشد، بیضی به دایره شبیه تر است و اگر e به یک نزدیک شود، بیضی کشیده تر است.



قطرهای بیضی **محورهای تقارن** و مرکز بیضی **مرکز تقارن** آن است.

اگر قطر بزرگ بیضی موازی محور طول ها باشد، بیضی را **افقی** و اگر قطر بزرگ موازی محور عرض ها باشد، بیضی را **قائم** می نامند.

تهیه کننده : جابر عامری

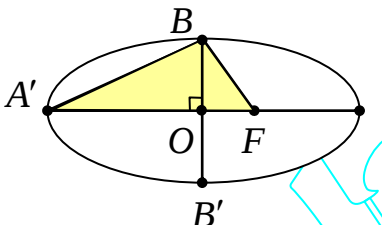
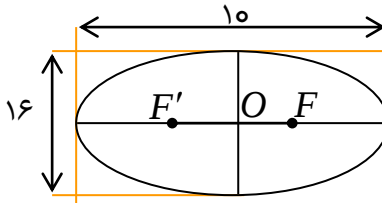
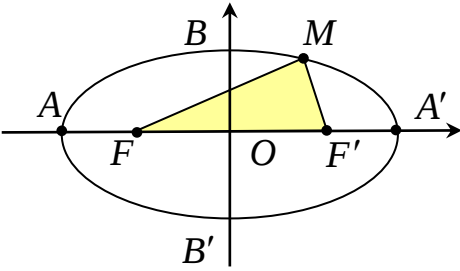
دبیر ریاضی دوره ی دوم متوسطه ، استان خوزستان

فصل ششم

((ریاضی ۳))



درس ۳: بیضی

۵/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله‌ی کانونی ۶ برابر است.	۱
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به ترتیب ۱۵ و ۸ باشد: (الف) مقدار $A'F$ را به دست آورید. (F کانون بیضی است.) (ب) مساحت مثلث هاشور خورده (مثلث BFA') چقدر است؟ 	۲
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام نادرست است. (خارج کشور) هر چه خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیکتر باشد، شکل بیضی کشیده‌تر است.	۳
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۱	اگر در یک بیضی داشته باشیم: $a = ۵$ و $b = ۳$ ، اندازه‌ی فاصله‌ی کانونی را محاسبه کنید.	۴
۵/۷۵ نمره	شهریور ۱۴۰۱	در بیضی مقابل، فاصله‌ی کانونی را محاسبه کنید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند.) 	۵
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۱	اگر در بیضی مقابل مختصات کانون $F'(۴, ۵)$ و مختصات رأس $B(۵, ۳)$ باشد: (الف) قطر بزرگ بیضی را بیابید. (ب) محیط مثلث MFF' را بیابید. 	۶

۱/۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۲	در بیضی مقابل، کانون‌ها به مختصات $F(۱,۵)$ و $F'(۱,۱)$ و یک رأس قطر بزرگ آن $A(۱,۶)$ می‌باشد. الف) فاصله‌ی کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید. ب) معادله‌ی قطر کوچک بیضی را بنویسید. پ) مساحت مثلث $B'FF'$ را بنویسید.	۷
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۲	مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی، نقاط $(۱,۶)$ و $(۱,-۲)$ است. اگر خروج از مرکز این بیضی $\frac{1}{2}$ باشد. فاصله‌ی کانونی آن را بیابید.	۸
۱/۷۵ نمره	دی ۱۴۰۲	معادله‌ی قطر کانون یک بیضی، $y = -۱$ و معادله‌ی قطر کوچک، $x = ۲$ است، اگر طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۱۲ و ۸ واحد باشند. مختصات مرکز و فاصله‌ی کانونی را به دست آورید؟	۹
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۳	در یک بیضی فاصله‌ی کانونی با طول قطر کوچک آن برابر است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.	۱۰
۱/۲۵ نمره	مرداد ۱۴۰۳	اگر خروج از مرکز یک بیضی $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و طول قطر کوچک آن ۱۰ باشد، آنگاه فاصله‌ی کانونی را محاسبه کنید.	۱۱
۵/۷۵ نمره	دی ۱۴۰۳	نمودار یک بیضی در شکل زیر رسم شده است. طول پاره‌خط OB را محاسبه کنید.	۱۲
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. هر چه خروج از مرکز بیضی کوچکتر و به صفر نزدیکتر باشد، شکل بیضی به شکل دایره شبیه‌تر است.	۱۳
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۴	کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ است. اگر اندازه‌ی نصف قطر بزرگ آن برابر ۵ باشد، اندازه‌ی قطر کوچک بیضی را به دست آورید.	۱۴
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۴	اگر خروج از مرکز یک بیضی $\frac{3}{5}$ و اندازه‌ی قطر بزرگ بیضی ۲۰ باشد، آن گاه فاصله‌ی کانونی بیضی را به دست آورید.	۱۵

فصل هفتم

((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۱)

پدیده‌ی تصادفی

هر پدیده یا آزمایش که نتیجه‌ی آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش‌بینی کرد را پدیده‌ی تصادفی می‌نامند.

فضای نمونه‌ای

مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای می‌نامند و آن را با S نمایش می‌دهند.

برآمد

هر یک از اعضای فضای نمونه‌ای را برآمد می‌گویند.

پیشامد تصادفی

هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای را پیشامد تصادفی نامیده می‌شود و آنرا نیز با یک حرف بزرگ لاتین مانند E نمایش می‌دهند.

اعمال روی پیشامدها

الف: اجتماع دو پیشامد A و B که با نماد $A \cup B$ نوشته می‌شود، پیشامدی است که با رخ دادن پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهد.

ب: اشتراک دو پیشامد A و B که با نماد $A \cap B$ نوشته می‌شود، پیشامدی است که با رخ دادن هر دو پیشامد A و B رخ دهد.

ج: تفاضل پیشامد B از پیشامد A که با نماد $A - B$ نوشته می‌شود، پیشامدی است که با رخ دادن A و رخ ندادن B رخ دهد.

د: اگر S فضای نمونه‌ای و E یک پیشامد تصادفی از آن باشد، پیشامدی را که متناظر با رخ ندادن E

می‌باشد، مکمل E می‌نامند و آن را با E' یا E^c نمایش می‌دهند. بدیهی است که $E' = S - E$

پیشامدهای ناسازگار

دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند، هرگاه هر دو با هم رخ ندهند. به عبارت دیگر اشتراک آنها تهی است.

$$A \cap B = \Phi$$

توجه: پیشامدهای A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n را دودو ناسازگار گوئیم، هرگاه هیچ دوتایی از آنها نتوانند با هم رخ دهند.

احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی

اگر E یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد. در این صورت، خارج قسمت تعداد اعضای پیشامد تصادفی E بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای نظیر آن یعنی S را احتمال وقوع پیشامد تصادفی E می‌نامند.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

اصول احتمال

برای هر پیشامد مانند E از فضای نمونه‌ای S ، احتمال وقوع E ، عددی حقیقی از بازه‌ی $[0, 1]$ می‌باشد و آن را با $P(E)$ نمایش می‌دهند. اصول احتمال عبارتند از:

اصل ۱: $P(S) = 1$

اصل ۲: برای هر دو پیشامد A و B که $A \cap B = \Phi$ داریم، $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

اصل ۳: برای هر دو پیشامد A و B که $A = B$ داریم، $P(A) = P(B)$

نتیجه:

الف: برای هر پیشامد مانند E از فضای نمونه‌ای S ، داریم $P(E') = 1 - P(E)$

ب: $P(\Phi) = 0$

روابط اساسی احتمال

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S می‌توان روابط زیر را نوشت:

الف) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ب) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

توجه: پیشامدهای A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n را دوتای ناسازگار باشند. در این صورت می‌توان نوشت:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$$

گوییم، هرگاه هیچ دوتایی از آنها نتوانند با هم رخ دهند.

احتمال شرطی

فرض کنید A و B دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B) > 0$ در این صورت اگر B رخ داده باشد، احتمال وقوع A را با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم و آنرا احتمال شرطی A به شرط وقوع B (یعنی B قبل از A رخ داده باشد) می‌گوییم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

پیشامدهای مستقل

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، بطوری که $P(A), P(B) > 0$ ، آنگاه این دو پیشامد را مستقل گوییم، هرگاه احتمال وقوع یکی از آنها بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. به عبارتی دو پیشامد A و B مستقل هستند

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

اگر دو پیشامد A و B مستقل نباشند، آنها را وابسته می‌گوییم.

نتیجه :

۱: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، در این صورت:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

۲: اگر A و B دو پیشامد وابسته باشند، در این صورت:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A).P(B|A) \\ &= P(B).P(A|B) \end{aligned}$$

۳: اگر حداقل یکی از دو پیشامد A و B تهی باشد. این دو پیشامد مستقل هستند.

۴: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه:

الف) $P(A|B) = P(A)$

ب) $P(B|A) = P(B)$

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل هفتم

((ریاضی ۳))



درس ۱: یادآوری مفاهیم مرتبط با احتمال

۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۱	مشخص کنید کدام یک از جمله‌ی زیر درست و کدام نادرست است. دو پیشامد A و B مستقل اند، هرگاه تساوی $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ برقرار است.	۱
۵/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۲	جمله‌ی زیر را کامل کنید. هرگاه برای دو پیشامد A و B ، داشته باشیم، $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ، آنگاه دو پیشامد A و B ، هستند.	۲
۵/۲۵ نمره	مرداد ۱۴۰۳	جمله‌ی زیر را با عبارت مناسب کامل کنید. دو پیشامد را گوییم، هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.	۳
۵/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۳	جمله‌ی زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. اگر دو پیشامد A و B با هم رخ ندهند، آنگاه دو پیشامد هستند.	۴
۵/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۴	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دو پیشامد A و B از هم مستقل هستند، هرگاه $A \cap B = \Phi$	۵

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل هفتم

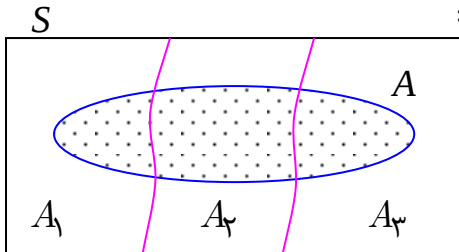
((ریاضی ۳))



مرورنامه درس (۲)

قانون احتمال کل

اگر A_1 و A_2 و A_3 یک افراز^۱ از S و A یک پیشامد از S باشد. در این صورت:



$$A \subseteq S$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$$

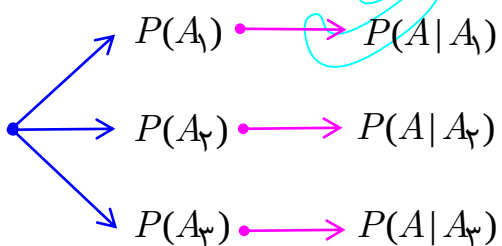
$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + P(A \cap A_3)$$

$$= P(A_1).P(A|A_1) + P(A_2).P(A|A_2) + P(A_3).P(A|A_3) = \sum_{i=1}^3 P(A_i).P(A|A_i)$$

تذکر: این تساوی را می توان برای تعداد محدودی پیشامد ناسازگار تعمیم داد.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i).P(A|A_i)$$

یادآوری: دو یا چند پیشامد را ناسازگار گویند، هرگاه اشتراک دو به دوی آنها تهی باشد.



توجه: می توان متناظر فرمول فوق نمودار زیر را رسم نمود. این نمودار که به نمودار درختی موسوم است، حل مسائلی که به کمک فرمول فوق قابل حل هستند را آسانتر می کند.

^۱ . اگر S یک مجموعه ی ناتهی باشد. گویند S به زیر مجموعه های ناتهی A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n افراز شده است. هرگاه اشتراک هر دوی آنها تهی بوده و اجتماع همه ی آنها برابر S باشد. برای مثال تبدیل مجموعه ی اعداد طبیعی به اعداد زوج و فرد، یک افراز محسوب می شود.

$$P(A) = P(A_1).P(A|A_1) + P(A_2).P(A|A_2) + P(A_3).P(A|A_3) = \sum_{i=1}^3 P(A_i).P(A|A_i)$$

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل هفتم

((ریاضی ۳))



درس ۲: احتمال کل

۱	دو ظرف یکسان داریم، اولی شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رؤیت در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس از ظرف دوم یک مهره به تصادف بیرون می‌آوریم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟	خرداد ۱۴۰۱	۲ نمره
۲	اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۵/۵۸ و نوزاد دختر ۵/۵۳ باشد و خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟ (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۳	چهار ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۵ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه‌ی مهره قرمزند. در ظرف سوم ۱۲ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز هستند. در ظرف چهارم هیچ مهره‌ی قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهره‌ی انتخابی قرمز باشد، چقدر است؟	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	دو ظرف یکسان داریم، ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۳ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره سبز و ۶ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره سبز است؟	دی ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۵	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی اول و B مجموعه‌ی اعداد طبیعی مرکب و $C = \dots$ باشند، آنگاه A و B و C یک افراز روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی است.	خرداد ۱۴۰۲	۵/۲۵ نمره
۶	مدرسه‌ی A ، سه برابر مدرسه‌ی B دانش آموز دارد. ۳۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه‌ی A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه‌ی B ، معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همه‌ی دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم. الف: با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه‌ی A و با چه احتمالی از مدرسه‌ی B است؟ ب: با چه احتمالی فرد انتخابی، معدلی بالای ۱۸ دارد؟	خرداد ۱۴۰۲	۱/۷۵ نمره
۷	دو جعبه داریم، درون یکی از آنها ۹ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب قرار دارد و درون جعبه‌ی دیگر ۱۵ لامپ قرار دارد که ۵ تای آنها معیوب است. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد، لامپ مورد نظر سالم باشد؟	شهریور ۱۴۰۲	۱/۲۵ نمره
۸	فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۵ درصد مرد و ۵۵ درصد زن باشد و شیوع یک بیماری ویروسی به ترتیب در این دو دسته ۴ درصد و ۶ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه	دی ۱۴۰۲	۱/۵ نمره

		انتخاب شود. با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟	
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۳	سه ظرف یکسان داریم، در اولین ظرف ۱۵ مهره قرار دارد که سه تایی آنها قرمز است. در ظرف دوم هیچ مهره‌ی قرمزی وجود ندارد و در ظرف سوم ۱۲ مهره داریم که ۶ تایی آنها قرمز است. با چشم بسته یک ظرف را انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است؟	۹
۱/۲۵ نمره	مرداد ۱۴۰۳	یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر «پشت» بیاید، ۳ سکه‌ی دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم و اگر «رو» بیاید ۲ سکه‌ی دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً دو سکه «رو» ظاهر شود، چقدر است؟	۱۰
۱/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۳	دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره قرمز و ۶ مهره زرد و ظرف دوم شامل ۴ مهره قرمز و ۷ مهره زرد است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب می‌کنیم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره زرد است؟	۱۱
۱/۲۵ نمره	خرداد ۱۴۰۴	دو جعبه‌ی یکسان داریم. درون یکی از آنها ۱۵ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب است و درون جعبه‌ی دیگر ۲۰ لامپ قرار دارد که ۵ تا از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن به تصادف بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ انتخابی سالم باشد؟	۱۲
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۴	مدرسه‌ی A چهار برابر مدرسه‌ی B دانش‌آموز دارد. ۳۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه‌ی A و ۲۰ درصد دانش‌آموزان مدرسه‌ی B معدل بالای ۱۸ دارند. اگر همه‌ی دانش‌آموزان هر دو مدرسه در محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم. الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه‌ی A و با چه احتمالی از مدرسه‌ی B است؟ ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدل بالای ۱۸ دارد؟	۱۳

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل اول

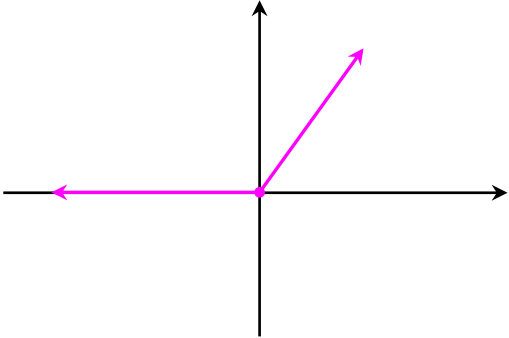
((ریاضی ۳))



درس ۱: توابع چند جمله‌ای

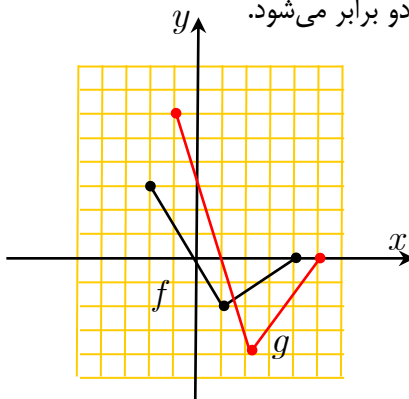
۱	درست، بیشترین توان متغیر برابر ۲ است.
۲	درست، مطابق تعریف این تابع یک تابع چند جمله‌ای درجه‌ی ۳ است.
۳	الف) درست، زیرا $y = 2x(1 - 3x^2) + 1 = 2x - 6x^3 + 1$ ب) نادرست. در این فاصله، نمودار تابع $y = x^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = x^3$ است.
۴	درست، طبق تعریف تابع چند جمله‌ای، این تابع، یک تابع چند جمله‌ای می‌باشد.

توابع یکنوا

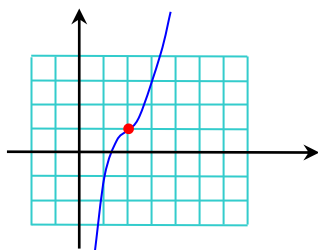
۱	درست، تابع $f(x) = x^3$ ، همواره اکیداً صعودی است.
۲	$f(x) = x + x = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$  مشاهده می‌شود که تابع f در بازه‌ی $(-\infty, 0]$ ثابت و در بازه‌ی $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است. به طور کلی تابع f در $(-\infty, +\infty)$ صعودی است.
۳	نادرست، ممکن است، تابع یک به یک نباشد. تابع اکیداً یکنوا یک به یک است.
۴	درست، در واقع، بیشمار تابع ثابت (موازی محور طول‌ها) وجود دارد.
۵	نادرست، تابع $y = \frac{1}{x}$ ، در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی است..
۶	۲؛ چون در این سهمی مقدار ضریب x^2 مثبت است، لذا سهمی رو به بالا است. این یعنی در سمت چپ طول رأس

	سهمی نزولی است. لذا حداکثر مقدار a برابر $2 = -\frac{-4}{2(1)} = x$ است.	
۷	ثابت؛ زیرا شرایط تعریف توابع صعودی و نزولی را دارد.	
۸	الف $\leftarrow 2$ ب $\leftarrow 1$ پ $\leftarrow 4$	
۹	درست؛ این تابع یک تابع ثابت است و هر تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.	

تبدیل نمودار توابع

۱	طبق ویژگی‌های تبدیلات عرض نقاط نمودار تابع f ابتدا در -۲ ضرب می‌شوند و سپس با ۳ جمع می‌شوند. لذا برد تابع بدین شکل تغییر خواهد کرد. $-۳ < y \leq ۱ \xrightarrow{\times(-۲)} ۶ > -۲y \geq -۲ \xrightarrow{+۳} ۹ > -۲y + ۳ \geq ۱ \rightarrow ۱ \leq -۲y + ۳ < ۹$ لذا گزینه‌ی پ درست است.																				
۲	الف) طول نقاط نمودار تابع f یک واحد اضافه می‌شوند ولی عرض نقاط دو برابر می‌شود.  <table><tr><td>f</td><td>x</td><td>-۲</td><td>۱</td><td>۴</td></tr><tr><td></td><td>y</td><td>۳</td><td>-۲</td><td>۰</td></tr></table> ↓ <table><tr><td>g</td><td>x</td><td>-۱</td><td>۲</td><td>۵</td></tr><tr><td></td><td>y</td><td>۶</td><td>-۴</td><td>۰</td></tr></table> ب) $[-۱, ۵]$	f	x	-۲	۱	۴		y	۳	-۲	۰	g	x	-۱	۲	۵		y	۶	-۴	۰
f	x	-۲	۱	۴																	
	y	۳	-۲	۰																	
g	x	-۱	۲	۵																	
	y	۶	-۴	۰																	
۳	طول نقاط دو برابر می‌شود ولی عرض نقاط تغییر نمی‌کند. $-۱ < x \leq ۳ \xrightarrow{\times ۲} -۲ < \frac{x}{۲} \leq ۶ \Rightarrow D_{f(\frac{x}{۲})} = (-۲, ۶]$ $R_{f(\frac{x}{۲})} = R_f = (۰, ۲]$																				
۴	$(-۱, ۴)$ ، زیرا فقط طول نقطه را نصف می‌کنیم.																				
۵	با توجه به مفاهیم تبدیل نمودار توابع می‌توان نوشت، $y = ۲\sqrt{x-۳}$																				
۶	دامنه و برد تابع f به صورت زیر است. $D_f = [-۵, ۰]$ و $R_f = [-۲, ۳]$ اکنون با توجه به اینکه برای رسم نمودار تابع g ، مطابق قوانین تبدیلات، طول نقاط را قرینه و عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم. پس : $D_f = [-۵, ۰] \rightarrow D_g = [۰, ۵]$ $R_f = [-۲, ۳] \rightarrow R_g = [-۴, ۶]$																				
۷	نادرست؛ نمودار تابع از انبساط افقی بدست می‌آید.																				

۸



طبق قوانین انتقال، کافی است، نمودار تابع $y = x^3$ را ابتدا دو واحد سمت راست و سپس یک واحد به سمت بالا منتقل می کنیم. در این صورت نمودار مقابل بدست می آید.

۹

درست؛ زیرا در چنین تبدیلاتی، عرض های نقاط هیچ تغییری نمی کنند.

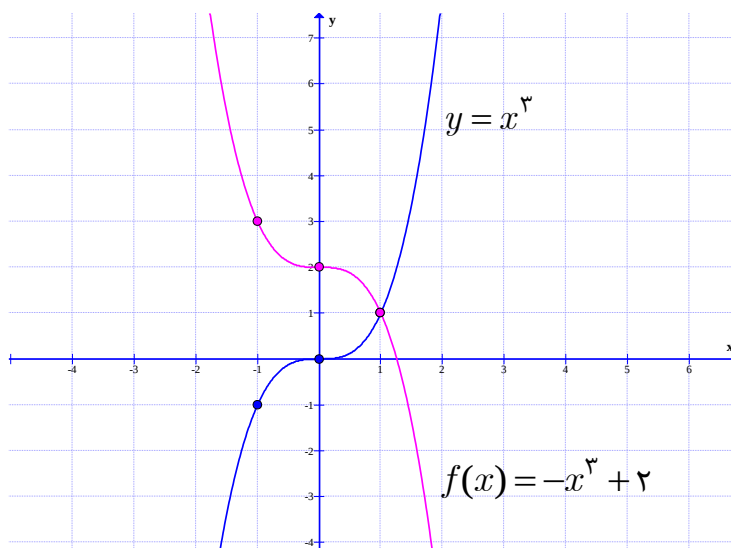
۱۰

طبق قوانین تبدیلات، عرض نقاط اصلی نمودار تابع $y = x^3$ را ابتدا قرینه و سپس با ۲ جمع می کنیم.

$y = x^3$	x	-۱	۰	۱
	y	-۱	۰	۱



$f(x) = -x^3 + 2$	x	-۱	۰	۱
	y	۳	۲	۱



با توجه به نمودار معلوم است که تابع $f(x) = -x^3 + 2$ نزولی اکید است.

۱۱

درست ؛ با توجه به قوانین تبدیلات دامنه های این دو تابع برابرند.

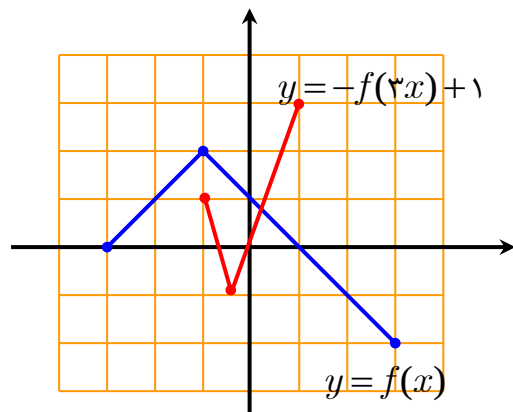
۱۲

طول نقاط نمودار تابع داده شده را بر ۳ تقسیم می کنیم ولی عرض نقاط را ابتدا قرینه و سپس با یک جمع می کنیم.

$y = f(x)$	x	-۳	-۱	۳
	y	۰	۲	-۲



$y = -f(3x) + 1$	x	-۱	$-\frac{1}{3}$	۱
	y	۱	-۱	۳



۱۳	درست ؛ عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ ، سه برابر می‌شوند.
۱۴	با توجه به قوانین تبدیلات، طول نقطه را بر ۳ تقسیم ولی عرض نقطه را با یک جمع می‌کنیم. لذا داریم: $A(-3, 2) \longrightarrow A'(-1, 3)$

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل اوّل

((ریاضی ۳))



درس ۲: ترکیب توابع

$x = ۳$ $\rightarrow ۲x - ۲ = ۲(۳) - ۲ = ۴$ $\rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + ۱} = \frac{۴}{\sqrt{۴} + ۱} = \frac{۴}{۳}$	۱
$f(x) = \frac{x + ۲}{x - ۳} \xrightarrow{x - ۳ = ۰ \rightarrow x = ۳} D_f = \mathbb{R} - \{۳\}$ $g(x) = \sqrt{x - ۱} \xrightarrow{x - ۱ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۱} D_g = [۱, +\infty)$ $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq ۱ \mid \sqrt{x - ۱} \neq ۳\} = [۱, +\infty) - \{۱۰\}$	۲
$D_f = \{۰, ۵, ۳, -۲\}$ $D_g = \{۱, ۳, ۹, -۱, ۷\}$ $f(۰) = -۱ \in D_g \rightarrow g(f(۰)) = g(-۱) = ۴$ $f(۵) = ۹ \in D_g \rightarrow g(f(۵)) = g(۹) = ۰$ $f(۳) = ۷ \in D_g \rightarrow g(f(۳)) = g(۷) = ۷$ $f(-۲) = ۴ \notin D_g \rightarrow \times$ $D_{g \circ f} = \{x \mid x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{۰, ۳, ۵\}$ $g \circ f = \{(۰, ۴), (۳, ۷), (۵, ۰)\}$	۳
الف) $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = [-۳, +\infty)$ $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq -۳ \mid \sqrt{x + ۳} \in \mathbb{R}\} = [-۳, +\infty)$ ب) $(g \circ f)(۱) = g(f(۱)) = g(۳) = \sqrt{۶}$	۴
الف) $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - ۱ \geq -۱\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۰\} = [۰, +\infty)$ ب) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - ۱) = \sqrt{(x - ۱) + ۱} = \sqrt{x}$	۵
$f(g(x)) = \frac{g(x)}{۲} - ۱ \xrightarrow{f(g(x)) = ۴x^۲ + ۱} \frac{g(x)}{۲} - ۱ = ۴x^۲ + ۱$ $\rightarrow g(x) - ۲ = ۸x^۲ + ۲ \rightarrow g(x) = ۸x^۲ + ۴$	۶

۷	$\frac{1}{3}$ زیرا؛ $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f\left(\frac{1}{1+1}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$						
۸	طبق قوانین تبدیلات، کافی است طول نقاط نمودار تابع f را در $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم. تا نمودار تابع g بدست آید. در این صورت نمودار مقابل به دست می آید. $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(2) = 0$						
۹	$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq -1 \mid \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} - \{1\}\}$ $= \{x \geq -1 \mid x-1 \neq 1\} = \{x \geq -1 \mid x \neq 2\} = [-1, +\infty) - \{2\}$						
۱۰	(الف) $D_f = (2, +\infty] \quad \text{و} \quad D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ $= \{x \geq 2 \mid \sqrt{x-2} \neq 2\} = \{x \geq 2 \mid x \neq 6\} = [2, +\infty) - \{6\}$ (ب) $f^{-1}(2) = \alpha \rightarrow f(\alpha) = 2 \rightarrow \frac{\alpha+1}{\alpha-2} = 2 \rightarrow 2\alpha - 4 = \alpha + 1 \rightarrow \alpha = 5$ $\rightarrow f^{-1}(2) = 5$ $(g \circ f^{-1})(2) = g(f^{-1}(2)) = g(5) = \sqrt{5-2} = \sqrt{3}$						
۱۱	$f(x) = 3\sqrt{x} + 2 \rightarrow f(g(x)) = 3\sqrt{g(x)} + 2$ $\frac{f(g(x)) = 3x^2 - 4}{\rightarrow 3\sqrt{g(x)} + 2 = 3x^2 - 4} \rightarrow \sqrt{g(x)} = x^2 - 2$ $\rightarrow g(x) = (x^2 - 2)^2 \quad ; \quad x \geq \sqrt{2}$						
۱۲	$D_f = \{-2, 0\} \quad \text{و} \quad x + 5 \geq 0 \rightarrow x \geq -5 \Rightarrow D_g = (-5, +\infty)$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>$x \in D_f$</td><td>$f(x)$</td></tr> <tr> <td>-2</td><td>$4 \in D_g$</td></tr> <tr> <td>0</td><td>$-1 \in D_g$</td></tr> </table> $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{-2, 0\}$ $(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(4) = \sqrt{4+5} = 3$ $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = \sqrt{-1+5} = 2$	$x \in D_f$	$f(x)$	-2	$4 \in D_g$	0	$-1 \in D_g$
$x \in D_f$	$f(x)$						
-2	$4 \in D_g$						
0	$-1 \in D_g$						

فصل اوّل

((ریاضی ۳))



درس ۳ : تابع وارون

$f(۲) = ۳ \rightarrow f^{-۱}(۳) = ۲$	۱
$(f \circ g)(x) = x$ و $(g \circ f)(x) = x$ کافی است که نشان دهیم، $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-\frac{۲x+۶}{۷}) = -\frac{۷}{۲}(-\frac{۲x+۶}{۷}) - ۳ = \frac{۲x+۶}{۲} - ۳ = \frac{۲x}{۲} = x$ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-\frac{۷}{۲}x - ۳) = -\frac{۲(-\frac{۷}{۲}x - ۳) + ۶}{۷} = -\frac{(-۷x - ۶) + ۶}{۷} = x$	۲
$y = \sqrt[۳]{x}$	۳
$f(x) = ۲x^۳ - ۱ \xrightarrow{f^{-۱}(۱۵)=\alpha \rightarrow f(\alpha)=۱۵} ۲\alpha^۳ - ۱ = ۱۵ \rightarrow \alpha = ۲$	۴
می‌دانیم که $(f \circ f^{-۱})(x) = x$ ، پس : $(f \circ f^{-۱})(۵) = ۵$	۵
تابع $f(x) = x^۲ + ۴x + ۳$، یک سهمی است و دامنه‌ی آن، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. این تابع در دامنه‌اش یک به یک نیست و وارون‌پذیر نمی‌باشد، ولی در بازه‌ی $[-۲, +\infty)$ یک به یک و وارون‌پذیر است. $f(x) = x^۲ + ۴x + ۳ \rightarrow f(x) = (x^۲ + ۴x + ۴) - ۱ \rightarrow f(x) = (x + ۲)^۲ - ۱$ رأس سهمی $(-۲, -۱)$، می‌باشد. برد این تابع نیز به شکل $R_f = [-۱, +\infty)$ است. برای تعیین وارون تابع، به شکل زیر عمل می‌کنیم. $y = (x + ۲)^۲ - ۱$ $\xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = (y + ۲)^۲ - ۱ \rightarrow x + ۱ = (y + ۲)^۲ \rightarrow \sqrt{x + ۱} - ۲ = y$ $\Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{x + ۱} - ۲$ $D_{f^{-۱}} = R_f = [-۱, +\infty)$	۶
$y = -x^۲ - ۲ \xrightarrow{x \geq 0, x \leftrightarrow y} x = -y^۲ - ۲$ $\rightarrow y^۲ = -x - ۲ \rightarrow y = \sqrt{-x - ۲} \rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{-x - ۲}$ $-x - ۲ \geq 0 \rightarrow x + ۲ \leq 0 \rightarrow x \leq -۲$ $\Rightarrow D_{f^{-۱}} = (-\infty, -۲]$	۷

	توجه: دامنه‌ی تابع f^{-1} برابر برد تابع f در محدوده‌ی تعیین شده است.	
۸	$f(x) = \sqrt{x+4} - 1 \xrightarrow{x \geq -4} R_f = [-1, +\infty) \rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty)$ $f(x) = \sqrt{x+4} - 1 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \sqrt{y+4} - 1 \rightarrow x+1 = \sqrt{y+4}$ $\rightarrow (x+1)^2 = y+4 \rightarrow y = (x+1)^2 - 4 \rightarrow f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 4$	
۹	درست؛ زیرا $f(x) = 4 + \sqrt{x-1} \rightarrow D_f = [1, +\infty), R_f = [4, +\infty)$ $\rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = [4, +\infty)$ و لذا $D_{(f^{-1} \circ f)} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f^{-1}}\} = \{x \geq 1 \mid (4 + \sqrt{x-1}) \geq 4\} = [1, +\infty)$	
۱۰	روش دوم: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 + \sqrt{x-2}) = (1 + \sqrt{x-2})^3 - 1$ $(g \circ f)^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x+1} - 1$ $(g \circ f)^{-1}(7) = 2 + \sqrt[3]{7+1} - 1 = 2 + \sqrt[3]{8} - 1 = 2 + \sqrt[3]{2-1} = 2 + 1 = 3$ روش سوم: قرار می‌دهیم. $(g \circ f)(\alpha) = 7 \text{ لذا } (g \circ f)^{-1}(7) = \alpha$ $(g \circ f)(\alpha) = 7 \rightarrow g(f(\alpha)) = 7 \rightarrow g(1 + \sqrt{\alpha-2}) = 7$ $\rightarrow (1 + \sqrt{\alpha-2})^3 - 1 = 7 \rightarrow (1 + \sqrt{\alpha-2})^3 = 8 \rightarrow 1 + \sqrt{\alpha-2} = 2$ $\rightarrow \sqrt{\alpha-2} = 1 \rightarrow \alpha - 2 = 1 \rightarrow \alpha = 3$	
۱۱	نادرست؛ زیرا تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ یک به یک است، ولی نه صعودی و نه نزولی است.	
۱۲	(الف) $D_f = [2, +\infty)$ $D_{f^{-1} \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f^{-1}}\} = \{x \in D_f \mid f(x) \in R_f\} = D_f = [2, +\infty)$ (ب) $f^{-1}(\delta) = \alpha \rightarrow f(\alpha) = \delta \rightarrow \sqrt{\alpha-2} = \delta \rightarrow \alpha - 2 = 2\delta \rightarrow \alpha = 2\delta + 2$	
۱۳	چون $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3$ طول رأس سهمی است. لذا تابع در بازه‌ی $(-\infty, 3]$ یک به یک بوده و وارون‌پذیر است. در نتیجه می‌توان نوشت:	

$$f(x) = x^2 - 6x \rightarrow f(x) = (x^2 - 6x + 9) - 9 \rightarrow f(x) = (x - 3)^2 - 9$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = (y - 3)^2 - 9 \rightarrow x + 9 = (y - 3)^2 \rightarrow \pm \sqrt{x + 9} = y - 3$$

$$\rightarrow 3 \pm \sqrt{x + 9} = y$$

اکنون با برای روی جواب بدست آمده، وارون این تابع را به صورت زیر می پذیریم.

$$\rightarrow f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x + 9}$$

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل دوم

((ریاضی ۳))



درس ۱ : توابع متناوب

چون برد تابع $y = a \sin(bx) + c$ بازه‌ی $[-۴, ۴]$ است. پس : $\max(f) = ۴$ و $\min(f) = -۴$ از طرفی می‌توان نوشت : $a = \pm \frac{\max(f) - \min(f)}{۲} = \pm \frac{۴ - (-۴)}{۲} = \pm ۴$ $b = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$ $c = \frac{\max(f) + \min(f)}{۲} = \frac{۴ + (-۴)}{۲} = ۰$ پس می‌توان گفت که این تابع به یکی از شکل‌های زیر است. $f(x) = ۴ \sin \pi x$ یا $f(x) = -۴ \sin \pi x$	۱
مقدار ماکزیمم $\max(f) = a + c = ۲ + ۱ = ۳$ مقدار می‌نیمم $\min(f) = - a + c = -۲ + ۱ = -۱$ دوره‌ی تناوب $T = \frac{۲\pi}{ b } = \frac{۲\pi}{۲}$	۲
دوره‌ی تناوب $T = \frac{۲\pi}{ b } = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$ مقدار ماکزیمم $\max(f) = a + c = ۳ + ۲ = ۵$ مقدار می‌نیمم $\min(f) = - a + c = -۳ + ۲ = -۱$	۳
دوره‌ی تناوب $۲T = \frac{۲\pi}{۲} - (-\frac{\pi}{۲}) = ۴\pi \rightarrow T = ۲\pi$ $b = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۲\pi} = ۱$ $c = \frac{M + m}{۲} = \frac{۴ + (-۲)}{۲} = ۱$	۴

$a = \pm \frac{M - m}{2} = \pm \frac{4 - (-2)}{2} = 3 \rightarrow a = \pm 3$ در این صورت داریم $y = 3 \cos x + 1$ یا $y = -3 \cos x + 1$ که با بررسی نقاط واضح است که پاسخ $y = 3 \cos x + 1$ قابل قبول نیست.	
$T = \frac{2\pi}{ b } \rightarrow T = 4\pi \rightarrow \frac{2\pi}{ b } = 4\pi \rightarrow b = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$ $a = \pm \frac{M - m}{2} = \pm \frac{3 - (-1)}{2} = \pm 2 \rightarrow a = \pm 2$ با توجه به نمودار تابع، مقدار ab باید عددی منفی شود، بنابراین $ab = -1$ باشد.	۵
مقدار ماکزیمم $\max(f) = a + c = -1 + \sqrt{3}$ مقدار می نیمم $\min(f) = - a + c = -(-1) + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$ دوره‌ی تناوب $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$	۶
$\max(f) = a + c \rightarrow 6 = a + 3 \rightarrow a = 3$ و $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$	۷
(الف) $\begin{cases} M = a + c \xrightarrow{M=9} a + c = 9 \\ m = - a + c \xrightarrow{m=3} - a + c = 3 \end{cases} \rightarrow 2c = 12 \rightarrow c = 6 \rightarrow a = 9 - 6 = 3$ (ب) $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$	۸
$a = \pm \frac{M - m}{2} \rightarrow a = \pm \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}}{2} = \pm \frac{1}{3}$ $c = \frac{M + m}{2} \rightarrow c = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{2} = 1$ $T = \frac{2\pi}{ b } \rightarrow b = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T = 2(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \pi} b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ و لذا تابع $y = a \sin(bx) + c$ به یکی از شکل‌های زیر خواهد بود. $y = a \sin(bx) + c = \pm \frac{1}{3} \sin(2x) + 1$	۹

توجه کنید که این توابع را با فرض $b = 2$ نوشته شده‌اند و اگر قرار دهیم $b = -2$ باز همین توابع به دست می‌آیند.	
$\min(f) = - a + c \rightarrow -2 + c = 4 \rightarrow c = 6$ $T = \frac{2\pi}{ b } \xrightarrow{T=6\pi} \frac{2\pi}{ b } = \frac{\pi}{2} \rightarrow b = 4$	۱۰
$\max(f) = 4 \rightarrow a + 2 = 4 \rightarrow a = 2 \xrightarrow{a < 0} a = -2$ $T = \frac{2\pi}{ b } \xrightarrow{T=6\pi} \frac{2\pi}{ b } = 6\pi \rightarrow b = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$ چون تابع به سادگی $f(x) = a \cos(bx)$ بر خلاف $f(x) = a \sin(bx)$ از مبدأ مختصات نمی‌گذرد. پس با توجه به نمودار، تابع مورد نظر کسینوسی است. لذا $f(x) = a \cos(bx) + 2 \rightarrow f(x) = -2 \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + 2$	۱۱
$\max(f) = a + c = -3 + 1 = 4$ $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{ \frac{\pi}{2} } = \frac{4\pi}{\pi} = 4$	۱۲

تابع تانژانت

۱	نادرست، دوره‌ی تناوب تابع $y = \tan x$ برابر $T = \pi$ است.
۲	در فاصله‌ی داده شده، هر چه اندازه‌ی زاویه‌ی α از $\frac{\pi}{4}$ بیشتر شود. مقدار $\tan \alpha$ بسیار بالاتر از یک می‌شود، در حالی مقدار $\cos \alpha$ به صفر نزدیک می‌شود. لذا در این فاصله $\tan \alpha > \cos \alpha$
۳	نادرست؛ در این بازه نمی‌توان صحبت از یکنوایی تابع کرد. زیرا این بازه، شامل نقاطی خارج از دامنه‌ی تابع است.
۴	درست؛ تابع تانژانت در هر دوره‌ی تناوب آن صعودی اکید است ولی در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی می‌باشد.
۵	مجموعه‌ی اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$)

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل دوم

((ریاضی ۳))



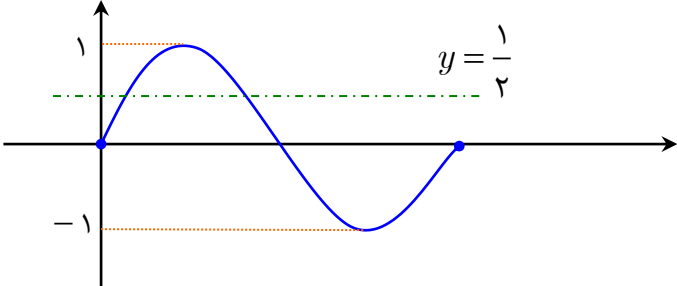
درس ۲: روابط مثلثاتی

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \xrightarrow{\alpha=15^\circ} \cos^2(15) = \frac{1}{2}(1 + \cos 30)$ $\rightarrow \cos^2(15) = \frac{1}{2}(1 + \cos 30)$ $\rightarrow \cos^2(15) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ $\rightarrow \cos^2(15) = \frac{1}{2}\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)$ $\rightarrow \cos^2(15) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ $\rightarrow \cos(15) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$	۱
$\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \times 15) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	۲ درست ، زیرا ؛
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 - \frac{8}{25} = \frac{17}{25}$	۳ $\frac{17}{25}$ ، زیرا ؛
$\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2}(2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) = \frac{1}{2}(\sin 30^\circ) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$	۴ $\frac{1}{4}$ ، زیرا ؛

$A = \cos^2 22/5^\circ - \sin^2 22/5^\circ = \cos 2(22/5^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	۵
---	---

معادلات مثلثاتی

روش اول: $k \in \mathbb{Z}$ $\sin 2x = \sin x \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \end{cases}$ روش دوم: $k \in \mathbb{Z}$ $\sin 2x = \sin x \rightarrow \sin 2x - \sin x = 0 \rightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x = 0$ $\rightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0$ $\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \\ 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{3}} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$	۱
$2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0 \rightarrow \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{4}} \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$	۲
$(1 - 2 \sin^2 x) - 3 \sin x + 4 = 0 \rightarrow -2 \sin^2 x - 3 \sin x + 5 = 0$ $\rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{5}{2} \rightarrow (\times) \\ \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$	۳
$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$	۴
$\cos 3x - \cos x = 0 \rightarrow \cos 3x = \cos x$ $\rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \rightarrow \begin{cases} 2x - x = 2k\pi \rightarrow x = 2k\pi \\ 2x + x = 2k\pi \rightarrow 3x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$	۵

با انتخاب مقادیر صحیح برای k به سادگی معلوم می‌شود که $x = \frac{2\pi}{3}$، تنها جواب این معادله، در بازه‌ی $(0, \pi)$ می‌باشد.	
$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 \rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3}$ $\alpha = \frac{\pi}{3} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$	۶
نادرست، خط $y = \frac{1}{2}$، نمودار تابع $y = \sin x$ را در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$، در دو نقطه قطع می‌کند. به نمودار زیر توجه کنید. 	۷
$2 \sin 4x = 1 \rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2}$ $\alpha = \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \\ 4x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$	۸
نادرست؛ بیشمار زاویه وجود دارد که مقدار کسینوس آنها $\frac{2}{5}$ است.	۹
$\cos(2x) = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ و انتخاب مقدار صحیح برای k نتیجه می‌شود که جواب‌های $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ در بازه‌ی $(0, \pi)$ قرار دارند.	۱۰
$\cos 2x - 13 \cos x - 6 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - 1 - 13 \cos x - 6 = 0$ $\rightarrow 2 \cos^2 x - 13 \cos x - 7 = 0 \xrightarrow{\Delta = 169 + 56 = 225} \cos x = \frac{13 \pm 15}{4}$ $\rightarrow \cos x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}, \quad \cos x = \frac{28}{4} = 7 \text{ (غیر ممکن)}$ $\cos x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$	۱۱

$\cos^2 x - 3 \cos x - 1 = 0 \rightarrow (2 \cos^2 x - 1) - 3 \cos x - 1 = 0$ $\rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$ $\rightarrow \frac{1}{2} (2 \cos x - 4)(2 \cos x + 1) = 0$ $\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} \cos x = 2 \quad (\times) \\ \cos x = -\frac{1}{2} \quad \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$	۱۲
۲؛ زیرا در بازه‌ی $(0, \pi)$ نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{3}$ همدیگر را دو نقطه قطع می‌کنند.	۱۳
$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\times 2} 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$	۱۴
$\cos^2 x - 2 \cos x = 0 \rightarrow \cos x (\cos x - 2) = 0$ $\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x - 2 = 0 \rightarrow \cos x = 2 \quad (\times) \end{cases}$	۱۵

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل سوم

((ریاضی ۳))



درس ۱ : تقسیم چند جمله ای ها

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$ $R = 2(3)^2 - 5(3) + 1 = 18 - 15 + 1 = 4$	۱
$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ $\rightarrow P(1) = 2(1)^3 - (1)^2 + 1 = 2$	۲ درست؛
$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$ $f(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - 3(-2) - 10 = -16 + 20 + 6 - 10 = 0$	۳ صفر؛ زیرا
$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$ $R = 4(-1)^3 - 5(-1) + 2 = -4 + 5 + 2 = 3$	۴ ۳؛ زیرا

حدهای مبهم

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 7x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{\frac{1}{2}(2x-6)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(2x-1)}$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{2x-1} = \frac{3-2}{2(3)-1} = \frac{1}{5}$	۱
$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-3}{x} = \frac{-6}{-3} = 2$	۲
$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \times \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{x - 9} \times \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}$	۳

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{x} + 1)}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{(1 + 1)(\sqrt{1} + 1)} = \frac{1}{4}$	۴
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(\sqrt[3]{x})^3 - (1)^3} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} \times (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)$ $= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1) = 3$	۵
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x+1} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x+1} - 2}{x - 1} \times \frac{\sqrt[3]{3x+1} + 2}{\sqrt[3]{3x+1} + 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x+1) - 8}{x - 1} \times \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 7}{x - 1} \times \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1} + 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)}{x - 1} \times \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} 3 \times \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1} + 2} = 3 \times \frac{1}{2 + 2} = \frac{3}{4}$	۶
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} \times (\sqrt{x} + 1) = 2$	۷
$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x + 2}{\sqrt[3]{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x + 2}{\sqrt[3]{x} + 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}$ $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x + 2}{\sqrt[3]{x^3} + (1)^3} \times (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x + 2)}{x + 1} \times (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)$ $= \lim_{x \rightarrow -1} (x + 2) \times (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1) = 1(1 + 1 + 1) = 3$	۸
$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}$ $= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{x - 8} \times (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) = \sqrt[3]{64} + 2\sqrt[3]{8} + 4 = 12$	۹

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}(2x - 2)(2x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{2(1) - 1}{(1)^2 + (1) + 1} = \frac{1}{3}$	۱۰
---	----

همسایگی یک نقطه

درست	۱
بازه‌ی $(-2, 5)$ ، یک همسایگی چپ برای عدد صفر است.	۲
۷؛ زیرا تمام نقاط بازه در سمت راست عدد ۷ قرار می‌گیرند.	۳
نادرست؛ در واقع این مجموعه یک همسایگی راست عدد ۲ است.	۴

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل سوم

((ریاضی ۳))



درس ۲: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

با توجه به نمودار داده شده، واضح است که	۱
$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 2 & \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 \\ \text{پ)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= +\infty & \text{ت)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -\infty \end{aligned}$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$	۲
$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= -1 & \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= +\infty \end{aligned}$	۳
$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2})^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{5x+4} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{5x} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$	۴
$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= -\infty & \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= +\infty & \text{پ)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -2 \end{aligned}$	۵
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$	۶
خیر، وجود ندارد. می‌دانیم که $[x] - 1 = 0 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow 1 \leq x < 2$ $D_f = \mathbb{R} - [1, 2)$ لذا تابع در همسایگی راست $x = 1$ تعریف نشده است. از اینجا نتیجه می‌شود که $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{[x]-1}$ نمی‌تواند معنی داشته باشد.	۷

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{ \sin x } = \frac{0-2}{ \sin(0^-) } = \frac{-2}{ 0^- } = \frac{-2}{0^+} = -\infty$	۸
ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 4x^5}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = 4(-\infty)^2 = +\infty$	۹
الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	با توجه به نمودار داده شده، داریم:
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{ 2-x } = \frac{3}{0^+} = +\infty$	۱۰
الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x-4x^2}{3x+x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{x^2} = -2$	۱۱
الف) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{3^- - 3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3}{2x^3} = -3$	۱۲
الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2 - \frac{3}{x^3}} = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} \frac{1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$	۱۳
الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2[-x]+1}{ x-2 } = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(-2)+1}{ x-2 } = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3}{0^+} = -\infty$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{-x^5 + 2x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-x^3} = 0$	۱۴
الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + 4}{x^3 + x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5}{x^5} = 2$ ب) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x]-4}{4-x} = \frac{[4^-]-4}{4-4^-} = \frac{3-4}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$	۱۵

$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x}{3x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}$ $\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2})^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$	۱۶
---	----

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل چهارم

((ریاضی ۳))



درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق

$m_a > 0$ و $m_b = 0$ و $m_c < 0 \rightarrow m_a > m_b > m_c$	۱
لذا گزینه ی پ درست است.	
الف) A ب) C	۲
الف) معادله ی خط گذرا از مبدأ مختصات و نقطه ی A را می نویسیم. $y = \frac{4}{2}x \rightarrow y = 2x$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) \xrightarrow{m=2} f'(2) = 2$ ب) $m_A > m_B$	۳
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(x)}{x - 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 5 \times f'(2)$	۴
$f(x) = -x^2 + 6x - 5 \rightarrow f(2) = -(2)^2 + 6(2) - 5 = 3$ لذا مختصات نقطه ی تماس به شکل (۲,۳) می باشد. $\rightarrow f'(x) = -2x + 6$ شیب خط مماس $f'(2) = -2(2) + 6 = 2 \rightarrow m = 2$ حال چون خط مماس محور طول ها را در نقطه ی (a, ۰) قطع می کند، شیب خط مماس را نیز به شکل زیر به دست می آوریم. $m = \frac{0 - 3}{a - 2} = -\frac{3}{a - 2}$ در نهایت دو شیب بدست آمده را برابر هم قرار می دهیم. $-\frac{3}{a - 2} = 2 \rightarrow 2a - 4 = -3 \rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$	۵

۶	فرض کنیم که $y = mx + b$ معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $x = 2$ باشد. چون $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$ ، پس طبق تعریف (شیب خط مماس) $m = 3$ می‌باشد. حال معادله‌ی خط مماس به صورت $y = 3x + b$ نوشته می‌شود. اکنون چون خط مماس از نقطه‌ی $A(2, 4)$ می‌گذرد، پس : $y = 3x + b \xrightarrow{A(2, 4)} 4 = 3(2) + b \rightarrow b = -2$ لذا در نهایت، معادله‌ی خط مماس به شکل $y = 3x - 2$ خواهد شد.
۷	برای تعیین معادله‌ی خط مماس، لازم شیب خط مماس را داشته باشیم. برای تعیین شیب خط مماس از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5f(x) - 15}{x - 2} = 10 \rightarrow 5 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 10 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 2$ $y = mx + b \xrightarrow{m=2} y = 2x + b \xrightarrow{(2, 3)} 3 = 2(2) + b \rightarrow b = -1$ لذا معادله‌ی خط مماس به شکل زیر است. $y = 2x - 1$
۸	الف) نقطه‌ی A ؛ زیرا اگر فرض کنیم که $x_A = a$ باشد، با توجه به نمودار به سادگی معلوم است که $f(a) = 0$ و $f'(a) > 0$ ب) نقطه‌ی C ؛ زیرا اگر فرض کنیم که $x_C = c$ باشد، با توجه به نمودار به سادگی معلوم است که $f(c) < 0$ و $f'(c) < 0$

مشتق تابع در یک نقطه

۱	$f(x) = x^2 - x \rightarrow f(3) = (3)^2 - (3) = 9 - 3 = 6$ $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - x) - (6)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = 5$
۲	$f(x) = x^2 + 1 \rightarrow f(2) = (2)^2 + 1 = 5$ $f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 1) - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل چهارم

((ریاضی ۳))



درس ۲: مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه

۱	تابع در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته بوده و همچنین مشتق راست و چپ تابع در این نقطه برابرند. $f'(x) = \begin{cases} a & x < 0 \\ 2x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$ $f'_+(0) = 2(0) + 3 = 3 \quad \text{و} \quad f'_-(0) = a$ $\Rightarrow a = 3$
۲	ابتدا تابع را به صورت زیر می نویسیم. $f(x) = x^2 - 1 = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 1 \\ -(x^2 - 1) & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & x < -1 \end{cases}$ اکنون پیوستگی تابع و مشتق های یک طرفه را در نقطه‌ی $x = 1$ بررسی می کنیم. حد راست $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = (1)^2 - 1 = 0$ حد چپ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -(1)^2 + 1 = 0$ مقدار $f(1) = (1)^2 - 1 = 0$ مشتق راست $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1) - (0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$ مشتق چپ $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1) - (0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x + 1) = -2$ تابع در نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته است ولی چون مشتق های یک طرفه در این نقطه برابر نیستند، لذا تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.
۳	مماس قائم

۴	$f(x) = x^2 - 1 = \begin{cases} x^2 - 1 & x > 1 \\ -(x^2 - 1) & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & x < -1 \end{cases}$ $f(1) = -(1^2 - 1) = 0$ $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2$ معادله‌ی نیم مماس $y = 2(x - 1) + 0 \rightarrow y = 2x - 2$
۵	نادرست
۶	الف) خیر، زیرا در این نقطه پیوسته نمی‌باشد. ب) بله، در تمام نقاط بازه‌ی $(-\infty, 2)$ مشتق‌پذیر است. پ) $x \geq 2; f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{x - 1} + 2) - 3}{x - 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x - 1} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{x - 1} - 1)(\sqrt{x - 1} + 1)}{(x - 2)(\sqrt{x - 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x - 1} + 1} = \frac{1}{2}$
۷	نادرست، تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است و لذا نمی‌تواند نقطه‌ی گوشه‌ای باشد.
۸	$f(x) = x^2 - 4 = \begin{cases} x^2 - 4 & x \geq 2 \text{ or } x \leq -2 \\ -(x^2 - 4) & -2 < x < 2 \end{cases}$ $f(2) = (2^2 - 4) _{x=2} = (2)^2 - 4 = 0$ $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4) - 0}{x - 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x + 2) = -4$
۹	نادرست؛ زیرا مشتق تابع در این نقطه برابر بی نهایت می‌شود.
۱۰	ابتداءً پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x = 2$ بررسی می‌کنیم. برای این کار، حد راست و حد چپ و مقدار تابع را این نقطه، تعیین و مقایسه می‌کنیم. $f(2) = 6(2) - 4 = 8$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2\sqrt{2 - 1} + 6 = 8$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2(2)^2 = 8$

پس تابع در نقطه‌ی $x = 2$، پیوسته است. اکنون مشتق راست و مشتق چپ را در این نقطه بررسی و مقایسه می‌کنیم. $f'_+(2) = \left(2 \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) \Big _{x=2} = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = 1$ $f'_-(2) = (4x) \Big _{x=2} = 4 \times 2 = 8$ حال چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$، لذا تابع f در نقطه‌ی $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست.	
نادرست؛ زیرا تابع $f(x) = x$ با اینکه در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته است، ولی در این نقطه مشتق‌های راست و چپ آن نابرابرند و لذا در این نقطه و به تبع آن در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر نیست.	۱۱
$f(x) = x^2 - 4 = \begin{cases} x^2 - 4 & ; \quad x > 2 \\ 0 & ; \quad -2 \leq x \leq 2 \\ -(x^2 - 4) & ; \quad x < -2 \end{cases}$ $f(2) = 0$ $f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x+2) = -4$ حال چون $m = f'_-(2) = -4$ و $f(2) = 0$ لذا معادله‌ی خط نیم مماس می‌شود. $y = m(x-a) + b \rightarrow y = -4(x-2) + 0 \rightarrow y = -4x + 8$	۱۲

تابع مشتق

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+0)} = -\frac{1}{x^2}$	۱
--	---

محاسبه‌ی مشتق تابع

$(f \times g)'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = (5)(8) + (-6)(3) = 40 - 18 = 22$	۱
کافی است به صورت همزمان فرمول‌های زیر را بکار بگیریم. $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	۲

$f(x) = \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{9(x+1) - 1(9x-2)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}}$	
۱۶، زیرا مطابق فرمول‌های مشتق‌گیری می‌توان نوشت $(3f + 2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 3(3) + 2(5) = 9 + 10 = 19$	۳
الف) $f(x) = (x^2 - \sqrt{x} + 1)^4 \rightarrow f'(x) = 4(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}})(x^2 - \sqrt{x} + 1)^3$ برای مشتق‌گیری از این تابع از فرمول زیر استفاده شد. $y = au^n \rightarrow y' = anu'u^{n-1}$ ب) $g(x) = \frac{3x^2 + x - 1}{2x - 3} \rightarrow g'(x) = \frac{(6x + 1)(2x - 3) - (2)(3x^2 + x - 1)}{(2x - 3)^2}$ برای مشتق‌گیری از این تابع از فرمول زیر استفاده شد. $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	۴
الف) $f'(x) = \frac{-2(x+4) - 1(-2x+3)}{(x+4)^2}$ ب) $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(x^2 + 2x) + (2x+2)(\sqrt{3x+1})$	۵
الف) $f(x) = x^3 - x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$ ب) $g'(x) = 3(\frac{2(x+1) - 1(2x-1)}{(x+1)^2})(\frac{2x-1}{x+1})^2$	۶
الف) $f'(x) = (\frac{3}{2\sqrt{3x+2}})(x^3 + 4) + (3x^2)(\sqrt{3x+2})$ $y = u.v \rightarrow y' = u'.v + v'.u \quad \text{و} \quad y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ب) $g'(x) = \frac{(-14x)(x-6) - (1)(-7x^2+1)}{(x-6)^2}$ $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$ پ) $h'(x) = 4(10x^4)(2x^5 - 1)^3$ $y = u^n \rightarrow y' = nu'u^{n-1}$	۷

الف) $f(x) = \frac{(2x-1)^4}{x^3+8} \rightarrow f'(x) = \frac{4(2)(2x-1)^3(x^3+8) - 3x^2(2x-1)^4}{(x^3+8)^2}$	۸
$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ و $y = u^n \rightarrow y' = n u' u^{n-1}$	
ب) $g(x) = \sqrt[3]{2x+1} \rightarrow g(x) = \sqrt[3]{(2x+1)^1} \rightarrow g'(x) = \frac{1(2)}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$	
$y = \sqrt[n]{u^m} \rightarrow y' = \frac{mu'}{m\sqrt[n]{u^{m-n}}}$	
الف) $f'(x) = (2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}})(x^4 - 2x) + (4x^3 - 2)(2\sqrt{x} + 1)$	۹
ب) $g'(x) = \frac{3(x^5 - x + 1) - (5x^4 - 1)(3x + 1)}{(x^5 - x + 1)^2}$	
به کمک فرمول‌های مشتق می‌توان نوشت:	۱۰
$f'(x) = 3(1)(x-6)^2 + \frac{5(\sqrt{2x-1}) - (\frac{2}{2\sqrt{2x-1}})(5x+3)}{(\sqrt{2x-1})^2}$	
$f'(x) = 6 \times \frac{\frac{-3}{2\sqrt{1-3x}} \times (y+x) - 1 \times \sqrt{1-3x}}{(y+x)^2} \times \left(\frac{\sqrt{1-3x}}{y+x} \right)^5$	۱۱
الف) $f'(x) = 7(12x^5 + \frac{2}{2\sqrt{2x}})(2x^6 + \sqrt{2x})^6$	۱۲
ب) $g'(x) = \frac{6x^2(-x^2+2x) - (-2x+2)(2x^3-1)}{(-x^2+2x)^2}$	
الف) $f'(x) = (3x^2+6)\sqrt[3]{x} + (x^3+6x)(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})$	۱۳
ب) $g'(x) = \frac{2(5x^2+4) - (10x)(2x+3)}{(5x^2+4)^2}$	
الف) $f'(x) = (\frac{5}{2\sqrt{x}})(\frac{1}{x}) + (5\sqrt{x}+2)(-\frac{1}{x^2})$	۱۴
ب) $g'(x) = 4(6x^2)(2x^3+5)^3$	

مشتق تابع مرکب و قاعده‌ی زنجیری

$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = 4 \rightarrow f'(5) = 4$ $h'(x) = g'(x)(f'(g(x))) \rightarrow h'(2) = g'(2)(f'(g(2))) = (3)f'(5) = (3)(4) = 12$	۱
---	---

مشتق‌پذیری تابع در یک فاصله

الف) با توجه به نمودار داده شده، واضح است تابع در چهار نقطه مشتق‌ناپذیر است. ب) خیر، زیرا تابع $x = 6$ در مشتق چپ (پیوستگی چپ) ندارد.	۱
--	---

مشتق مرتبه‌ی دوم تابع در یک نقطه

$f(x) = -x^3 \rightarrow f'(x) = -3x^2 \rightarrow f''(x) = -6x$ $\rightarrow f''(1) = -6(1) = -6$	۱ -۶؛ زیرا
$f(x) = 4x^5 + 2 \rightarrow f'(x) = 20x^4 \rightarrow f''(x) = 80x^3$ $\rightarrow f''(1) = 80(1)^3 = 80$	۲ ۸۰؛ زیرا

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل چهارم

((ریاضی ۳))



درس ۳: آهنگ تغییر

۱	سرعت متوسط $f(5) = (5)^2 - (5) + 10 = 30$ $f(0) = (0)^2 - (0) + 10 = 10$ $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4$ سرعت لحظه‌ای $f'(t) = 2t - 1 \rightarrow f'(2) = 2(2) - 1 = 3$
۲	(الف) $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{600 - 480}{3 - 2} = 120$ (ب) زیرا شیب خط مماس بر نمودار تابع به تدریج افقی می‌شود.
۳	آهنگ متوسط $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5}$
۴	(الف) $h(4) = -4(4)^2 + 40(4) = -64 + 160 = 96$ $h(2) = -4(2)^2 + 40(2) = -16 + 80 = 64$ سرعت متوسط $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{96 - 64}{2} = 16$ (ب) $h'(t) = -8t + 40 \xrightarrow{h'(t)=16} -8t + 40 = 16 \rightarrow t = 3$
۵	$f(x) = 2x^2 + 5x + 1 \rightarrow f'(x) = 4x + 5 \rightarrow f'(2) = 4(2) + 5 = 13$ $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{1 - (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه‌ی $x = 2$ ، ۱۳ برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه‌ی $[-2, 0]$ است.

۶	$\text{آهنگ متوسط تغییر} \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{11 - 3}{2} = 4$ $f'(t) = 2t + 2$ $\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر} f'(t) = 4 \rightarrow 2t + 2 = 4 \rightarrow t = 1$
۷	$f(2) = 2(2^3) + 2 - 1 = 17$ $f(1) = 2(1^3) + 1 - 1 = 2$ الف) $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 17 - 2 = 15$ ب) $f(t) = 2t^3 + t - 1 \rightarrow f'(t) = 6t^2 + 1$ $\rightarrow f'(2) = 6(2)^2 + 1 = 25$
۸	الف) $\text{آهنگ متوسط تغییر در بازه‌ی } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1$ ب) $f(x) = x^2 - x \rightarrow f'(x) = 2x - 1$ $\frac{f'(x) > 1}{\rightarrow 2x - 1 > 1 \rightarrow x > 1}$
۹	$v(t) = 20\left(1 - \frac{t}{50}\right)^2 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \rightarrow v(0) = 20 \\ t = 50 \rightarrow v(50) = 0 \end{cases}$ $\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{v(50) - v(0)}{50 - 0} = \frac{0 - 20}{50 - 0} = -\frac{2}{5} \quad \text{آهنگ متوسط تغییر}$ $v = 20\left(1 - \frac{t}{50}\right)^2 \rightarrow v' = 20(2)\left(-\frac{1}{50}\right)\left(1 - \frac{t}{50}\right) = -\frac{4}{5}\left(1 - \frac{t}{50}\right) \quad \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر}$ از برابری آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای داریم: $-\frac{4}{5}\left(1 - \frac{t}{50}\right) = -\frac{2}{5} \xrightarrow{\times \frac{5}{2}} 2\left(1 - \frac{t}{50}\right) = 1 \rightarrow 1 - \frac{t}{50} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{t}{50} = \frac{1}{2} \rightarrow t = 25$
۱۰	الف) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{25 - (-5)}{3} = 10$ ب) $f'(x) = 3x^2 + 1 \xrightarrow{\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)} 3x^2 + 1 = 13 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2$
۱۱	$f(x) = \sqrt{x} + 50 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$
۱۲	$f(5) = 2(5)^2 - 1 = 49$ $f(2) = 2(2)^2 - 1 = 7$ $\text{آهنگ متوسط تغییر} \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{49 - 7}{5 - 2} = \frac{42}{3} = 14$

فصل پنجم

((ریاضی ۳))



درس ۱: بررسی یکنوایی توابع و تعیین اکسترم‌های آن

$f'(x) = x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{f'(x)=0} x^2 - 2x - 3 = 0$ $\rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \rightarrow x = 3, x = -1$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td></td><td>3</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>o</td><td>-</td><td>o</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td></td><td>$\nearrow$</td><td></td><td>$\searrow$</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>$\frac{7}{3}$ max</td><td></td><td>$-\frac{25}{3}$ min</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	-1		3		$+\infty$	$f'(x)$		+	o	-	o	+	$f(x)$			$\nearrow$		$\searrow$					$\frac{7}{3}$ max		$-\frac{25}{3}$ min		۱
x	$-\infty$	-1		3		$+\infty$																							
$f'(x)$		+	o	-	o	+																							
$f(x)$			$\nearrow$		$\searrow$																								
			$\frac{7}{3}$ max		$-\frac{25}{3}$ min																								
$f(x) = x^3 - 12x + 4 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} x = 2, x = -2$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'</td><td></td><td>+</td><td>o</td><td>-</td><td>o</td><td>+</td></tr><tr><td>f</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$</td><td></td><td>$\searrow$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> تابع در بازه های $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$ اکیدا صعودی است.	x	$-\infty$	-2		2		$+\infty$	f'		+	o	-	o	+	f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$+\infty$	۲							
x	$-\infty$	-2		2		$+\infty$																							
f'		+	o	-	o	+																							
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$+\infty$																							
$f(x) = -2x^3 + 6x + 11 \rightarrow f'(x) = -6x^2 + 6 \xrightarrow{f'(x)=0} -6x^2 + 6 = 0$ $\rightarrow -6x^2 = -6 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$ <table><tr><td>x</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>o</td><td>+</td><td>o</td><td>-</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$\searrow$</td><td></td><td>$\nearrow$</td><td></td><td>$\searrow$</td></tr></table>	x		-1		1		$f'(x)$		-	o	+	o	-	$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	۳								
x		-1		1																									
$f'(x)$		-	o	+	o	-																							
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$																							

پس تابع در بازه‌ی $(-۱,۱)$ اکیداً صعودی است.										
$f'(x) = 3x^2 - 27 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 27 = 0 \rightarrow x = \pm 3$ <table><tr><td>x</td><td colspan="2">-3</td><td>3</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr></table>		x	-3		3	$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	۴
x	-3		3							
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$							
لذا نمودار تابع در بازه‌های $[3, +\infty)$ و $(-\infty, -3]$ اکیداً صعودی است.										

نقاط بحرانی

$y = x^3 - 3x + 2 \rightarrow y' = 3x^2 - 3 \xrightarrow{y'=0} x = 1 \text{ , } x = -1$ نقطه‌ی $x = 1$ نقطه‌ی بحرانی است. $x = 0 \rightarrow y = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2 \rightarrow A(0, 2)$ $x = 1 \rightarrow y = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0 \rightarrow B(1, 0)$ مینیمم مطلق $x = 2 \rightarrow y = (2)^3 - 3(2) + 2 = 4 \rightarrow C(2, 4)$ ماکزیمم مطلق	۱															
درست	۲															
$f'(x) = 3x^2 + 2bx \xrightarrow{f'(2)=0} 3(2)^2 + 2b(2) = 0 \rightarrow x = -3$ $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ $\xrightarrow{f(2)=1} 1 = (2)^3 + (-3)(2)^2 + d \rightarrow 1 = 8 - 12 + d = 1 \rightarrow d = 5$	۳															
درست ، زیرا در این نقطه یا مشتق برابر صفر است و یا اینکه تابع مشتق پذیر نمی‌باشد.	۴															
$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 \xrightarrow{f'(x)=0} -6x^2 + 6x + 12 = 0$ $\div (-6) \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ , } x = 2$<table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$-1$</td><td>$2$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td>$-$</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>-16</td><td>11</td><td>$-\infty$</td></tr></table> max min	x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	$f'(x)$	$-$	$+$	$-$		$f(x)$	$+\infty$	-16	11	$-\infty$	۵
x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$												
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$													
$f(x)$	$+\infty$	-16	11	$-\infty$												
با دقت در نمودار داده شده، می‌توان نوشت:	۶															
$x = 3$ طول ماکزیمم نسبی $x = 1$ طول ماکزیمم مطلق $x = 2$ طول مینیمم نسبی																

$x = 4$ طول مینیمم مطلق																								
درست ؛ زیرا مشتق تابع در این نقطه یا برابر صفر است و یا وجود ندارد.	۷																							
$f'(x) = 2x^2 - x - 15 \xrightarrow{f'(x)=0} 2x^2 - x - 15 = 0 \rightarrow x = 3, x = -\frac{5}{2}$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{5}{2}$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>o</td><td>$-$</td><td>o</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow$</td><td>$\searrow$</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr></table> اکنون با توجه به جدول فوق، معلوم است که نقطه‌ی $x = -\frac{5}{2}$ ماکزیمم نسبی و نقطه‌ی $x = 3$ مینیمم نسبی است.	x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	3	$+\infty$	$f'(x)$	$+$	o	$-$	o	$+$	$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$	۸						
x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	3	$+\infty$																				
$f'(x)$	$+$	o	$-$	o	$+$																			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$																			
نادرست ؛ زیرا ممکن است نقطه‌ی اکسترمم مطلق، یک نقطه‌ی انتهایی باشد که در این حالت اکسترمم نسبی نمی‌باشد.	۹																							
$f'(x) = -3x^2 - 6x \xrightarrow{f'(x)=0} -3x^2 - 6x = 0 \rightarrow -3x(x+2) = 0$ $\rightarrow -3x(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>o</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$-$</td><td>o</td><td>$+$</td><td>o</td><td>$-$</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>$\searrow$</td><td>$\nearrow$</td><td>$\searrow$</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td></td><td></td><td>$\min$</td><td>$\max$</td><td></td><td></td></tr></table> طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی ($x = 0$) و طول نقطه‌ی مینیمم نسبی ($x = -2$)	x	$-\infty$	-2	o	$+\infty$	y'	$-$	o	$+$	o	$-$	y	$-\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$			$\min$	$\max$			۱۰
x	$-\infty$	-2	o	$+\infty$																				
y'	$-$	o	$+$	o	$-$																			
y	$-\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$																			
		$\min$	$\max$																					
بحرانی	۱۱																							
الف)	۱۲																							
$f(x) = x^3 - 12x + 4 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \pm 2$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-2</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>o</td><td>$-$</td><td>o</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>$\searrow$</td><td>$\nearrow$</td><td>$\searrow$</td><td>$\nearrow$</td></tr><tr><td></td><td></td><td>20</td><td>-12</td><td></td><td></td></tr></table> ب) با توجه به جدول تغییرات، طول ماکزیمم نسبی برابر $x = -2$ است. روش دوم : الف) می‌دانیم که در بازه‌ای نمودار تابع نزولی اکید است که مشتق دوم منفی باشد. پس : $f(x) = x^3 - 12x + 4 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 \leq 0 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$ ب) با توجه به قسمت الف، طول ماکزیمم نسبی برابر $x = -2$ است.	x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	$f'(x)$	$+$	o	$-$	o	$+$	$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$			20	-12			
x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$																				
$f'(x)$	$+$	o	$-$	o	$+$																			
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$																			
		20	-12																					

$f(x) = x^3 + 4x \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4$ $\xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 + 4 = 0$ معادله ریشه ندارد. اکنون مقادیر تابع در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه را تعیین می‌کنیم. $f(-2) = (-2)^3 + 4(-2) = -8 - 8 = -16$ $f(1) = (1)^3 + 4(1) = 1 + 4 = 5$ لذا مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر ۵ و مقدار می‌نیمم مطلق آن برابر -۱۶ است.	۱۳
---	----

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

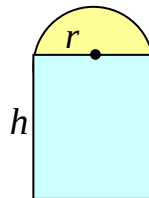
فصل پنجم

((ریاضی ۳))



درس ۲: بهینه سازی

$\Delta x - y = 10 \rightarrow y = \Delta x - 10$ $P = xy \rightarrow P = x(\Delta x - 10) \rightarrow P = \Delta x^2 - 10x$ تابع حاصل ضرب $P'(x) = 10x - 10 \xrightarrow{P'(x)=0} 10x - 10 = 0 \rightarrow x = 1$ $y = \Delta x - 10 \xrightarrow{x=1} y = \Delta(1) - 10 = -\Delta$	۱
$V = x(30 - 2x)^2 \rightarrow V' = (30 - 2x)^2 + 2x(-2)(30 - 2x)$ $\xrightarrow{V'=0} (30 - 2x)^2 + 2x(-2)(30 - 2x) = 0$ $\rightarrow (30 - 2x)(30 - 2x - 4x) = 0 \rightarrow (30 - 2x)(30 - 6x) = 0$ $\rightarrow x = 15, \quad x = 5$ مقدار $x = 15$ قابل قبول است.	۲
$y = 8 - x \rightarrow S(x) = -x + 8x \xrightarrow{S'(x)=0} -2x + 8 = 0 \quad x = 4$ $\rightarrow y = 4$	۳
$x - y = 10 \rightarrow y = x - 10$ $p = xy \rightarrow p = x(x - 10) = x^2 - 10x$ $p' = 2x - 10 \xrightarrow{p'=0} 2x - 10 = 0 \rightarrow x = 5$ $y = x - 10 = 5 - 10 = -5$	۴
$2h + 2r + \pi r = 6 \rightarrow h = \frac{6 - 2r - \pi r}{2}$ $S = 2rh + \frac{1}{2}\pi r^2$ $S(r) = 2r\left(\frac{6 - 2r - \pi r}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 = 6r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2$ $S'(r) = 6 - 4r - \pi r \rightarrow r = \frac{6}{4 + \pi}$	۵



$h = \frac{\epsilon - r(2 - \pi)}{2} = \frac{\epsilon - (\frac{\epsilon}{4 + \pi})(2 - \pi)}{2} = \frac{\epsilon}{4 + \pi}$	
ابتدا با شرایط داده شده، یک تابع تشکیل می‌دهیم. $y - x = \lambda \rightarrow y = \lambda + x$ $P = xy \rightarrow P = x(\lambda + x) \rightarrow P = \lambda x + x^2$ $P' = \lambda + 2x \xrightarrow{P'=0} \lambda + 2x = 0 \rightarrow x = -\frac{\lambda}{2}$ $\rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = \lambda + x = \lambda + (-\frac{\lambda}{2}) = \frac{\lambda}{2} \end{cases}$	۶
کافی است به کمک مفهوم بهینه‌سازی، اندازه‌ی شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را تعیین کنیم. $v = 900 \xrightarrow{v = \pi r^2 h} \pi r^2 h = 900 \xrightarrow{\pi \cong 3} 3r^2 h = 900 \rightarrow h = \frac{300}{r^2}$ مساحت فلز بکار رفته برابر مساحت جانبی، بعلاوه‌ی مساحت یک قاعده‌ی آن است. $S = 2\pi r h + \pi r^2 \rightarrow S = 2(3)(r)(\frac{300}{r^2}) + (3)(r^2)$ $\rightarrow S = \frac{1800}{r} + 3r^2$ $\rightarrow S' = -\frac{1800}{r^2} + 6r \xrightarrow{S'=0} -\frac{1800}{r^2} + 6r = 0 \xrightarrow{\times r^2} -1800 + 6r^3 = 0$ $\rightarrow 6r^3 = 1800 \rightarrow r^3 = 300 \rightarrow r = \sqrt[3]{300}$ شعاع قاعده استوانه $h = \frac{300}{r^2} = \frac{300}{(\sqrt[3]{300})^2} = \frac{300}{(\sqrt[3]{300})^2} \times \frac{\sqrt[3]{300}}{\sqrt[3]{300}} = \sqrt[3]{300}$ ارتفاع استوانه	۷
$S(AOB) = \frac{1}{2}xy \rightarrow S(x) = \frac{1}{2}x(12 - x^2) = 6x - \frac{1}{2}x^3 \rightarrow S'(x) = 6 - \frac{3}{2}x^2$ $\xrightarrow{S'(x)=0} 6 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \xrightarrow{x>0} x = 2$ $\rightarrow S(2) = 6(2) - \frac{1}{2}(2)^3 = 12 - 2 = 10 \rightarrow \max(S) = 10$	۸
$2x + l = 30 \rightarrow l = 30 - 2x$ $v = xl^2 \rightarrow v(x) = x(30 - 2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x \quad : \quad x \in (0, 15)$ $v'(x) = 12x^2 - 240x + 900 \xrightarrow{v'(x)=0} 12x^2 - 240x + 900 = 0 \rightarrow x = 5, x = 15$ واضح است که مقدار $x = 15$ غیرقابل قبول است.	۹

$S = xy \xrightarrow{S=16} y = \frac{16}{x}$ $P = 2(x + y) \rightarrow P = 2\left(x + \frac{16}{x}\right) = 2x + \frac{32}{x}$ $P' = 2 + 32\left(-\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{P'=0} 2 + 32\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \rightarrow \frac{32}{x^2} = 2 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4$	۱۰
$x + 2y = 100 \rightarrow 2y = 100 - x \rightarrow y = \frac{100 - x}{2} = 50 - \frac{1}{2}x$ $S = x \cdot y \rightarrow S = x \cdot \left(50 - \frac{1}{2}x\right) = 50x - \frac{1}{2}x^2$ $S' = 50 - x \xrightarrow{S'=0} 50 - x = 0 \rightarrow x = 50$ $y = 50 - \frac{1}{2}(50) = 50 - 25 = 25$ $S = x \cdot y = 50 \times 25 = 1250 \text{ بیشترین مساحت}$	۱۱
$C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27} \rightarrow C'(t) = \frac{3(t^3 + 27) - (3t^3)(3t)}{(t^3 + 27)^2} = \frac{-6t^3 + 81}{(t^3 + 27)^2}$ $\xrightarrow{C'(t)=0} -6t^3 + 81 = 0 \rightarrow -6t^3 = -81 \rightarrow t^3 = \frac{-81}{-6} = \frac{27}{2}$ $\rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{27}{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	۱۲

تهیه کننده : جابر عامری

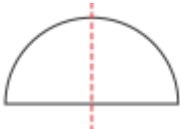
دبیر ریاضی دوره ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل ششم

((ریاضی ۳))



درس ۱: تفکر تجسمی (دوران و برش)

۱	نادرست، جسم حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، استوانه است.
۲	نیم کره
	
۳	سطح مقطع
۴	مخروط
۵	درست؛ اگر یک نیم دایره را حول شعاع عمود بر قطر آن دوران دهیم، یک نیم کره حاصل می شود.

مقاطع مخروطی

۱	دایره؛ در این حالت، سطح مخروطی حاصل، دایره است.
۲	سطح مقطع تشکیل شده، سهمی است.
۳	هذلولی

تهیه کننده: جابر عامری

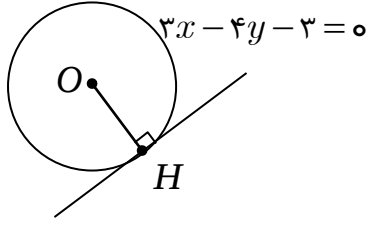
دبیر ریاضی دوره ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل ششم

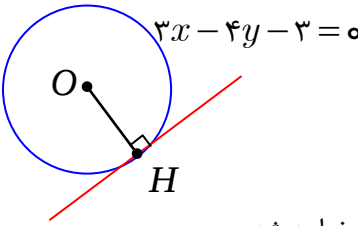
((ریاضی ۳))



درس ۲: دایره

نقطه‌ای روی محیط دایره قرار دارد، هرگاه مختصات آن در معادله‌ی دایره صدق کند. نقطه‌ای $(۱, ۰)$ این ویژگی را دارد. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \rightarrow (1)^2 + (0)^2 - 2(1) + 4(0) + 1 = 0$ $\rightarrow 1 + 0 - 2 + 0 + 1 = 0 \rightarrow 0 = 0$ لذا گزینه‌ی ب درست است.	۱
فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس بر دایره با اندازه‌ی شعاع دایره برابر است: $OH = R \rightarrow R = \frac{ a\alpha + b\beta + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\rightarrow R = \frac{ 3(0) - 4(3) - 3 }{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3$  لذا معادله‌ی دایره به شکل زیر خواهد شد. $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 9$	۲
$A: \begin{cases} O(-1, 2) \\ R_1 = 1 \end{cases}$ $B: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} O_2(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \rightarrow O_2(1, -2) \\ R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 4} = 2 \end{cases}$ اندازه‌ی خط المרכזین $d = O_1O_2 = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$ $R_1 + R_2 = 1 + 2 = 3$ $\Rightarrow R_1 + R_2 < d$ پس دو دایره متخارج هستند.	۳
مرکز دایره $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2, -1)$	۴

$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - 4c = 3$ اندازه‌ی شعاع دایره (ب) خیر، زیرا $(5)^2 + (3)^2 + 2(3) - 4(5) - 4 \neq 0$	
$\begin{cases} \alpha = -\frac{a}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \\ \beta = -\frac{b}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{cases} \rightarrow O(-1, -1)$ مختصات مرکز دایره $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - 4c = \frac{1}{2}\sqrt{(2)^2 + (2)^2} - 4(-1) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} = \sqrt{10}$ اندازه‌ی شعاع دایره	۵
$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \rightarrow O(-1, 2)$, $R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 4} = 2$ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = m^2 \rightarrow O'(2, -1)$, $R' = m$ $OO' = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ $OO' = R + R' \rightarrow m + 2 = 3\sqrt{2} \rightarrow m = 3\sqrt{2} - 2$	۶
ابتدا با استفاده از معادله‌ی داده شده $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$ ، مختصات مرکز و شعاع دایره را تعیین می‌کنیم. اندازه‌ی شعاع دایره $R = \sqrt{9} = 3$ مختصات مرکز دایره $O(2, -2)$ اکنون فاصله‌ی مرکز دایره را تا خط داده شده، تعیین و با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم. $OH = \frac{ a\alpha + b\beta + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ 3(2) + (4)(-2) + (5) }{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{ 6 - 8 }{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$ چون اندازه‌ی شعاع دایره بزرگتر از فاصله‌ی مرکز دایره تا خط می‌باشد، پس خط و دایره متقاطع هستند.	۷
$\begin{cases} \alpha = -\frac{a}{2} = -\frac{-2}{2} = 1 \\ \beta = -\frac{b}{2} = -\frac{-6}{2} = 3 \end{cases} \rightarrow O(1, 3)$ مختصات مرکز دایره	۸
الف) $\alpha = -\frac{a}{2} \xrightarrow{\alpha=1} -\frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = -2$ ب) $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - 4c$ $\rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (4)^2} - 4(-4) = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$	۹
فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس بر دایره با اندازه‌ی شعاع دایره برابر است: $OH = R \rightarrow R = \frac{ a\alpha + b\beta + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	۱۰

$\rightarrow R = \frac{ 3(1) + 4(2) - 1 }{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$  لذا معادله‌ی دایره به شکل زیر خواهد شد. $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$	
$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1 \rightarrow O_1(-1, 2), R_1 = 1$ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} O_2(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (1, -2) \\ R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 4} = 2 \end{cases}$ $O_1O_2 = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$ طول خط‌المركزين اکنون چون $O_1O_2 > R_1 + R_2$، پس دو دایره متخارج هستند.	۱۱
فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس، برابر اندازه‌ی شعاع دایره است. $R = \frac{ a\alpha + b\beta + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ (4)(1) + (-3)(-2) + c }{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{ 4 + 6 - 25 }{\sqrt{16 + 9}} = \frac{15}{5} = 3$ در نهایت معادله‌ی دایره را بدین شکل خواهیم داشت: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$	۱۲
می‌دانیم که مرکز دایره وسط قطر آن است و همچنین اندازه‌ی شعاع دایره برابر نصف اندازه‌ی قطر است. پس : $\begin{cases} \alpha = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + (-4)}{2} = -2 \\ \beta = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \end{cases} \rightarrow O(-2, 1)$ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ $= \sqrt{(-4 - 0)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$ $\rightarrow R = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{2}$ در نهایت معادله‌ی دایره بدین صورت خواهد شد. $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$	۱۳

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل ششم

((ریاضی ۳))



درس ۳: بیضی

$AA' = 2a = 8 \rightarrow a = 4$ $FF' = 2c = 6 \rightarrow c = 3$ $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$ خروج از مرکز بیضی	۱
$AA' = 10 \rightarrow 2a = 10 \rightarrow a = 5$ $\rightarrow A'O = a = 5$ $BB' = 8 \rightarrow 2b = 8 \rightarrow b = 4$ $\rightarrow OB = b = 4$ $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 25 = 16 + c^2 \rightarrow c^2 = 9 \rightarrow c = 3$ $\rightarrow OF = c = 3$ $A'F = A'O + OF = a + c = 5 + 3 = 8$ حال می‌توان مساحت مثلث $A'BF$ را نیز به شکل زیر به دست آورد. $S(A'BF) = \frac{1}{2} A'F \times OB = \frac{1}{2} (8) \times (4) = 16$ واحد سطح	۲
نادرست، هر چه خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیکتر باشد، شکل بیضی به دایره شبیه‌تر است.	۳
$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 25 = 9 + c^2 \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4 \rightarrow FF' = 2c = 8$	۴
$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=5, b=3} c = 4 \rightarrow FF' = 2c = 8$	۵
$\begin{cases} b=3 \\ c=4 \end{cases} \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} a^2 = 9 + 16 \rightarrow a^2 = 25 \rightarrow a = 5 \rightarrow 2a = 10$ طول قطر بزرگ $P(MFF') = MF + MF' + FF' = 2a + 2c = 10 + 8 = 18$ محیط مثلث MFF'	۶
مرکز بیضی وسط کانون‌های آن است. پس :	۷
$\begin{cases} \alpha = \frac{1+1}{2} = 1 \\ \beta = \frac{5+1}{2} = 3 \end{cases} \rightarrow O(1, 3)$	

فاصله‌ی کانونی $FF' = 5 - 1 = 4$ قطر کوچک موازی محور عرض‌ها است و از مرکز بیضی می‌گذرد، پس معادله‌ی آن $y = 3$ است. $OB'^2 = OA^2 - OF^2 \rightarrow OB'^2 = (3)^2 - (2)^2 = 5 \rightarrow OB' = \sqrt{5}$ $S = \frac{1}{2}(OB')(FF') = \frac{1}{2}(\sqrt{5})(4) = 2\sqrt{5}$	
$\left. \begin{matrix} A(1, 6) \\ A'(1, -2) \end{matrix} \right\} \rightarrow AA' = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{64} = 8 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4$ $e = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \xrightarrow{a=4} \frac{c}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow c = 2$ فاصله‌ی کانونی $FF' = 2c = 2(2) = 4$	۸
مرکز بیضی، محل برخورد قطرهای آن است، پس مختصات آن می‌شود $O(2, -1)$، از طرفی: $AA' = 12 \xrightarrow{AA'=2a} 2a = 12 \rightarrow a = 6$ $BB' = 12 \xrightarrow{BB'=2b} 2b = 8 \rightarrow b = 4$ $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 36 = 16 + c^2 \rightarrow c^2 = 20 \rightarrow c = 2\sqrt{5}$ بنابراین: فاصله‌ی کانونی $FF' = 2c = 2(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$	۹
اگر را فاصله‌ی FF' کانونی و BB' طول قطر کوچک بیضی باشد. در این صورت داریم: $FF' = BB' \rightarrow 2c = 2b \rightarrow c = b$ $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{b=c} a^2 = c^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 2c^2 \rightarrow a = \sqrt{2}c$ خروج از مرکز بیضی $\rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{2}c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	۱۰
$e = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{e=\frac{c}{a}} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ $BB' = 2b \xrightarrow{BB'=10} 2b = 10 \rightarrow b = 5$ $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = (5)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \rightarrow a^2 = 25 + \frac{3}{4}a^2$ $\xrightarrow{\times 4} 4a^2 = 100 + 3a^2 \rightarrow a^2 = 100 \rightarrow a = 10$ $c = \frac{\sqrt{3}}{2}a \xrightarrow{a=10} c = \frac{\sqrt{3}}{2}(10) = 5\sqrt{3}$ فاصله‌ی کانونی $FF' = 2c = 2(5\sqrt{3}) = 10\sqrt{3}$	۱۱
$\begin{cases} OA' = a = 3 \\ OF = b = 2 \end{cases} \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} 9 = 4 + c^2 \rightarrow c^2 = 5 \rightarrow c = \sqrt{5}$	۱۲

درست؛ از رابطه‌ی $e = \frac{c}{a}$ قابل استنباط است.	۱۳
$FF' = 3 - (-5) = 8 \xrightarrow{FF' = 2c} 2c = 8 \rightarrow c = 4$ $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=5} 25 = b^2 + 16 \rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow BB' = 6$	۱۴
$AA' = 20 \xrightarrow{AA' = 2a} 2a = 20 \rightarrow a = 10$ $e = \frac{c}{a} \xrightarrow{\frac{3}{5} = \frac{c}{10}} c = 6$ فاصله‌ی کانونی $FF' = 2c = 2(6) = 12$	۱۵

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل هفتم

((ریاضی ۳))



درس ۱: یادآوری مفاهیم مرتبط با احتمال

۱	درست، مستقل بودن دو پیشامد A و B معادل با تساوی $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ است.
۲	مستقل؛ تعریف بیان شده، تعریف دو پیشامد مستقل می باشد.
۳	مستقل
۴	ناسازگار؛ بنابر تعریف دو پیشامد ناسازگار
۵	نادرست؛ با این شرط دو پیشامد داده شده ناسازگارند.

تهیه کننده: جابر عامری

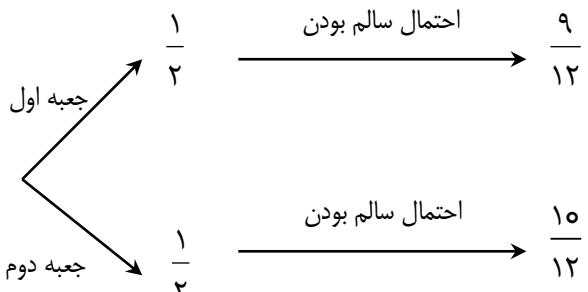
دبیر ریاضی دوره ی دوم متوسطه، استان خوزستان

فصل هفتم

((ریاضی ۳))



درس ۲: احتمال کل

$P(A) = \frac{6}{6+4} \times \frac{5+1}{5+7+1} + \frac{4}{6+4} \times \frac{5}{5+7+1}$ $P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{13} + \frac{4}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{130}$	۱
$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{100} = \frac{11}{200}$	۲
به کمک نمودار درختی می توان نوشت: $P(A) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{6}{10}\right) + \left(\frac{1}{4} \times 1\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{4}{12}\right) + \left(\frac{1}{4} \times 0\right) = \frac{29}{60}$	۳
$P(A) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{11} + \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = \frac{25}{88} + \frac{12}{88} = \frac{37}{88}$	۴
{۱}	۵
الف) $P(A) = \frac{3}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ ب) $P = \frac{3}{4} \times \frac{35}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{15}{100} = \frac{105 + 15}{400} = \frac{120}{400} = \frac{3}{10}$	۶
به روش درختی می توان نوشت :  $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{12} = \frac{17}{24}$	۷
$P(A) = (0/45)(0/04) + (0/55)(0/06) = 0/051$	۸

۹	طبق قانون احتمال کل داریم؛ $P(A) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{15} \right) + \frac{1}{3} (0) + \frac{1}{3} \left(\frac{6}{12} \right) = \frac{1}{15} + \frac{1}{6} = \frac{2+5}{30} = \frac{7}{30}$
۱۰	$P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \right) = \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$ توجه: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی هم شانس نیست.
۱۱	مهره‌ای که از ظرف اول برداشتیم و در ظرف دوم انداختیم، یا زرد است و یا قرمز می‌باشد. پس با توجه به قانون احتمال کل می‌توان نوشت. $P(A) = \frac{6}{11} \times \frac{7+1}{11+1} = \frac{6}{11} \times \frac{8}{12} = \frac{48}{132}$ احتمال اینکه مهره مورد اشاره زرد باشد. $P(B) = \frac{5}{11} \times \frac{7}{11+1} = \frac{5}{11} \times \frac{7}{12} = \frac{35}{132}$ احتمال اینکه مهره مورد اشاره قرمز باشد. $P(E) = \frac{48}{132} + \frac{35}{132} = \frac{83}{132}$
۱۲	 $P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{10} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{15}{20} \right) = \frac{6}{20} + \frac{15}{40} = \frac{27}{40}$
۱۳	الف) $P(A) = \frac{4}{5}$ و $P(B) = \frac{1}{5}$ ب) $P = \left(\frac{4}{5} \right) \left(\frac{35}{100} \right) + \left(\frac{1}{5} \right) \left(\frac{20}{100} \right) = \frac{8}{25}$

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه، استان خوزستان