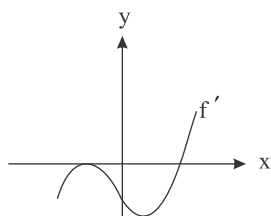


منبع:

۱ شیب خط مماس در نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $y = \tan \frac{x}{p}$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

۲ شکل زیر نمودار تابع مشتق f' است، نمودار تابع f کدام وضعیت را دارد؟


- (۱) یک مینیمم نسبی - دو نقطه عطف
(۲) یک ماکزیمم نسبی - دو نقطه عطف
(۳) ماکزیمم و مینیمم نسبی - دو نقطه عطف
(۴) ماکزیمم و مینیمم نسبی - یک نقطه عطف

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

۳ نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $y = x - 3\sqrt[3]{x}$ در $x = a$ است، مجموعه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $\{-1, 1\}$
(۲) $\{0, 3\}$
(۳) $\{0\}$
(۴) $\emptyset$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۴ اگر T دوره تناوب اصلی تابع با ضابطه $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ باشد این منحنی روی بازه $(\pi, \pi + T)$ چند نقطه عطف دارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) فاقد عطف

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۵ مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & ; x \geq -1 \\ -13 - \frac{9}{x} & ; x < -1 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $\{-1\}$
(۲) $\{1\}$
(۳) $\{-1, 1\}$
(۴) $\emptyset$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

طول نقطه عطف تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & ; x < 1 \\ \frac{1}{x} & ; x \geq 1 \end{cases}$ ، در صورت وجود کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) فاقد نقطه عطف

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

مجموعه طول نقاط عطف منحنی به معادله $y = x|x^2 - 4x|$ ، کدام است؟

- (۱) $\{\frac{4}{3}\}$
(۲) $\{0, \frac{4}{3}, 4\}$
(۳) $\{\frac{4}{3}, 4\}$
(۴) $\{0, \frac{4}{3}\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x) = x^6 - 6x^2 + 5$ باشند. زاویه بین پاره‌های AB و CD، کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۳۰
(۳) ۴۵
(۴) ۶۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

به ازای چند مقدار صحیح k، نقطه عطف منحنی $y = \frac{k}{3}x^3 - (k+2)x^2$ در ناحیه سوم محورهای مختصات قرار دارد؟

- (۱) بیش از ۲
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

خط مماس بر منحنی $y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ در نقطه $(-1, -4)$ از منحنی عبور می‌کند. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- (۱) ۵/۳
(۲) ۵/۴
(۳) ۵/۶
(۴) ۵/۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

تغیر نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x + \frac{x^2}{\pi}$ وقتی $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، به کدام صورت است؟

- (۱) روبه‌پایین
(۲) روبه‌بالا
(۳) ابتدا روبه‌پایین و سپس روبه‌بالا
(۴) ابتدا روبه‌بالا و سپس روبه‌پایین

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۲

مجموعه طول نقاطی که تقعر منحنی به معادله $y = \frac{-2}{x^2 + 3}$ ، روبه بالا باشد، به کدام صورت است؟

(۱) $|x| < 1$ (۲) $|x| < 2$

(۳) $|x| > \sqrt{2}$ (۴) $|x| > \sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۳

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تقعر منحنی به معادله $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{4}x^2$ ، همواره روبه بالا است؟

(۱) $-1 < a < 1$ (۲) $-1 < a < 2$

(۳) $-2 < a < 1$ (۴) $-2 < a < 2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۴

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sin^2 x - 2 \sin x$; $x \in [0, 2\pi]$ ، در کدام بازه صعودی و تقعر آن روبه پایین است؟

(۱) $(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$ (۲) $(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6})$

(۳) $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$ (۴) $(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۵

به ازای چند مقدار صحیح و منفی k ، نقطه عطف منحنی $y = kx^3 + (k+1)x^2$ در ناحیه دوم محورهای مختصات قرار دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) بیش از ۲ (۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۶

طول نقطه عطف نمودار تابع $y = (\omega - x)\sqrt[3]{x^2}$ ، کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر

(۳) ۱ (۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۷

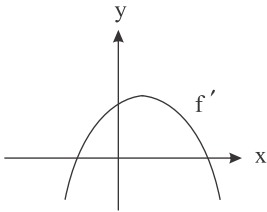
طول نقطه عطف منحنی به معادله $y = \frac{x}{1+|x|}$ ، کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر

(۳) ۱ (۴) فاقد نقطه عطف

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

نمودار f' مشتق تابع f به صورت شکل زیر است. تابع f از نظر نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و نقطه عطف چگونه است؟



(۱) فقط یک ماکزیمم در سمت راست محور y ها

(۲) یک ماکزیمم و یک مینیمم و یک نقطه عطف در سمت راست محور y ها

(۳) یک مینیمم در سمت چپ محور y ها، یک ماکزیمم و یک نقطه عطف در سمت راست محور y ها

(۴) یک ماکزیمم در سمت چپ محور y ها، یک مینیمم و یک نقطه عطف در سمت راست محور y ها

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2|x - 1|$ در بازه (a, b) روبه پایین است. بیشترین مقدار $(b - a)$ کدام است؟

- (۱) ∞ (۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

تقعر تابع با ضابطه $y = x^2|x - 3|$ در بازه (a, b) به طرف y های منفی است، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$
(۳) ۲ (۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

تقعر نمودار تابع با ضابطه $y = x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$ در بازه (a, b) روبه پایین است، بیشترین مقدار $(b - a)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳
(۳) ۴ (۴) ∞

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

مجموعه نقاطی که تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2} \cos x$; $0 \leq x \leq 2\pi$ روبه بالا باشد، در کدام بازه است؟

- (۱) $(0, \frac{3\pi}{4})$ (۲) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$
(۳) $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ (۴) $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

فاصله نقطه ماکزیمم نسبی و یک نقطه عطف منحنی به معادله $y = x^4 - 6x^2 + 5$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{13}$
(۳) $\sqrt{17}$ (۴) $\sqrt{26}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۴ در کدام بازه تقعر تابع با ضابطه $f(x) = x^{\frac{5}{6}} - 12x^{\frac{1}{6}}$ روبه پایین است؟

- (۱) $(-\infty, -8)$ (۲) $(-8, 0)$
(۳) $(-4, 2)$ (۴) $(0, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۵ طول نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}}$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -2 و 0
(۳) 2 (۴) 2 و 0

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۶ طول نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{(2-x)^2}{x}$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر
(۳) 1 (۴) فاقد نقطه عطف

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۷ تقعر تابع به معادله $y = x^2 + \sqrt{x}$ در کدام بازه روبه پایین است؟

- (۱) $(0, \frac{1}{4})$ (۲) $(0, \frac{1}{2})$
(۳) $(0, 1)$ (۴) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۸ تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 6x^5 - 5x^4 + 2x + 7$ در بازه $(a, +\infty)$ روبه بالا است. کمترین مقدار a کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر
(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۲۹ منحنی نمایش تابع $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن روبه بالا است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 3)$
(۳) $(1, 3)$ (۴) $(1, \infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳۰

منحنی نمایش تابع $y = -x^6 + 4x^3 - 3$ ، در کدام بازه صعودی و تقر آن روبه پایین است؟

- (۱) $(2, 3)$ (۲) $(0, 2)$
(۳) $(0, 3)$ (۴) $(2, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۳۱

تقر نمودار تابع $y = (x + 3)\sqrt{x}$ ، در بازه (a, b) روبه پایین است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۲

در کدام بازه، تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$ ، صعودی و تقر نمودار آن، روبه پایین است؟

- (۱) $(-2, 0)$ (۲) $(-2, 1)$
(۳) $(-1, 2)$ (۴) $(0, 1)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۳۳

در کدام بازه، تابع با ضابطه $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2$ ، نزولی و تقر نمودار آن، روبه بالا است؟

- (۱) $(1, 3)$ (۲) $(1, 4)$
(۳) $(0, 1)$ (۴) $(0, 3)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۳۴

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \cos^2 x - 2 \cos x$ ، $x \in [0, 2\pi]$ در کدام بازه، نزولی و تقر آن روبه پایین است؟

- (۱) $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ (۲) $(\pi, \frac{4\pi}{3})$
(۳) $(\frac{2\pi}{3}, \pi)$ (۴) $(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۳۵

اگر $A(1, -3)$ نقطه عطف منحنی به معادله $y = ax^3 - x^2 - 3x + b$ باشد، مقدار تابع در نقطه ماکزیمم نسبی آن کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$
(۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۳۶

تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 + 12}$ در بازه (a, b) روبه بالا است، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳۷

خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 - 3x^2 + 4$ در نقطه عطف آن، محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

- (۱) $\frac{4}{3}$
(۲) $\frac{5}{3}$
(۳) ۲
(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۸

به ازای کدام مقدار a ، نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + ax$ روی نیمساز ناحیه چهارم قرار دارد؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۹

تقعر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^2 + 12}$ در بازه $(-a, a)$ روبه پایین است. بیشترین مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۴۰

در کدام ناحیه دستگاه محورهای مختصات، تقعر نمودار تابع با ضابطه $y = x + \frac{1}{x}$ به سمت بالا است؟

- (۱) اول
(۲) دوم
(۳) سوم
(۴) چهارم

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۴۱

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، در کدام بازه، صعودی و تقعر آن روبه پایین است؟

- (۱) $(-\infty, -1)$
(۲) $(-1, 0)$
(۳) $(0, 1)$
(۴) $(1, +\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۴۲

تقعر منحنی به معادله $y = x\sqrt{x^2 + 2}$ در بازه $(a, +\infty)$ روبه بالا است. کمترین مقدار a ، کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) -1
(۳) 1
(۴) $-\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۴۳

خط راستی بر نمودار تابع $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ مماس شده و از آن عبور می‌کند. شیب این خط کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{4}{3}$
(۴) $\frac{5}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۴۴

نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x}$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن روبه پایین است؟

- (۱) $(-2, 1)$
(۲) $(0, 1)$
(۳) $(-2, 0)$
(۴) $(-\infty, -2)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۴۵

تقعر منحنی با ضابطه $f(x) = x^6 - 6x^2$ در کدام بازه روبه پایین است؟

- (۱) $(-1, 1)$
(۲) $(1, 2)$
(۳) $(1, +\infty)$
(۴) $(-\infty, -1)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۴۶

اگر $A(1, -2)$ نقطه عطف منحنی به معادله $y = ax^3 + bx^2 - 3x - 1$ باشد، مقدار تابع در نقطه ماکزیمم نسبی آن، کدام است؟

- (۱) 4
(۲) 5
(۳) 6
(۴) فاقد ماکزیمم نسبی

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۷

اگر تابع‌هایی به صورت $f(x) = x^3 - (m+2)x^2 + 3x$ همواره صعودی باشند، آنگاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟

- (۱) $[-2, 0]$
(۲) $[-2, 2]$
(۳) $[-1, 1]$
(۴) $[0, 1]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴۸

اگر $A(1, -11)$ نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ باشد، آنگاه مقدار $f(-1)$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۴۹

به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $y = \frac{mx + 2}{x - 1 + m}$ روی بازه $(1, +\infty)$ نزولی است؟ ($m \neq 2$)

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۵۰

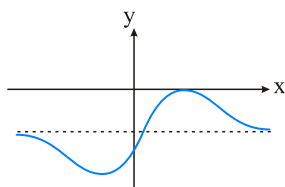
f تابع هموگرافیک، $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)}$ است. کدام عدد می‌تواند حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$ باشد؟

- (۱) صفر
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) ۱
(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۵۱

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 + 2x - 2}{x^2 + b}$ است. دوتایی (a, b) به کدام صورت زیر می‌تواند باشد؟



- (۱) $(-2, 5)$
(۲) $(-1, 3)$
(۳) $(-1, 5)$
(۴) $(1, 3)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۵۲

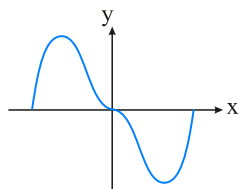
معادله درجه سوم $x^3 - 3x^2 - 9x + a = 0$ دارای ریشه مضاعف حقیقی منفی می‌باشد، a کدام است؟

- (۱) -۵
(۲) -۴
(۳) -۳
(۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۵۳

شکل زیر نمودار کدام تابع با ضابطه زیر است؟



$$y = -x^3 \sqrt{4 - x^2} \quad (1)$$

$$y = -x \sqrt{4 - x^2} \quad (2)$$

$$y = x^3 \sqrt{x^2 - 4} \quad (3)$$

$$y = (x^2 - 4) \sqrt[3]{x} \quad (4)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۵۴

تابع با ضابطه $y = ax + b + \frac{2x^2}{x+1}$ تابع هموگرافیکی است که محور x ها را در نقطه $x = 1$ قطع می‌کند، b کدام است؟

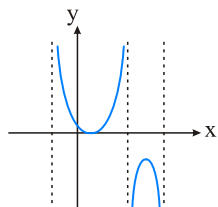
$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad -1$$

$$(3) \quad 2 \quad (4) \quad -2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۵۵

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{1 + a \sin x}{1 + b \sin x}$ در بازه $[\frac{-\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$ می‌باشد. دوتایی (a, b) کدام است؟



$$(1) \quad (1, 2)$$

$$(2) \quad (-1, 2)$$

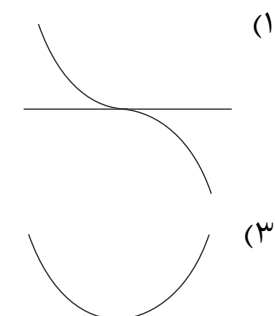
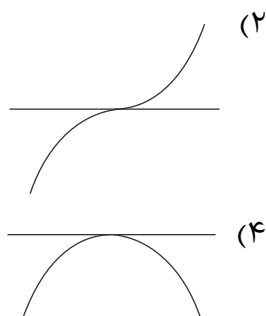
$$(3) \quad (2, -1)$$

$$(4) \quad (-2, 1)$$

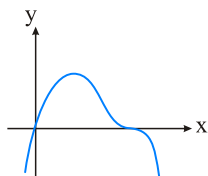
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۵۶

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x + \sin x$ در همسایگی $x = 0$ چگونه است؟



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶



$$y = x(1 - x)^3 \quad (1)$$

$$y = x(x - 1)^3 \quad (2)$$

$$y = x(1 - x^3) \quad (3)$$

$$y = x(x^3 - 1) \quad (4)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

تابع با ضابطه $y = ax + b + \frac{x^2}{2x - 1}$ تابع هموگرافیکی است که محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. $a + b$ کدام است؟

$$-2 \quad (2)$$

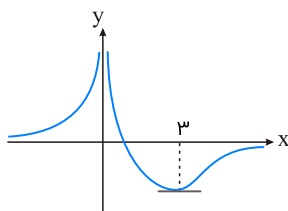
$$2 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + 3}{x^2 + bx}$ می‌باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟



$$(-2, 2) \quad (1)$$

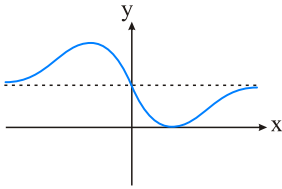
$$(-2, 0) \quad (2)$$

$$(2, 0) \quad (3)$$

$$(2, 2) \quad (4)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 + 1}$ می‌باشد. دوتایی (a, b) کدام است؟



(۱) $(1, -2)$

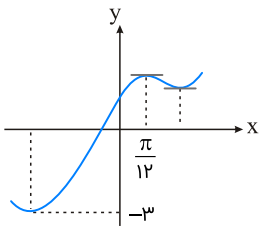
(۲) $(1, 2)$

(۳) $(2, -4)$

(۴) $(2, 4)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$ می‌باشد. b کدام است؟



(۱) ۲

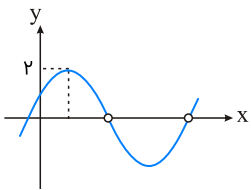
(۲) -۲

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) $-\sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a \sin 2x + b}{\sin x + \cos x}$ ، در یک دوره تناوب می‌باشد. a کدام است؟



(۱) -۱

(۲) ۱

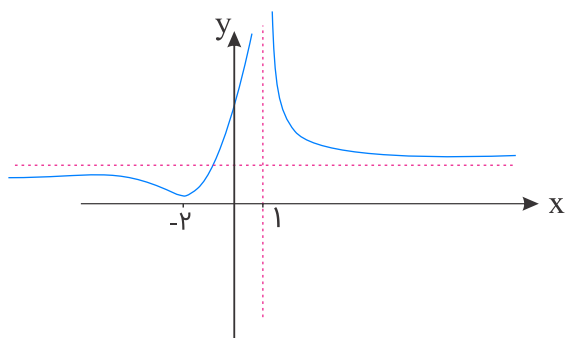
(۳) $\sqrt{2}$

(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۶۳

شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 + bx + c}$ است. a کدام است؟



(۱) -۲

(۲) ۱

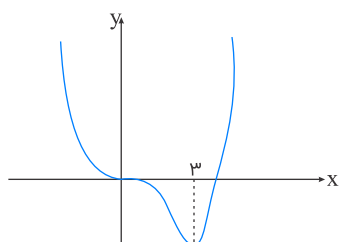
(۳) ۲

(۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۶۴

شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$ است. $f(-2)$ کدام است؟



(۱) ۳۲

(۲) ۳۶

(۳) ۴۰

(۴) ۴۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۵

اگر f تابع هموگرافیک و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$ باشد، کدام مورد می‌تواند محل تقاطع مجانب‌های تابع f باشد؟

(۲) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۱) $(\sqrt{\pi}, \pi)$ (۴) $(1, 2)$ (۳) $(-1, 1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۶۶

محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک $y = \frac{ax + 3}{(a+1)x + (a-1)}$ ، نقطهٔ مینیمم تابع $y = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{6}$ است. نمودار این تابع هموگرافیک، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

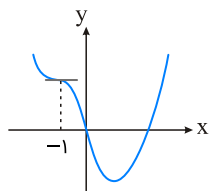
(۲) -۳

(۱) ۳

(۴) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^6 - x^3 + ax^2 + bx$ می‌باشد. b کدام است؟



(۱) -۱۱

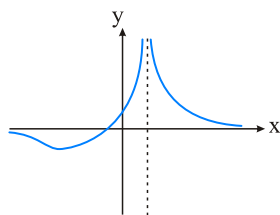
(۲) -۱۰

(۳) -۹

(۴) -۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

شکل زیر، نمودار تابع $y = \frac{x+a}{x^2+bx+4}$ می‌باشد. مقادیر a و b چگونه است؟



(۱) $b = 4$ و $a < 0$

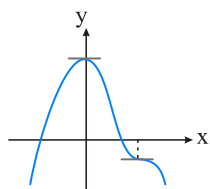
(۲) $b = -4$ و $a < 0$

(۳) $b = 4$ و $a > 0$

(۴) $b = -4$ و $a > 0$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -x^6 + \lambda x^3 + ax^2 + b$ می‌باشد. a کدام است؟



(۱) -۱۸

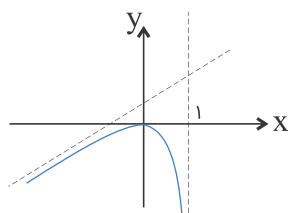
(۲) -۱۵

(۳) -۱۲

(۴) -۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+a}{x+b}$ ، در بازه $(-\infty, 1)$ می‌باشد. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟



(۱) $(1, -1)$

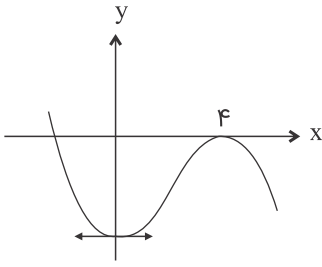
(۲) $(1, 0)$

(۳) $(0, 1)$

(۴) $(0, -1)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

شکل زیر نمودار تابع به معادله $y = ax^3 + bx^2 - 16$ می‌باشد. a کدام است؟



(۱) -۱

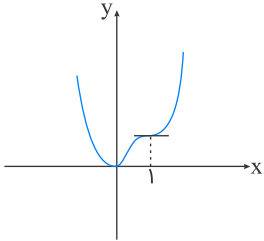
(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $-\frac{1}{2}$

(۴) $-\frac{2}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ است. a کدام است؟



(۱) -۸

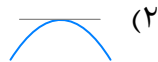
(۲) -۷

(۳) -۵

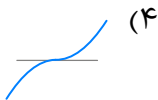
(۴) -۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

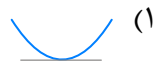
نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$ در نقطه $x = 1$ کدام وضع را با محور x ها دارد؟



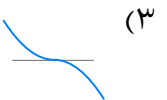
(۲)



(۴)



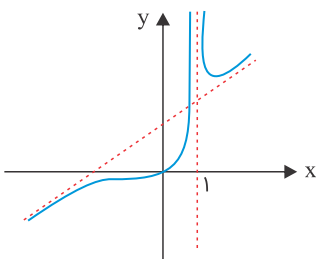
(۱)



(۳)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 + ax^2}{x^2 + bx + c}$ می‌باشد، عدد $(bc - a)$ کدام است؟



(۱) -۲

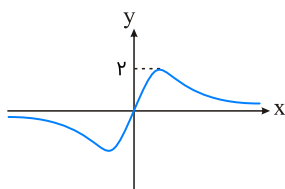
(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ می‌باشد. a کدام است؟



(۱) ۱

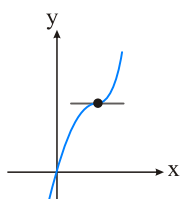
(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

شکل زیر، نمودار تابع به معادله $y = x^3 + ax^2 + bx$ است. دوتایی (a, b) به کدام صورت می‌تواند باشد؟



(۱) $(-3, 4)$

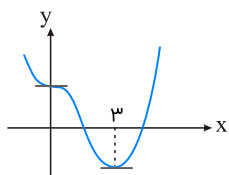
(۲) $(-1, 3)$

(۳) $(-6, 12)$

(۴) $(3, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + 2$ می‌باشد. $a + b$ کدام است؟



(۱) -۱

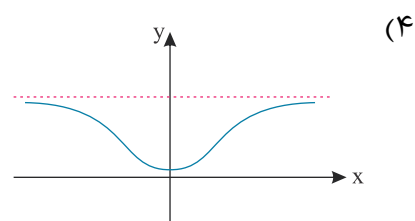
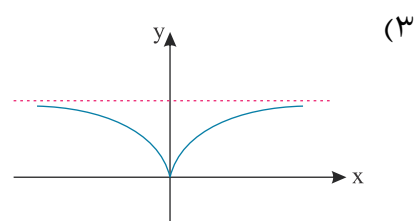
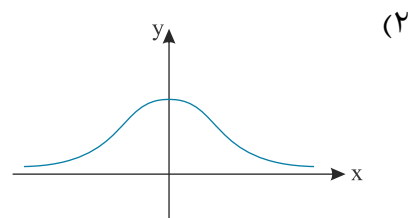
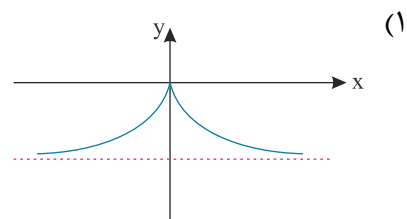
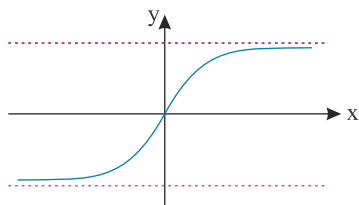
(۲) صفر

(۳) ۱

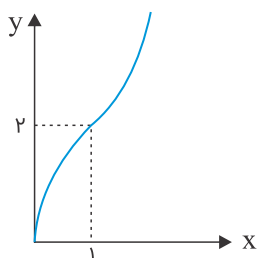
(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

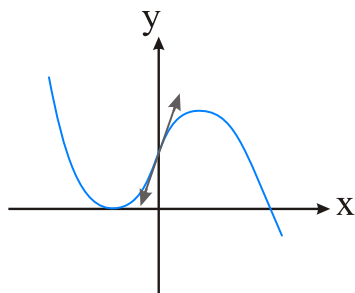
شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ می‌باشد. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

شکل زیر، نمودار تابع $y = ax^{\frac{3}{4}} + bx^{\frac{1}{4}}$ است، b کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = -x^3 + ax^2 + bx + 2$ می‌باشد. زوج مرتب (a, b) کدام است؟

(۱) $(0, -3)$

(۲) $(1, -2)$

(۳) $(0, 3)$

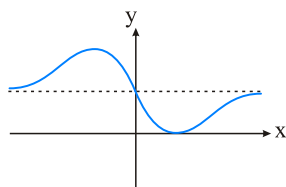
(۴) $(0, 6)$

اگر تابع‌هایی به صورت $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 8x$ دارای ماکزیمم و مینیمم با طول‌های منفی باشند، آنگاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟

- (۱) $(-\infty, -\frac{1}{3})$ (۲) $(-4, -1)$
(۳) $(-\infty, -2)$ (۴) $(-\infty, -4)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 8}{x^2 + 4}$ است. $a + b$ کدام است؟



- (۱) -7
(۲) -6
(۳) 9
(۴) 10

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

باتوجه به نمودار تابع $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12x$ ، به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله $y = m$ با نمودار تابع مفروض فقط در دو نقطه مشترک است؟

- (۱) 27 و $-\frac{44}{3}$ (۲) 24 و $-\frac{44}{3}$
(۳) 24 و $-\frac{16}{3}$ (۴) 27 و $-\frac{16}{3}$

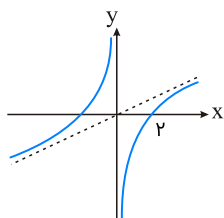
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

باتوجه به نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ ، به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله $f(x) = m$ فقط دارای یک ریشه حقیقی است؟

- (۱) $m < 2$ یا $m > 7$ (۲) $m < 3$ یا $m > 6$
(۳) $m < 3$ یا $m > 7$ (۴) $m < 2$ یا $m > 6$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

شکل زیر منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{ax^2 - 1}{x + b}$ است. $a + b$ کدام است؟



(۱) صفر

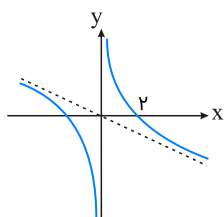
(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

شکل زیر، منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{2 + ax^2}{b + x}$ است. $a - b$ کدام است؟



(۱) -۱

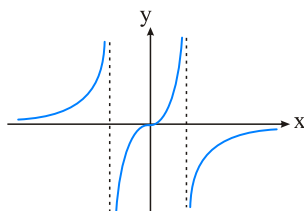
(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) صفر

(۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{ax^2 + bx + 1}$ است. مقادیر a و b چگونه است؟



(۱) $a < 0, b = 0$

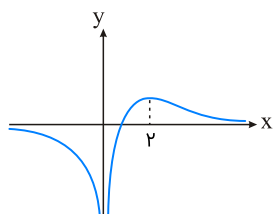
(۲) $a > 0, b = 0$

(۳) $a > 0, b = 1$

(۴) $a < 0, b = 1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

شکل زیر نمودار تابع $y = \frac{x+b}{x^2+a}$ می‌باشد. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟



(۱) $(-1, -1)$

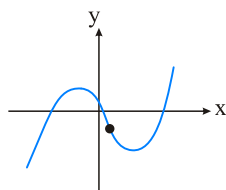
(۲) $(0, -1)$

(۳) $(0, 1)$

(۴) $(1, -2)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{2}{3}x^3 + ax^2 + bx$ است. زوج مرتب (a, b) به کدام صورت می‌تواند باشد؟



(۱) $(-1, -4)$

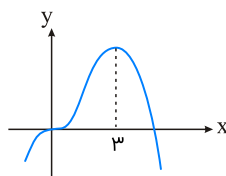
(۲) $(-1, 4)$

(۳) $(1, -4)$

(۴) $(1, 4)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

شکل زیر، نمودار تابع $y = ax^6 + 2x^3 + bx^2$ می‌باشد. a کدام است؟



(۱) -1

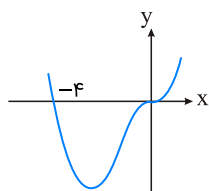
(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $-\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = x^6 + ax^3 + bx$ می‌باشد. با تعیین مقادیر a و b ، مینیمم تابع، کدام است؟



(۱) -36

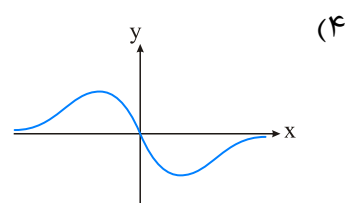
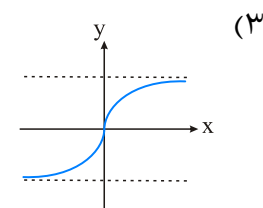
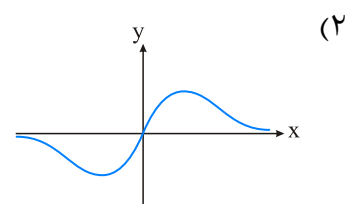
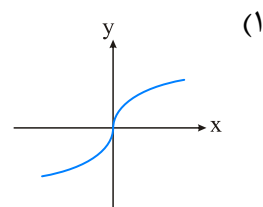
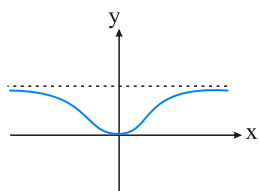
(۲) -32

(۳) -27

(۴) -24

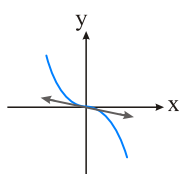
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ می‌باشد. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$ است. دوتایی (a, b) کدام می‌تواند باشد؟



(۱) $(-1, 0)$

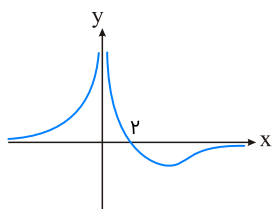
(۲) $(0, -1)$

(۳) $(0, 1)$

(۴) $(1, 0)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \frac{ax + 2}{x^2 + b}$ است. با تعیین a و b ، مینیمم نسبی این تابع کدام است؟



(۱) $-\frac{1}{8}$

(۲) $-\frac{1}{4}$

(۳) $-\frac{3}{8}$

(۴) $-\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

منبع:

گزینه ۳

۱

گام اول:

(الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

(ب) نقطه $x = a$ نقطه عطف تابع است هرگاه تابع در این نقطه پیوسته باشد، مماس واحد داشته و جهت تقعرش نیز عوض شود.

گام دوم:

ابتدا با محاسبه مشتق اول و دوم تابع $y = \tan \frac{x}{p}$ ، طول نقطه عطف را به دست می‌آوریم.

$$y = \tan \frac{x}{p} \Rightarrow y' = \frac{1}{p} (1 + \tan^2 \frac{x}{p})$$

$$y'' = \frac{1}{p} (2 \times \frac{1}{p} \tan \frac{x}{p}) (1 + \tan^2 \frac{x}{p}) = \frac{1}{p} (\tan \frac{x}{p}) (1 + \tan^2 \frac{x}{p})$$

$$y'' = 0 \xrightarrow{1 + \tan^2 \frac{x}{p} \neq 0} \tan \frac{x}{p} = 0 \Rightarrow \frac{x}{p} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$$

به ازای $k \in \mathbb{Z}$ ، نقاط به فرم $x = 2k\pi$ ، نقطه عطف تابع $y = \tan \frac{x}{p}$ هستند. مقدار مشتق تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم.

$$y' = \frac{1}{p} (1 + \tan^2 \frac{x}{p}) \xrightarrow{x=2k\pi} y' = \frac{1}{p} (1 + \tan^2 \frac{2k\pi}{p}) = \frac{1}{p} (1 + \tan^2 k\pi)$$

$$= \frac{1}{p} (1 + 0) = \frac{1}{p}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

گزینه ۱

۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

گام اول

(الف) نقاط تقاطع نمودار تابع $f'(x)$ با محور x ها (جایی که f' تغییر علامت می‌دهد)، نقاط اکسترمم تابع $f(x)$ است.

(ب) نقاط اکسترمم تابع $f'(x)$ ، نقاط عطف تابع $f(x)$ است.

گام دوم

باتوجه به شکل، نمودار $f'(x)$ تنها در یک نقطه محور x ها را قطع کرده است. قبل از این نقطه $f'(x) < 0$ و بعد از آن $f'(x) > 0$ است بنابراین تابع $f(x)$ دارای یک مینیمم نسبی است. دقت کنید نقاطی که $f'(x)$ بر محور x ها مماس شده است، نقاط اکسترمم تابع نیست.

تابع f' دو نقطه اکسترمم دارد (یک ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی)، بنابراین مقدار f'' در این نقاط برابر صفر است و مقدارش قبل و بعد از این نقاط تغییر علامت داده است، پس تابع f دو نقطه عطف نیز دارد.

گام اول:

نقطه $x = a$ ، نقطه عطف تابع f است هرگاه:

الف) تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد.

ب) خط مماس تابع f در نقطه $x = a$ موجود باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در نقطه $x = c$ عوض شود.

گام دوم:

مشتق اول و دوم تابع داده شده را محاسبه کرده و با تعیین علامت مشتق دوم آن، نقطه‌ای که در شرایط گام اول صدق کند را می‌یابیم.

$$y = x - 3\sqrt[3]{x} = x - 3x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = 1 - x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow y'' = \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

تابع $y = x - 3\sqrt[3]{x}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است و خط مماس واحد دارد زیرا:

$$y'_+(0) = y'_-(0) = -\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	$-$	$\frac{2}{3}$	$+$

همچنین باتوجه به جدول فوق علامت y'' قبل و بعد از نقطه $x = 0$ مخالف یکدیگر است؛ بنابراین مجموعه نقاط عطف تابع $y = x - 3\sqrt[3]{x}$ به صورت $\{0\}$ است.

باتوجه به فرمول‌های کمان 2α ، تابع y را ساده می‌کنیم. می‌دانیم:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$y = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1 + 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

دوره تناوب تابع مثلثاتی $y = \tan ax$ از رابطه $T = \frac{\pi}{|a|}$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$y = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$$

اکنون طول نقاط عطف تابع y را بر روی بازه $(\pi, 3\pi)$ به دست می‌آوریم، پس مشتق اول و دوم تابع را محاسبه و ریشه‌های y'' را تعیین می‌کنیم.

$$y = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2})$$

$$y'' = \frac{1}{2} (\tan \frac{x}{2}) (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) \Rightarrow y'' = 0$$

$$\xrightarrow{1 + \tan^2 \frac{x}{2} \neq 0} \tan \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{x \in (\pi, 3\pi)} x = 2\pi$$

بنابراین تابع $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ تنها یک نقطه عطف بر روی بازه $(\pi, 3\pi)$ دارد.

گام اول:

$x = a$ طول نقطه عطف تابع f است هرگاه:

الف) تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد.

ب) خط مماس تابع f در نقطه $x = a$ موجود و واحد باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در نقطه $x = a$ عوض شود.

گام دوم:

مشتق اول و دوم تابع f را به دست آورده و شرایط گام اول را بررسی می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & ; x \geq -1 \\ -13 - \frac{9}{x} & ; x < -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -4$$

تابع f در $x = -1$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & ; x > -1 \\ \frac{9}{x^2} & ; x < -1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(-1) = f'_-(-1) = 9$$

تابع f در نقطه $x = -1$ دارای مماس واحد است.

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 6 & ; x > -1 \\ -\frac{18}{x^3} & ; x < -1 \end{cases}$$

$$f''_+(-1) = -12, \quad f''_-(-1) = 18$$

اکنون با تعیین علامت تابع $f''(x)$ داریم:

$$6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$6x - 6$			-	+
$-\frac{18}{x^3}$	+	+		
y''	+	+	-	+

تابع $f(x)$ در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ پیوسته و دارای مماس واحد است همچنین قبل و بعد از این دو نقطه تغییر علامت می‌دهد؛ بنابراین طول نقاط عطف تابع f به صورت مجموعه $\{-1, 1\}$ است.

نکته:

$x = a$ طول نقطه عطف تابع f است هرگاه:

الف) تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد.

ب) خط مماس تابع f در نقطه $x = a$ موجود باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در نقطه $x = a$ عوض شود.

ضابطه مشتق اول و دوم تابع f را به دست آورده و شرایط بیان شده در نکته را بررسی می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & ; x < 1 \\ \frac{1}{x} & ; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1$$

تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ از جمله در نقطه $x = 1$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} -x & ; x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & ; x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) = f'_-(1) = -1$$

تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ و از جمله در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر و دارای مماس واحد است.

$$f''(x) = \begin{cases} -1 & ; x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & ; x > 1 \end{cases}$$

$$f''_+(1) = 2, \quad f''_-(1) = -1$$

تابع f'' قبل و بعد از نقطه $x = 1$ تغییر علامت داده است؛ چون سایر شرایط (پیوستگی و داشتن خط مماس واحد) نیز برقرار بود پس این نقطه، نقطه عطف تابع $f(x)$ خواهد بود.

گام اول:

$x = a$ طول نقطه عطف تابع f است هرگاه:

(الف) تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد.

(ب) خط مماس تابع f در نقطه $x = a$ موجود باشد.

(ج) جهت تقعر تابع f در نقطه $x = a$ عوض شود.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت درون قدر مطلق، تابع داده شده را ساده می کنیم، سپس بررسی می کنیم چه نقاطی شرایط ذکر شده در گام را دارند.

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

x	0	4
$x^3 - 4x$	$+$	$-$

$$\Rightarrow y = x|x^3 - 4x| = \begin{cases} x(x^3 - 4x) & ; x > 4 \\ x(-x^3 + 4x) & ; 0 \leq x \leq 4 \\ x(x^3 - 4x) & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} x^3 - 4x^2 & ; x > 4 \\ -x^3 + 4x^2 & ; 0 \leq x \leq 4 \\ x^3 - 4x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 - 8x & ; x > 4 \\ -3x^2 + 8x & ; 0 < x < 4 \\ 3x^2 - 8x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'' = \begin{cases} 6x - 8 & ; x > 4 \\ -6x + 8 & ; 0 < x < 4 \\ 6x - 8 & ; x < 0 \end{cases}$$

با تعیین علامت تابع y'' داریم:

$$6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$-6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

x	$+\infty$	o	$\frac{4}{3}$	4	$+\infty$
$6x - 8$	-		o		+
$-6x + 8$		+	o	-	
y''	-	+	o	-	+

تابع y'' در سه نقطه $0, \frac{4}{3}, 4$ تغییر علامت داده است. بررسی می‌کنیم در کدام یک از این نقاط شرط پیوستگی و داشتن مماس واحد نیز برقرار است.

تابع y در تمام نقاط $\mathbb{R}$ و از جمله در سه نقطه $0, \frac{4}{3}, 4$ پیوسته است. داریم:

$$y'_{-}(0) = y'_{+}(0) = 0, \quad y'_{-}\left(\frac{4}{3}\right) = y'_{+}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

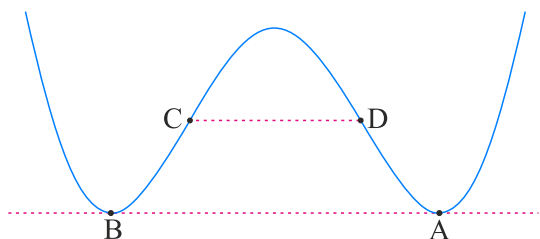
اما در نقطه $x = 4$ داریم:

$$y'_{-}(4) = -16, \quad y'_{+}(4) = 16$$

در نتیجه تابع y در نقطه $x = 4$ مماس واحد ندارد.

بنابراین مجموعه نقاط عطف تابع y عبارت است از: $\{0, \frac{4}{3}\}$

راه حل اول: در تابع درجه چهارم $y = ax^4 + bx^2 + c$ اگر $a > 0$ و $b < 0$ باشد نمودار به صورت زیر است:



به دلیل تقارن شکل، پاره‌خط‌های AB و CD با هم موازی‌اند و در نتیجه زاویه بین آن‌ها صفر درجه است.
راه حل دوم:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$$

نقاط مینیمم نسبی تابع هستند، پس شیب خط AB برابر صفر است. حال نقاط عطف تابع را می‌یابیم:

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

نقاط عطف تابع هستند، پس شیب خط CD نیز برابر صفر است؛ در نتیجه دو خط AB و CD موازی هستند.

نقطه عطف تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{k}{\gamma} x^{\gamma} - (k + \gamma)x^{\gamma}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\gamma}{\gamma} k x^{\gamma-1} - \gamma(k + \gamma)x^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow y'' = \gamma k x^{\gamma-2} - \gamma(k + \gamma)x^{\gamma-2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\gamma(k + \gamma)}{\gamma k}$$

عرض نقطه عطف را به دست می‌آوریم:

$$y\left(\frac{\gamma(k + \gamma)}{\gamma k}\right) = \frac{k}{\gamma} \left(\frac{\gamma(k + \gamma)}{\gamma k}\right)^{\gamma} - (k + \gamma) \left(\frac{\gamma(k + \gamma)}{\gamma k}\right)^{\gamma}$$

$$= \left(\frac{\gamma(k + \gamma)}{\gamma k}\right)^{\gamma} \left(\frac{k}{\gamma} - (k + \gamma)\right) = \left(\frac{\gamma(k + \gamma)}{\gamma k}\right)^{\gamma} \left(-\frac{\gamma}{\gamma}(k + \gamma)\right)$$

چون نقطه عطف در ناحیه سوم محورهای مختصات قرار دارد پس طول و عرض آن منفی است، بنابراین:

$$x = \frac{\gamma(k + \gamma)}{\gamma k} < 0 \Rightarrow k \in (-\gamma, 0) \quad (1)$$

$$y < 0 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\gamma(k + \gamma)}{\gamma k}\right)^{\gamma}}_{+} \left(-\frac{\gamma}{\gamma}(k + \gamma)\right) < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\gamma}{\gamma}(k + \gamma) < 0 \Rightarrow x \in (-\gamma, +\infty) \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} (-\gamma, 0)$$

تنها عدد صحیح در این بازه عدد -1 است، بنابراین تنها به ازای یک عدد صحیح -1 نقطه عطف منحنی در ناحیه سوم محورهای مختصات قرار دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

اگر خط مماس از منحنی عبور کند، نقطه داده شده نقطه عطف است. پس:

$$y' = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow y'' = 6x + 2a = 0 \\ \Rightarrow -6 + 2a = 0 \Rightarrow a = 3$$

اگر نقطه را در منحنی صدق دهیم:

$$-4 = -1 + 3(1) + b(-1) - 1 \Rightarrow b = 5$$

بنابراین:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0.6$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

گام اول:

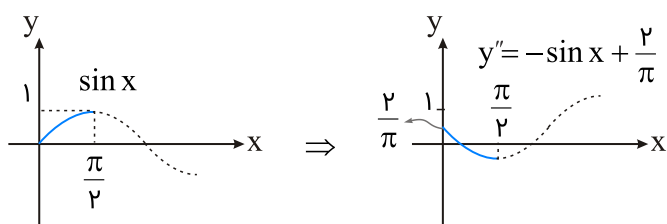
جهت تقعر منحنی یک تابع را می‌توان با تعیین علامت مشتق دوم این تابع مشخص کرد. تقعر منحنی تابع روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه نامساوی $y'' > 0$ روی آن بازه برقرار باشد و تقعر منحنی تابع روی یک بازه روبه‌پایین است هرگاه نامساوی $y'' < 0$ روی آن بازه برقرار باشد.

گام دوم:

مشتق دوم تابع داده شده را محاسبه و سپس تعیین علامت می‌کنیم.

$$y = \sin x + \frac{x^2}{\pi} \Rightarrow y' = \cos x + \frac{2x}{\pi} \Rightarrow y'' = -\sin x + \frac{2}{\pi}$$

باتوجه به اینکه می‌دانیم $1 < \frac{2}{\pi} < \frac{1}{\pi}$ ($\pi \simeq 3.14$) است تغییرات علامت y'' را روی بازه $[0, \frac{\pi}{\pi}]$ بررسی می‌کنیم.



باتوجه به نمودار فوق، مقدار تابع y'' در بازه $[0, \frac{\pi}{\pi}]$ ، ابتدا مثبت و سپس منفی است. بنابراین تقعر تابع y روی این بازه ابتدا روبه‌بالا و سپس روبه‌پایین است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گام اول:

جهت تقعر منحنی یک تابع را مشتق دوم آن تابع مشخص می‌کند. تقعر منحنی روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه روی آن بازه $y'' > 0$ باشد و روبه‌پایین است هرگاه $y'' < 0$ باشد.

گام دوم:

ابتدا مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \frac{-2}{x^2 + 3} \Rightarrow y' = \frac{0 - 2x(-2)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{4(x^2 + 3)^2 - 2(2x)(x^2 + 3)(4x)}{(x^2 + 3)^4} = \frac{-12x^2 + 12}{(x^2 + 3)^3}$$

طبق گام اول، تقعر منحنی در جایی روبه‌بالا است که نامساوی $y'' > 0$ برقرار باشد.

$$y'' > 0 \xrightarrow{(x^2 + 3)^3 > 0} -12x^2 + 12 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گام اول:

جهت تقعر منحنی یک تابع را مشتق دوم آن تابع مشخص می‌کند. تقعر منحنی روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه روی آن بازه $y'' > 0$ باشد و روبه‌پایین است هرگاه $y'' < 0$ باشد.

گام دوم:

ابتدا مشتق دوم تابع داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$y = x^6 + ax^3 + \frac{3}{7}x^2 \Rightarrow y' = 6x^5 + 3ax^2 + 3x \Rightarrow y'' = 12x^4 + 6ax + 3$$

می‌خواهیم تقعر منحنی همواره روبه‌بالا باشد پس طبق گام اول باید نامعادله $y'' > 0$ همواره برقرار باشد. می‌دانیم یک چندجمله‌ای درجه‌دو در صورتی همواره مثبت است که اولاً $\Delta < 0$ و ثانیاً ضریب x^2 مثبت باشد. با بررسی این دو شرط محدوده a را تعیین می‌کنیم. چون $12 > 0$ است پس فقط برقراری شرط اول را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta = (6a)^2 - 4(12)(3) < 0 \Rightarrow 36a^2 - 144 < 0$$

$$\Rightarrow 36a^2 < 144 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow |a| < 2 \Rightarrow -2 < a < 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x = 2 \cos x (\sin x - 1)$$

$$\text{صعودی} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 2 \cos x \underbrace{(\sin x - 1)}_{\text{نامثبت}} > 0 \Rightarrow \cos x < 0$$

$$\Rightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \quad (*)$$

$$f''(x) = -2 \sin x (\sin x - 1) + 2 \cos^2 x = -2 \sin^2 x + 2 \sin x + 2 \cos^2 x$$

$$= -2 \sin^2 x + 2 \sin x + 2(1 - \sin^2 x) = -4 \sin^2 x + 2 \sin x + 2 \xrightarrow{\sin x = t} -4t^2 + 2t + 2$$

$$\text{تقعر روبه پایین} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow -4t^2 + 2t + 2 < 0 \Rightarrow t < \frac{-1}{4} \text{ یا } t > 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x > 1 \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \\ \sin x < \frac{-1}{4} \xrightarrow{-1 \leq \sin x \leq 1} -1 \leq \sin x < \frac{-1}{4} \Rightarrow x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right) \end{cases} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*) \cap (**)} x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

نقطه عطف تابع فوق از $y'' = 0$ به دست می‌آید، یعنی:

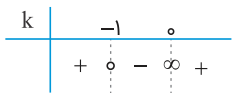
$$y' = 3kx^2 + 2(k+1)x \Rightarrow y'' = 6kx + 2(k+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{k+1}{3k}$$

$$\Rightarrow y = k \times \frac{-(k+1)^3}{27k^3} + \frac{(k+1)(k+1)^2}{9k^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-(k+1)^3 + 3(k+1)^3}{27k^2} \Rightarrow y = \frac{2(k+1)^3}{27k^2}$$

اگر این نقطه در ناحیه دوم باشد:

$$x < 0 \Rightarrow -\frac{k+1}{3k} < 0 \Rightarrow \frac{k+1}{3k} > 0$$



$$\Rightarrow k \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

$$y > 0 \Rightarrow \frac{2(k+1)^3}{27k^2} > 0 \Rightarrow (k+1) > 0 \Rightarrow k > -1$$

پس لازم است $k > 0$ باشد، یعنی هیچ مقدار صحیح و منفی k وجود ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

گام اول

نقطه $x = a$ ، نقطه عطف تابع محسوب می‌شود هرگاه تابع در آن نقطه پیوسته و دارای مماس واحد باشد و همچنین مشتق دوم تابع در آن نقطه تغییر علامت دهد.

گام دوم

ابتدا ضابطه مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y &= (5 - x) \sqrt[3]{x^2} = (5 - x) x^{\frac{2}{3}} \\ \Rightarrow y' &= -x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} (5 - x) x^{-\frac{1}{3}} \\ y'' &= -\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{9} (5 - x) x^{-\frac{4}{3}} \\ &= -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2(5 - x)}{9x\sqrt[3]{x}} = \frac{-12x - 10 + 2x}{9x\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

برای یافتن نقطه عطف تابع، معادله $y'' = 0$ را حل می‌کنیم:

$$y'' = 0 \Rightarrow -10x - 10 = 0 \Rightarrow 10x = -10 \Rightarrow x = -1$$

در $x = -1$ تابع دارای مماس واحد است و قبل و بعد از آن علامت y'' عوض می‌شود؛ بنابراین $x = -1$ نقطه عطف تابع است.

گام اول

نقطه $x = c$ ، نقطه عطف تابع f است، هرگاه:

(الف) f در c پیوسته باشد.

(ب) نمودار f در c ، خط مماس واحد داشته باشد.

(ج) جهت تقعر تابع f در c عوض شود (علامت f'' در دو طرف c عوض شود).

گام دوم

$$y = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & ; x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & ; x > 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} \frac{-2}{(1+x)^3} & ; x > 0 \\ \frac{2}{(1-x)^3} & ; x < 0 \end{cases}$$

معادله $y'' = 0$ جواب ندارد اما توجه داشته باشید که تابع در نقطه $x = 0$ پیوسته است و مماس واحد دارد ($y'_-(0) = y'_+(0) = 1$) و همچنین جهت تقعر تابع قبل و بعد از این نقطه عوض می‌شود ($y''_-(0) = 2$, $y''_+(0) = -2$)؛ بنابراین نقطه $x = 0$ نقطه عطف تابع است.

گام اول

(الف) نقاط تقاطع تابع $f'(x)$ با محور x ها (جایی که f' تغییر علامت می‌دهد)، نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است.
(ب) نقاط اکسترمم تابع $f'(x)$ ، نقاط عطف تابع $f(x)$ است.

گام دوم

تابع $f'(x)$ در دو نقطه محور x ها را قطع کرده است. سمت چپ محور y ها، ابتدا f' منفی و بعد از قطع محور x ها، f' مثبت می‌شود؛ بنابراین تابع f در این نقطه دارای یک مینیمم نسبی است. سمت راست محور y ها، قبل از نقطه تقاطع f' مثبت و بعد از نقطه تقاطع f' منفی است؛ بنابراین تابع f در این نقطه دارای یک ماکزیمم نسبی است.
تابع $f'(x)$ دارای یک نقطه ماکزیمم نسبی است، بنابراین مقدار f'' در این نقطه برابر صفر شده و یک نقطه عطف برای تابع $f(x)$ محسوب می‌شود.

گام اول:

$$|u| = \begin{cases} u & ; u \geq 0 \\ -u & ; u < 0 \end{cases} \text{ الف) می‌دانیم:}$$

ب) جهت تقعر منحنی یک تابع را می‌توان با تعیین علامت مشتق دوم آن تابع، مشخص کرد. تقعر منحنی روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه روی آن بازه $y'' > 0$ باشد و روبه‌پایین است هرگاه $y'' < 0$ باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت درون قدر مطلق، $f(x)$ را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس مشتق دوم آن را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^2|x-1| = \begin{cases} x^2(x-1) & ; x \geq 1 \\ x^2(-(x-1)) & ; x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & ; x \geq 1 \\ -x^3 + x^2 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & ; x > 1 \\ -3x^2 + 2x & ; x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x - 2 & ; x > 1 \\ -6x + 2 & ; x < 1 \end{cases}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادله $f''(x) < 0$ را روی هرکدام از دو بازه $x > 1$ و $x < 1$ به دست می‌آوریم:

$$x > 1 : 6x - 2 < 0 \Rightarrow 6x < 2 \Rightarrow x < \frac{1}{3} \text{ غ.ق.ق}$$

$$x < 1 : -6x + 2 < 0 \Rightarrow -6x < -2 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \xrightarrow{x < 1} \frac{1}{3} < x < 1$$

بنابراین تقعر تابع $f(x)$ روی بازه $(\frac{1}{3}, 1)$ روبه‌پایین است پس:

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = 1 \Rightarrow b - a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

گام اول:

$$|u| = \begin{cases} u & ; u \geq 0 \\ -u & ; u < 0 \end{cases} \text{ الف) می‌دانیم:}$$

ب) جهت تقعر منحنی یک تابع را می‌توان با تعیین علامت مشتق دوم تابع، مشخص کرد. تقعر منحنی تابع روی یک بازه، روبه‌بالا (به‌طرف ی‌های مثبت) است هرگاه $y'' > 0$ باشد و روبه‌پایین (به‌طرف ی‌های منفی) است هرگاه $y'' < 0$ باشد.

گام دوم:

ابتدا تابع $f(x)$ را با تعیین علامت عبارت درون قدر مطلق به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & ; x \geq 3 \\ -(x - 3) & ; x < 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x - 3) & ; x \geq 3 \\ -x^2(x - 3) & ; x < 3 \end{cases} = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & ; x \geq 3 \\ -x^3 + 3x^2 & ; x < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & ; x > 3 \\ -3x^2 + 6x & ; x < 3 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x - 6 & ; x > 3 \\ -6x + 6 & ; x < 3 \end{cases}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادله $f''(x) < 0$ را تعیین می‌کنیم:

$$x > 3 : f''(x) = 6x - 6 < 0 \Rightarrow 6x < 6 \Rightarrow x < 1 \text{ غ.ق.ق. ۱}$$

$$x < 3 : f''(x) = -6x + 6 < 0 \Rightarrow -6x < -6 \Rightarrow x > 1 \xrightarrow{x < 3} 1 < x < 3$$

بنابراین تقعر تابع $f(x)$ روی بازه $(1, 3)$ روبه‌پایین است، پس داریم:

$$a = 1, b = 3 \Rightarrow b - a = 3 - 1 = 2$$

نکته: جهت تقعر منحنی یک تابع را می‌توان به وسیله مشتق دوم آن تابع تعیین کرد. تقعر منحنی روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه روی آن بازه $y'' > 0$ باشد و روبه‌پایین است هرگاه $y'' < 0$ باشد. باتوجه‌به نکته، ابتدا مشتق دوم تابع را محاسبه، سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم. داریم:

$$y = x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{9\sqrt[3]{x^5}} = \frac{4x + 4}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

x	$-\infty$	-۲	۰	$+\infty$
$4x + 4$	-	۰	+	+
$9\sqrt[3]{x^5}$	-	-	۰	+
y''	+	۰	-	+

بر روی بازه $(-2, 0)$ نامساوی $y'' < 0$ برقرار و در نتیجه تقعر نمودار تابع y روی این بازه روبه‌پایین است؛ بنابراین داریم:

$$a = -2, \quad b = 0 \Rightarrow b - a = 0 - (-2) = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول:

جهت تقعر منحنی یک تابع را می‌توان با تعیین علامت مشتق دوم این تابع مشخص کرد. تقعر منحنی تابع روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه $f''(x) > 0$ باشد و روبه‌پایین است هرگاه $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم:

ابتدا مشتق دوم تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + 2\sqrt{2} \cos x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2\sqrt{2} \sin x \Rightarrow f''(x) = 2 - 2\sqrt{2} \cos x$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، مجموعه جواب نامعادله $f''(x) > 0$ را روی بازه $[0, 2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 2 - 2\sqrt{2} \cos x > 0 \Rightarrow 2\sqrt{2} \cos x < 2 \Rightarrow \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (I)$$

می‌دانیم به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $-1 \leq \cos x \leq 1$ است پس باتوجه‌به رابطه (I) داریم:

$$-1 \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (II)$$

مجموعه مقادیری از x که در رابطه (II) صدق می‌کنند، دو ناحیه دوم و سوم مثلثاتی و دو بازه $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ است. به ترتیب در ناحیه اول و چهارم مثلثاتی هستند؛ بنابراین تقعر منحنی $f(x)$ در بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ روبه‌بالا است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) نقطه c ، ماکزیمم نسبی تابع f است هرگاه c نقطه بحرانی تابع f باشد و علامت $f''(x)$ قبل از c مثبت و بعد از c منفی باشد.
 ب) نقطه $c \in D_f$ ، نقطه بحرانی تابع f است هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.
 ج) نقطه c ، نقطه عطف تابع f است هرگاه f در $x = c$ پیوسته باشد، نمودار f در c دارای خط مماس باشد و همچنین جهت تقعر تابع f در c عوض شود (علامت f'' قبل و بعد از c عوض شود).

گام دوم

$$y = x^3 - 6x^2 + 5 \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

برای تعیین ماکزیمم نسبی تابع، معادله $y' = 0$ را حل می‌کنیم:

$$y' = 3x^2 - 12x = 3x(x^2 - 4)$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4} \\ x = -\sqrt{4} \end{cases} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{4}$	0	$\sqrt{4}$	$+\infty$
y'		-	+	-	+
y		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		min	max	min	

بنابراین نقطه $(0, 5)$ ماکزیمم نسبی تابع است. اکنون با حل معادله $y'' = 0$ ، نقطه عطف تابع را تعیین می‌کنیم.

$$y'' = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow (1, 0) \\ x = -1 \Rightarrow (-1, 0) \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y''		+	-	+
y		$\cup$	$\cap$	$\cup$

فاصله بین ماکزیمم نسبی و نقطه عطف منحنی برابر است با:

$$\begin{cases} A(0, 5) \\ B(1, 0) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

گزینه ۲

۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه پایین است هرگاه به ازای همه x های عضو این بازه، $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم

$$f(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'''(x) = \frac{6}{5}x^{-\frac{4}{5}} - \frac{12}{5}x^{-\frac{4}{5}} \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{25}x^{-\frac{4}{5}} + \frac{48}{25}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{6}{25}x^{-\frac{4}{5}}(x+8)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{6(x+8)}{25\sqrt[5]{x^4}}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادله $f''(x) < 0$ را مشخص می کنیم. $x = 0$ ریشه مخرج $f''(x)$ است پس $f''(x)$ در این نقطه

تعریف نشده است؛ همچنین داریم: $f''(-8) = 0$

جدول تعیین علامت تابع $f''(x)$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-8	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	○	-	+

ت.ن

بنابراین تقعر تابع $f(x)$ روی بازه $(-8, 0)$ روبه پایین است.

گام اول

نقطه $x = c$ ، نقطه عطف تابع f است، هرگاه:

الف) f در c پیوسته باشد.

ب) نمودار f در c دارای خط مماس واحد باشد.

ج) جهت تقعر تابع f قبل و بعد از نقطه $x = c$ عوض شود (f'' قبل و بعد از c تغییر علامت بدهد).

گام دوم

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{20}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{20}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}} + \frac{20}{9\sqrt[3]{x^4}} = \frac{10x + 20}{9\sqrt[3]{x^4}} = \frac{10(x + 2)}{9x\sqrt[3]{x}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 10(x + 2) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

X	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	$\circ$	+	+

علامت f'' قبل و بعد از نقطه $x = -2$ عوض می‌شود و چون تابع f در این نقطه تعریف شده و پیوسته است و همچنین مماس واحد دارد، پس نقطه عطف تابع محسوب می‌شود.

گام اول

نقطه $x = c$ ، نقطه عطف تابع f است هرگاه:

الف) f در c پیوسته باشد.

ب) نمودار f در c ، دارای خط مماس واحد باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در c عوض شود (علامت f'' قبل و بعد از c عوض شود).

گام دوم

$$f(x) = \frac{(2-x)^2}{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f'(x) = \frac{2(-1)(2-x)x - (2-x)^2}{x^2} = \frac{-4x + 2x^2 - 4 + 4x - x^2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{-4x}{x^4} = \frac{4}{x^3}$$

X	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-		+
f			

معادله $f''(x) = 0$ جواب ندارد. علامت $f''(x)$ قبل و بعد از $x = 0$ عوض می‌شود اما باتوجه به اینکه تابع f در نقطه $x = 0$ تعریف نشده است، پس این نقطه نمی‌تواند نقطه عطف تابع باشد، بنابراین تابع f فاقد نقطه عطف است.

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه، روبه پایین است هرگاه به ازای همه x های عضو این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم

$$y = x^2 + \sqrt{x} \Rightarrow D = [0, +\infty)$$

$$y' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'' = 2 - \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{8x\sqrt{x} - 1}{4x\sqrt{x}}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادله $y'' < 0$ را می یابیم:

$$y'' < 0 \Rightarrow \frac{8x\sqrt{x} - 1}{4x\sqrt{x}} < 0 \xrightarrow{x > 0} 8x\sqrt{x} - 1 < 0 \Rightarrow 8x\sqrt{x} < 1$$

$$\Rightarrow x\sqrt{x} < \frac{1}{8} \Rightarrow (\sqrt{x})^3 < \left(\frac{1}{8}\right)^3 \Rightarrow \sqrt{x} < \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x < \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{x > 0} 0 < x < \frac{1}{4}$$

بنابراین تقعر تابع در بازه $(0, \frac{1}{4})$ روبه پایین است.

گزینه ۳

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه بالا است هرگاه به ازای همه x های این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) > 0$ باشد.

گام دوم

$$f(x) = 6x^5 - 5x^4 + 2x + 7 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 30x^4 - 20x^3 + 2 \Rightarrow f''(x) = 120x^3 - 60x^2 = 60x^2(2x - 1)$$

باتوجه به گام اول، مجموعه جواب نامعادله $f''(x) > 0$ را به دست می آوریم:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 60x^2(2x - 1) > 0 \xrightarrow{60x^2 > 0} 2x - 1 > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

تقعر منحنی تابع روی بازه $(\frac{1}{2}, +\infty)$ روبه بالا است پس کمترین مقدار a برابر با $\frac{1}{2}$ است.

گام اول

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازه نزولی است هرگاه به ازای تمام مقادیر این بازه، $f'(x)$ موجود و $f'(x) < 0$ باشد.
 ب) تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه، روبه بالا است هرگاه به ازای همه x های عضو این بازه، $f''(x)$ موجود و $f''(x) > 0$ باشد.

گام دوم

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$y' = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

$$y' < 0 \Rightarrow -1 < x < 3 \quad (I)$$

x		-1		3	
y'	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

تابع روی بازه $(-1, 3)$ نزولی است.

$$y'' = 2x - 2$$

$$y'' > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (II)$$

x		1	
y''	$-$	$\circ$	$+$

تقعر منحنی تابع روی بازه $(1, +\infty)$ روبه بالا است.

$$(I) \cap (II) = (-1, 3) \cap (1, +\infty) = (1, 3)$$

بنابراین تابع داده شده روی بازه $(1, 3)$ نزولی و دارای تقعر روبه بالا است.

گام اول

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه به ازای تمام x های عضو این بازه، $f'(x)$ موجود و $f'(x) > 0$ باشد.
 ب) تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه پایین است، هرگاه به ازای تمام x های عضو این بازه، $f''(x)$ موجود و $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم

$$y = -x^3 + 4x^2 - 3 \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$y' = -3x^2 + 8x = 4x^2(-x + 2)$$

$$y' > 0 \Rightarrow 4x^2(-x + 2) > 0 \xrightarrow{4x^2 > 0} -x + 2 > 0 \Rightarrow x < 2 \quad (I)$$

تابع روی بازه $(-\infty, 2)$ صعودی است.

$$y'' = -6x + 8 = 2(2 - 3x)$$

$$y'' < 0 \Rightarrow x < 2 \text{ یا } x > \frac{4}{3} \quad (II)$$

x	0	2
y''	-	+

تقعر منحنی تابع روی بازه $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ روبه پایین است.

$$(I) \cap (II) = (-\infty, 2) \cap [(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)] = (-\infty, 0) \cup (2, 2)$$

از میان بازه های داده شده، تابع روی بازه $(2, 2)$ قطعاً صعودی با تقعر روبه پایین است.

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه پایین است هرگاه به ازای همه x های عضو این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم

$$y = (x + 3)\sqrt{x} \Rightarrow D = [0, +\infty)$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt{x} + \frac{(x + 3)}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x + 3}{2\sqrt{x}} = \frac{3x + 3}{2\sqrt{x}}$$

$$y'' = \frac{3(2\sqrt{x}) - \frac{3}{2\sqrt{x}}(3x + 3)}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{6x - 3x - 3}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{3x - 3}{4x\sqrt{x}}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادله $y'' < 0$ را مشخص می کنیم:

$$y'' < 0 \Rightarrow \frac{3x - 3}{4x\sqrt{x}} < 0 \xrightarrow{x > 0} \frac{x > 0}{4x\sqrt{x} > 0} \Rightarrow 3x - 3 < 0 \Rightarrow 3x < 3 \Rightarrow x < 1 \xrightarrow{x > 0} 0 < x < 1$$

بنابراین نمودار تابع y روی بازه $(0, 1)$ دارای تقعر روبه پایین است پس داریم:

$$(a, b) = (0, 1) \Rightarrow a = 0, b = 1 \Rightarrow b - a = 1 - 0 = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow f''(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x^2 + x - 2) = 3(x+2)(x-1)$$

x	-2	1
f''	+ 0 - 0 +	

اکنون وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)$ را در بازه $(-2, 1)$ بررسی می‌کنیم:

$$f'(x) = x(x^2 + \frac{3}{2}x - 6)$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{9}{4} - 4(-6) = \frac{105}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 10/25}{4} \simeq 1/11$$

$$x_2 = \frac{-3 - 10/25}{4} \simeq -3/31$$

$$\Rightarrow (-2, 1) \subseteq (-3/31, 1/11)$$

x	-2	0	1
x	-	+	
$x^2 + \frac{3}{2}x - 6$	-	-	
	+	-	

بنابراین تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$ در بازه $(-2, 0)$ صعودی و تقعر آن روبه‌پایین است.

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در بازه‌ای نزولی است که مشتق اول تابع در آن بازه نامثبت باشد.
 ب) تقعر نمودار تابع $f(x)$ در بازه‌ای روبه‌بالا است که مشتق دوم تابع در آن بازه مثبت باشد.

گام دوم

ضابطه مشتق اول و دوم تابع را نوشته و باتوجه به گام اول، دو نامعادله $f'(x) \leq 0$ و $f''(x) > 0$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 36x$$

$$f'(x) \leq 0 \Rightarrow -4x(x^2 - 6x + 9) = -4x(x-3)^2 \leq 0 \xrightarrow{(x-3)^2 \geq 0} -4x \leq 0 \Rightarrow x \geq 0 \quad (\text{I})$$

$$f''(x) = -12x^2 + 48x - 36$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow -12(x^2 - 4x + 3) = -12(x-3)(x-1) > 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) < 0$$

$$\frac{x}{(x-3)(x-1)} \quad \left| \quad \begin{array}{ccc} 1 & 3 \\ + & - & + \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 1 < x < 3 \quad (\text{II})$$

$$\text{I} \cap \text{II} = (0, +\infty) \cap (1, 3) = (1, 3)$$

گام اول

تابع در بازه‌ای نزولی و مقعر آن روبه‌پایین است که $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی باشند.

گام دوم

$$f(x) = \cos^2 x - 2 \cos x \Rightarrow f'(x) = -2 \sin x \cos x + 2 \sin x$$

$$= 2 \sin x (-\cos x + 1) < 0 \xrightarrow{1 - \cos x > 0} 2 \sin x < 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow x \in (\pi, 2\pi)$$

$$f'(x) = -2 \sin x \cos x + 2 \sin x \Rightarrow f''(x) = -2 \cos^2 x + 2 \cos x$$

$$= -2(2 \cos^2 x - 1) + 2 \cos x = -4 \cos^2 x + 2 \cos x + 2 < 0$$

$$-4 \cos^2 x + 2 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow -4(\cos x - 1)(\cos x + \frac{1}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 2\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ یا } x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$f''(x)$	+	○	○	+

$$\Rightarrow x \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$$

اشتراک دو بازه $(\pi, 2\pi)$ و $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ به صورت $(\pi, \frac{4\pi}{3})$ درمی‌آید.

گام اول

نقطه $A(1, -3)$ نقطه عطف منحنی است؛ بنابراین دو رابطه $f(1) = -3$ و $f''(1) = 0$ برقرار است.

گام دوم

$$f(1) = -3 \Rightarrow a - 1 - 3 + b = -3 \Rightarrow a + b = 1 \quad (1)$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 2x - 3 \Rightarrow f''(x) = 6ax - 2 \Rightarrow f''(1) = 6a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 6a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \xrightarrow{(1)} \frac{1}{3} + b = 1 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$$

برای تعیین مقدار تابع در نقطه ماکزیمم نسبی آن، جدول تغییرات تابع را رسم می‌کنیم:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	+	○	○	+
y		↗	↘	↗
	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	$-\frac{25}{3}$	
		max	min	

بنابراین مقدار تابع در نقطه ماکزیمم نسبی تابع برابر $\frac{7}{3}$ است.

گام اول:

جهت تقعر منحنی یک تابع، به وسیله مشتق دوم آن تابع تعیین می‌شود. تقعر منحنی روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه $y'' > 0$ باشد و روبه‌پایین است هرگاه $y'' < 0$ باشد.

گام دوم:

ابتدا مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 + 12} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 + 12) - 2x(x^2 + 9)}{(x^2 + 12)^2} = \frac{6x}{(x^2 + 12)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{6(x^2 + 12)^2 - 2(2x)(x^2 + 12)(6x)}{(x^2 + 12)^4} = \frac{6(12 - 3x^2)(x^2 + 12)}{(x^2 + 12)^4}$$

طبق گام اول بازه (a, b) را به‌گونه‌ای تعیین می‌کنیم که نامساوی $y'' > 0$ روی آن برقرار باشد.

$$y'' > 0 \xrightarrow{(x^2+12)>0} 12 - 3x^2 > 0 \Rightarrow 3x^2 < 12 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow x \in (-2, 2)$$

بنابراین $a = -2$ و $b = 2$ است و داریم:

$$b - a = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$$

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) نقطه $x = c$ ، نقطه عطف تابع f است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

(۱) f در c پیوسته باشد.

(۲) نمودار f در c دارای مماس واحد باشد.

(۳) جهت تقعر تابع f در c عوض شود.

گام دوم

با حل معادله $y'' = 0$ ، طول نقطه عطف تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 6x - 6$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$$

$$\xrightarrow{x=1} y = 1 - 3 + 4 = 2$$

بنابراین نقطه عطف تابع دارای مختصات $(1, 2)$ است. شیب خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه برابر است با:

$$y'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3$$

اکنون با داشتن شیب خط مماس، معادله این خط را می‌نویسیم:

$$y - y(1) = y'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 2 = (-3)(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 5$$

برای یافتن محل تقاطع خط مماس با محور x ها، کافی است در معادله این خط $y = 0$ قرار داده شود:

$$y = -3x + 5 \xrightarrow{y=0} -3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

گام اول

الف) نقطه $x = c$ ، نقطه عطف تابع f است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

(۱) f در c پیوسته باشد.

(۲) نمودار f در c دارای مماس واحد باشد.

(۳) جهت تقعر تابع f در c عوض شود.

ب) نیمساز ناحیه چهارم، خط $y = -x$ است که به ازای $x \geq 0$ به دست می‌آید.

گام دوم

ابتدا ضابطه $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست می‌آوریم سپس با حل معادله $f''(x) = 0$ ، نقطه عطف تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + ax \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x^2 - 6x + a$$

$$f''(x) = 4x - 6$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3}{2}} f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + a\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{27}{4} + \frac{3a}{2} = \frac{3a-9}{2}$$

باتوجه به اینکه نقطه عطف تابع روی نیمساز ناحیه چهارم (خط $y = -x$) قرار دارد، پس داریم:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3a-9}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow 3a-9 = -3 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه پایین است هرگاه به ازای همه x های عضو این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 12} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 12)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2(x^2 + 12)^2 - 2(2x)(x^2 + 12)(-2x)}{(x^2 + 12)^4} = \frac{6x^2 - 24}{(x^2 + 12)^3}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادله $f''(x) < 0$ را می یابیم:

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \frac{6x^2 - 24}{(x^2 + 12)^3} < 0 \xrightarrow{(x^2 + 12)^3 > 0} 6x^2 - 24 < 0 \Rightarrow 6x^2 < 24$$

$$x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow x \in (-2, 2)$$

بنابراین تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی بازه $(-2, 2)$ روبه پایین و $a = 2$ است.

گام اول

الف) تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه، روبه بالا است، هرگاه به ازای همه مقادیر x در آن بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) > 0$ باشد.

ب) در چهار ناحیه دستگاه مختصات داریم:

ناحیه اول: $x > 0$ و $y > 0$

ناحیه دوم: $x < 0$ و $y > 0$

ناحیه سوم: $x < 0$ و $y < 0$

ناحیه چهارم: $x > 0$ و $y < 0$

گام دوم

$$y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2x}{x^3} = \frac{2}{x^2}$$

باتوجه به گام اول، مجموعه جواب نامعادله $y'' > 0$ را مشخص می کنیم.

$$y'' > 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2} > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x > 0 \quad (I)$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow y > 0 \quad (II)$$

از (I) و (II) می توان نتیجه گرفت که تقعر نمودار تابع در ناحیه اول از دستگاه محورهای مختصات روبه بالا است.

گام اول:

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه روی آن بازه داشته باشیم: $f'(x) > 0$ ب) تقعر تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه پایین است هرگاه روی آن بازه $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{-2x}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

$$\text{تابع صعودی : } f'(x) > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} < 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{تقعر پایین : } f''(x) < 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} < 0 \Rightarrow x^3 < 0 \Rightarrow x < 0 \quad (II)$$

تابع $f(x)$ روی اشتراک دو مجموعه (I) و (II)، صعودی با تقعر روبه پایین است و داریم:

$$(I) \cap (II) : x < -1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

نکته: تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه بالا است هرگاه به ازای همه x های عضو این بازه، $f''(x)$ موجود و $f''(x) > 0$ باشد.

گام دوم

به ازای همه مقادیر $x \in \mathbb{R}$ ، نامعادله $x^2 + 2 \geq 0$ برقرار است پس دامنه تابع داده شده، برابر $\mathbb{R}$ است.

$$y = x\sqrt{x^2 + 2} \Rightarrow y' = \sqrt{x^2 + 2} + x\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}}\right) = \frac{x^2 + 2 + x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{2(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{2(2x)\sqrt{x^2 + 2} - \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2}}\right)(2(x^2 + 1))}{x^2 + 2} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2}}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادله $y'' > 0$ را مشخص می کنیم:

$$y'' > 0 \Rightarrow \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2}} > 0 \xrightarrow{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 2} > 0} 2x^3 + 6x > 0 \Rightarrow 2x(x^2 + 3) > 0$$

$$\xrightarrow{x^2 + 3 > 0} 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$

بنابراین تقعر منحنی تابع روی بازه $(0, +\infty)$ روبه بالا است پس $a = 0$ می شود.

توضیحات سؤال نشان می‌دهد که خط موردنظر از نقطه عطف عبور می‌کند.

$$x_I = -\frac{b}{3a} = \frac{2}{3}$$

حال شیب این خط را در نقطه $\frac{2}{3}$ محاسبه می‌کنیم.

$$y' = 3x^2 - 4x + 3 \Rightarrow y'\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \times \frac{4}{9} - 4 \times \frac{2}{3} + 3 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 3 = -\frac{4}{3} + \frac{9}{3} = \frac{5}{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

نکته: برای اینکه تابع نزولی باشد باید شرط $y' \leq 0$ و برای اینکه تابع دارای تقعر روبه‌پایین باشد بایستی شرط $y'' < 0$ برقرار باشد.

$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x - 1) = \frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}} \leq 0 \Rightarrow x \leq 1 \quad (1)$$

$$y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}} + \frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}(x + 2) = \frac{4(x+2)}{9\sqrt[3]{x^5}} < 0 \Rightarrow -2 < x < 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -2 < x < 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌پایین است، هرگاه $f''(x)$ به‌ازای همه x های این بازه موجود و $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم

$$f(x) = x^3 - 6x^2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$$

بنابراین تقعر تابع در بازه $(-2, 2)$ روبه‌پایین است.

نکته: مختصات نقطهٔ عطف در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

نکته: اگر مشتق دوم در نقطهٔ عطف موجود باشد، مقدار آن برابر با صفر خواهد بود.

$$y = ax^3 + bx^2 - 3x - 1 \xrightarrow{(1, -2)} -2 = a(1)^3 + b(1)^2 - 3(1) - 1 \\ \Rightarrow -2 = a + b - 4 \Rightarrow a + b = 2 \quad (I)$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx - 3$$

$$y'' = 6ax + 2b \xrightarrow{f''(1)=0} 6a + 2b = 0 \Rightarrow 3a = -b \Rightarrow 3a = -b$$

$$\xrightarrow{(I)} a - 3a = 2 \Rightarrow -2a = 2 \Rightarrow a = -1, \quad b = 3$$

$$y = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x - 3 \Rightarrow y' = -3(x^2 - 2x + 1)$$

$$\Rightarrow y' = -3(x - 1)^2$$

x	
1	
y'	-
	-

مشتق تغییر علامت نمی‌دهد، در نتیجه فاقد max نسبی است.

گام اول

الف) تابع $f(x)$ همواره صعودی است اگر مشتق اول تابع روی دامنه تعریف تابع نامنفی باشد ($f'(x) \geq 0$).

ب) نقطه $x = c$ طول نقطه عطف تابع f است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

(۱) f در c پیوسته باشد.

(۲) نمودار f در c دارای مماس واحد باشد.

(۳) جهت تقعر منحنی نمودار تابع در c عوض شود.

گام دوم

$$f(x) = x^3 - (m+2)x^2 + 3x \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

باتوجه به گام اول، شرط صعودی بودن تابع را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 2(m+2)x + 3$$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow 3x^2 - 2(m+2)x + 3 \geq 0$$

نامساوی فوق همواره برقرار است اگر:

(۱) ضریب x^2 مثبت باشد که چون $3 > 0$ ، پس برقرار است.

(۲) $\Delta \leq 0$ که بررسی می‌کنیم:

$$\Delta = 4(m+2)^2 - 4(3)(3) \leq 0 \xrightarrow{\div 4} (m+2)^2 - 9 \leq 0 \Rightarrow (m+2)^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow |m+2| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq m+2 \leq 3 \Rightarrow -5 \leq m \leq 1$$

اکنون محدوده‌ای برای نقاط عطف تابع می‌یابیم. تابع f و f' روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس برای یافتن نقاط عطف کافی است معادله $f''(x) = 0$ را حل کنیم.

$$f''(x) = 6x - 2(m+2)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 2(m+2) = 0 \Rightarrow 6x = 2(m+2) \Rightarrow x = \frac{m+2}{3}$$

$$-5 \leq m \leq 1 \Rightarrow -3 \leq m+2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq \frac{m+2}{3} \leq 1$$

بنابراین مجموعه نقاط عطف تابع در بازه $[-1, 1]$ قرار دارد.

گام اول

$A(1, -11)$ نقطه عطف تابع $f(x)$ است؛ بنابراین:

(الف) مختصات نقطه A در معادله تابع صدق می‌کند.

(ب) تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته است.

(ج) مشتق تابع در نقطه $x = 1$ موجود و یکتا است.

(د) $f''(1) = 0$ است.

گام دوم

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

با توجه به قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$f(1) = -11 \Rightarrow 1^3 + a(1)^2 + b(1) = -11 \Rightarrow a + b + 1 = -11 \Rightarrow a + b = -12 \quad (I)$$

و با توجه به قسمت (د) از گام اول داریم:

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \xrightarrow{(I)} -3 + b = -12 \Rightarrow b = -9$$

بنابراین:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

و $f(-1)$ برابر است با:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$$

برای نزولی بودن تابع هموگرافیک فوق لازم است $y' \leq 0$ ، پس:

$$y' = \frac{m(-1+m) - 2}{(x-1+m)^2} \Rightarrow m^2 - m - 2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (m+1)(m-2) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq m \leq 2$$

در ضمن مجانب قائم یعنی $x = 1 - m$ نباید در منطقه $(1, +\infty)$ باشد، پس:

$$1 - m \leq 1 \Rightarrow m \geq 0$$

پس $0 \leq m \leq 2$ و طبق صورت مسئله $m \neq 2$ ، پس $1, m = 0$ ، یعنی دو مقدار.

فرض کنیم تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ باشد، پس $g(x) = \frac{cx+d}{ax+b}$ خواهد بود. اگر تابع g^{-1} را بیابیم، داریم:

$$y = \frac{cx+d}{ax+b} \Rightarrow cx+d = axy+by \Rightarrow (c-ay)x = by-d$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = y = \frac{bx-d}{c-ax}$$

بنابراین اگر در عبارات حدی قرار دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{\frac{a}{c}}{-\frac{b}{a}} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{bc} = \frac{b}{c} \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b \Rightarrow \frac{b}{a} = \pm 1$$

ضابطه f^{-1} را حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow ax+b = cxy+dy \Rightarrow (a-cy)x = dy-b$$

$$f^{-1}(x) = y = \frac{dx-b}{a-cx} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = \frac{-b}{a} = -1 \text{ یا } +1$$

باتوجه به نمودار، منحنی در نقطه‌ای با طول مثبت بر محور x ها، مماس شده است؛ پس معادله $f(x) = 0$ دارای یک ریشه مضاعف مثبت است.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{ax^2 + 4x - 4}{x^2 + b} = 0 \Rightarrow ax^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} \Delta = 0 \Rightarrow 16 - 4(a)(-4) = 0 \Rightarrow 16 + 16a = 0 \Rightarrow 16a = -16 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 + b}$$

تابع یک مجانب افقی دارد. معادله این مجانب برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 + b} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ مجانب افقی}$$

همان‌طور که در شکل نیز واضح است محل برخورد منحنی تابع با محور عرض‌ها پایین‌تر از خط $y = -1$ است؛ پس داریم:

$$f(0) < -1$$

$$f(0) = \frac{0 + 0 - 4}{0 + b} = -\frac{4}{b} \xrightarrow{f(0) < -1} -\frac{4}{b} < -1 \Rightarrow \frac{4}{b} > 1 \Rightarrow \frac{b}{4} < 1 \Rightarrow b < 4$$

ازطرفی چون تابع مجانب قائم ندارد؛ پس $b > 0$ در نظر گرفته می‌شود، پس $0 < b < 4$ است. از میان گزینه‌ها تنها دوتایی $(-1, 3)$ در دو شرط $0 < b < 4$ و $a = -1$ صدق می‌کند.

اگر α ریشه مضاعف تابع چندجمله‌ای $f(x)$ باشد ($f(\alpha) = 0$) آنگاه α ریشه تابع $f'(x)$ نیز است ($f'(\alpha) = 0$)؛ زیرا اگر α ریشه مضاعف $f(x)$ باشد، نمودار تابع $f(x)$ در $x = \alpha$ محور x ها را قطع نمی‌کند؛ بلکه بر آن مماس می‌شود؛ بنابراین تابع در این نقطه دارای مماس افقی است؛ یعنی داریم: $f'(\alpha) = 0$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + a$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow 3(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

باتوجه به صورت سؤال، ریشه مضاعف تابع، منفی است؛ بنابراین $x = -1$ همان ریشه مضاعف تابع خواهد بود؛ پس:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + a = 0 \Rightarrow -1 - 3 + 9 + a = 0 \Rightarrow a + 5 = 0$$

بنابراین: $a = -5$

باتوجه به شکل، تابع دارای دامنه متقارن و محدود است؛ همچنین خط مماس بر نمودار تابع در مبدأ مختصات افقی است؛ یعنی $y'(0) = 0$.

با بررسی گزینه‌ها، پاسخ صحیح را مشخص می‌کنیم.
گزینه اول:

$$y = -x^3 \sqrt{4 - x^2}$$

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

دامنه این تابع محدود و متقارن است.

$$y' = -3x^2 \sqrt{4 - x^2} + \frac{2x^4}{2\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow y'(0) = 0$$

خط مماس بر نمودار تابع در مبدأ مختصات افقی است.
پس این گزینه پاسخ سؤال خواهد بود.
گزینه دوم:

$$y = -x\sqrt{4 - x^2}$$

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

دامنه این تابع محدود و متقارن است.

$$y' = -\sqrt{4 - x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow y'(0) = -\sqrt{4} = -2 \neq 0$$

تابع در $x = 0$ مماس افقی ندارد.
گزینه سوم:

$$y = x^3 \sqrt{x^2 - 4}$$

$$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow |x| \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2$$

دامنه این تابع محدود نیست.
گزینه چهارم:

$$y = (x^2 - 4)\sqrt[3]{x}$$

$$D = \mathbb{R}$$

دامنه این تابع نامحدود است.

گام اول

هر تابع هموگرافیک دارای ضابطه‌ای به فرم $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ است به طوری که $c \neq 0$ باشد.

گام دوم

مقادیر a و b را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که ضابطه داده شده مربوط به یک تابع هموگرافیک شود. ابتدا با مخرج مشترک گیری، ضابطه را ساده تر می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y &= ax + b + \frac{2x^2}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1) + 2x^2}{x+1} \\ &= \frac{ax^2 + bx + ax + b + 2x^2}{x+1} = \frac{(a+2)x^2 + (a+b)x + b}{x+1} \end{aligned}$$

باتوجه به گام اول، در یک تابع هموگرافیک جمله x^2 نداریم؛ بنابراین ضریب آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow y = \frac{(-2+b)x + b}{x+1}$$

این تابع هموگرافیک محور x ها را در نقطه $x = 1$ قطع می‌کند؛ بنابراین مختصات نقطه $(1, 0)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند، پس داریم:

$$y = \frac{(-2+b)x + b}{x+1} \xrightarrow{x=1, y=0} 0 = \frac{-2+b+b}{1+1}$$

$$\Rightarrow -2 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

باتوجه به شکل $x = \frac{-\pi}{\epsilon}$ و $x = \frac{11\pi}{\epsilon}$ مجانب‌های قائم تابع هستند؛ بنابراین به ازای این دو مقدار، مخرج تابع برابر صفر می‌شود. به ازای $x = \frac{-\pi}{\epsilon}$ داریم:

$$1 + b \sin x = 0 \xrightarrow{x = -\frac{\pi}{\epsilon}} 1 + b \sin\left(-\frac{\pi}{\epsilon}\right) = 0 \Rightarrow 1 - b \sin \frac{\pi}{\epsilon} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow b = 2$$

اکنون با حل معادله $y' = 0$ ، طول نقاط اکسترمم تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{1 + a \sin x}{1 + 2 \sin x} \Rightarrow y' = \frac{a \cos x (1 + 2 \sin x) - 2 \cos x (1 + a \sin x)}{(1 + 2 \sin x)^2} = \frac{(a - 2) \cos x}{(1 + 2 \sin x)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow (a - 2) \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 & \text{غ.ق.ق} \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[k=0]{x>0} x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

به ازای $a = 2$ ، $y = 1$ یک تابع ثابت بوده و نمودار آن یک خط راست خواهد بود.
منحنی تابع y در نقطه‌ای به طول $x = \frac{\pi}{2}$ بر محور x مماس است؛ بنابراین داریم:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y = \frac{1 + a \sin x}{1 + 2 \sin x} \xrightarrow{\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)} 0 = \frac{1 + a \sin \frac{\pi}{2}}{1 + 2 \sin \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{1 + a}{3} = 0 \Rightarrow 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین:

$$(a, b) = (-1, 2)$$

گام اول

الف) علامت $f'(x)$ در یک بازه، وضعیت یکنوایی تابع روی آن بازه را مشخص می‌کند.
 ب) علامت $f''(x)$ در یک بازه، جهت تقعر تابع روی آن بازه را مشخص می‌کند.

گام دوم

ضابطه $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست آورده و در اطراف نقطه $x = 0$ تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x + \sin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 + \cos x$$

$$f'(0) = 0 - 1 + 1 = 0$$

پس تابع در نقطه $x = 0$ دارای مماس افقی است.

$$f''(x) = x - \sin x \Rightarrow f''(0) = 0$$

پس جهت تقعر تابع در نقطه $x = 0$ عوض می‌شود. داریم:

x	0	
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

باتوجه به آنچه گفته شد، گزینه ۲ صحیح است.

باتوجه به نمودار داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

همچنین در نقطه‌ای به طول مثبت، نمودار تابع محور x را قطع می‌کند ($y(x) = 0$)، مماس بر نمودار تابع در این نقطه افقی است ($y'(x) = 0$) و جهت تقعر تابع نیز در همین نقطه عوض می‌شود ($y''(x) = 0$). اکنون گزینه‌ها را برای یافتن ضابطه تابع بررسی می‌کنیم.
گزینه ۱:

$$y = x(1-x)^3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(1-x)^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1-x)^3 = -\infty$$

$$y' = (1-x)^3 - 3x(1-x)^2 = (1-x)^2(1-4x)$$

$$y'' = -2(1-x)(1-4x) - 4(1-x)^2 = (1-x)(12x-6)$$

$x = 1$ ریشه سه تابع y ، y' و y'' است ($y(1) = 0$ ، $y'(1) = 0$ ، $y''(1) = 0$)؛ بنابراین همین گزینه ضابطه تابع است.
گزینه ۲:

$$y = x(x-1)^3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x-1)^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-1)^3 = +\infty$$

این گزینه نمی‌تواند جواب سؤال باشد.
گزینه ۳:

$$y = x(1-x^3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(1-x^3) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1-x^3) = -\infty$$

$$y' = (1-x^3) - 3x^3 = 1-4x^3 \Rightarrow y'' = -12x^2$$

y'' هیچ ریشه مثبتی ندارد (تنها ریشه $y'' = 0$ ، $x = 0$ است) پس این گزینه نمی‌تواند جواب سؤال باشد.
گزینه ۴:

$$y = x(x^3-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x^3-1) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x^3-1) = +\infty$$

این گزینه هم نمی‌تواند جواب سؤال باشد.

گام اول

هر تابع هموگرافیک دارای ضابطه‌ای به فرم $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ است؛ به طوری که $c \neq 0$ باشد.

گام دوم

مقادیر a و b را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که ضابطه داده شده شرایط تابع هموگرافیک را داشته باشد. ابتدا با مخرج مشترک گیری ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = ax + b + \frac{x^2}{2x-1} = \frac{(ax+b)(2x-1) + x^2}{2x-1}$$

$$= \frac{2ax^2 + 2bx - ax - b + x^2}{2x-1} = \frac{(2a+1)x^2 + (2b-a)x - b}{2x-1}$$

در یک تابع هموگرافیک، جمله‌ای با درجه بزرگتر از یک نداریم؛ بنابراین ضریب این جملات را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$2a+1=0 \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{(2b+\frac{1}{2})x-b}{2x-1}$$

این تابع هموگرافیک محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؛ بنابراین مختصات نقطه $(0, 1)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند، پس داریم:

$$1 = \frac{-b}{-1} \Rightarrow b=1 \Rightarrow a+b = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

خط $x=0$ مجانب قائم تابع است و هر دو شاخه منحنی به $+\infty$ میل می‌کند ($\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$)؛ بنابراین $x=0$ ریشه مضاعف مخرج کسر است.

$$x^2 + bx = 0 \Rightarrow x(x+b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-b \end{cases} \Rightarrow -b=0 \Rightarrow b=0$$

نقطه‌ای به طول $x=3$ ، مینیمم نسبی تابع است و تابع در این نقطه مماس افقی دارد؛ بنابراین: $f'(3) = 0$

$$f(x) = \frac{ax+3}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{ax^2 - 2x(ax+3)}{x^4} = \frac{-ax^2 - 6x}{x^4}$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-9a-18}{81} \Rightarrow -9a-18=0 \Rightarrow -9a=18 \Rightarrow a=-2$$

بنابراین:

$$(a, b) = (-2, 0)$$

تابع دارای یک مجانب افقی است. معادله این مجانب برابر است با:

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2 + bx + 2}{x^2 + 1} = a \Rightarrow y = a$$

مجانب افقی، منحنی تابع را در نقطه‌ای به طول صفر قطع می‌کند؛ بنابراین $f(0) = a$ است.

$$f(0) = \frac{0 + 0 + 2}{0 + 1} = a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^2 + bx + 2}{x^2 + 1}$$

باتوجه به نمودار، منحنی در نقطه‌ای با طول مثبت بر محور x مماس است؛ بنابراین معادله $f(x) = 0$ یک ریشه مضاعف مثبت دارد.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + bx + 2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4(2)(2) = 0$$

$$\Rightarrow b^2 - 16 = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

بررسی می‌کنیم به ازای کدامیک از مقادیر $b = 4$ و $b = -4$ معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعف دارد.

$$b = 4 : 2x^2 + 4x + 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{غ.ق.ق}$$

$$b = -4 : 2x^2 - 4x + 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \checkmark$$

بنابراین $b = -4$ قابل قبول است و داریم: $(a, b) = (2, -4)$

باتوجه به شکل، تابع در نقطه‌ای با طول $x = \frac{\pi}{12}$ دارای مماس افقی است؛ پس داریم:

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$$

$$f(x) = a \cos \varphi x + b \sin \psi x ; D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -\varphi a \sin \varphi x + \psi b \cos \psi x \xrightarrow{f'(\frac{\pi}{12})=0} f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\varphi a \sin \varphi\left(\frac{\pi}{12}\right) + \psi b \cos \psi\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= -\varphi a \sin \frac{\pi}{3} + \psi b \cos \frac{\pi}{6} = -\varphi a \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \psi b \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}(-\varphi a + b) = 0 \Rightarrow b = \varphi a \quad (I)$$

باتوجه به نمودار، مقدار به ازای اولین مینیمم نسبی تابع با طول منفی برابر ۳- است. با حل معادله $f'(x) = 0$ طول نقاط اکسترمم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\varphi a \sin \varphi x + \psi b \cos \psi x = 0 \Rightarrow \psi b \cos \psi x = \varphi a \sin \varphi x$$

$$\xrightarrow{b=\varphi a} \cos \psi x = \sin \varphi x \xrightarrow{\sin \varphi = \psi \sin \alpha \cos \alpha} \cos \psi x = \psi \sin \varphi x \cos \varphi x$$

$$\Rightarrow \psi \sin \varphi x \cos \varphi x - \cos \psi x = 0 \Rightarrow \cos \varphi x (\psi \sin \varphi x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi x = 0 \Rightarrow \varphi x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\varphi} + \frac{\pi}{\varphi} \\ \sin \varphi x = \frac{1}{\psi} \Rightarrow \begin{cases} \varphi x = \psi k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ \varphi x = \psi k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

به ازای $k = -1$ داریم:

$$x = \frac{k\pi}{\varphi} + \frac{\pi}{\varphi} \xrightarrow{k=-1} x = \frac{-\pi}{\varphi} + \frac{\pi}{\varphi} = -\frac{\pi}{\varphi}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{12} \xrightarrow{k=-1} x = -\pi + \frac{\pi}{12} = -\frac{11\pi}{12}$$

$$x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \xrightarrow{k=-1} x = -\pi + \frac{5\pi}{12} = -\frac{7\pi}{12}$$

بزرگ‌ترین طول اکسترمم، $x = \frac{-\pi}{\varphi}$ است؛ بنابراین داریم:

$$f\left(-\frac{\pi}{\varphi}\right) = -3$$

$$\Rightarrow a \cos \varphi\left(-\frac{\pi}{\varphi}\right) + b \sin \psi\left(-\frac{\pi}{\varphi}\right) = -3 \Rightarrow -a - b = -3 \Rightarrow a + b = 3$$

$$\xrightarrow{b=\varphi a} a + \varphi a = 3 \Rightarrow \varphi a = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = \varphi(1) = \varphi$$

تابع $f(x)$ ، یک تابع کسری مثلثاتی است. باتوجه به نمودار تابع فاقد مجانب قائم است؛ بنابراین ریشه‌های مخرج کسر، قطعاً ریشه‌های صورت کسر نیز است، پس داریم:

$$f(x) = \frac{a \sin 2x + b}{\sin x + \cos x}$$

$$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = -1$$

$$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=1} x = \frac{3\pi}{4}$$

$$a \sin(2x) + b = 0 \xrightarrow{x=\frac{3\pi}{4}} a \sin\left(2\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) + b = 0 \Rightarrow a \sin \frac{3\pi}{2} + b = 0$$

$$\Rightarrow -a + b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a \sin 2x + a}{\sin x + \cos x} = \frac{a(\sin 2x + 1)}{\sin x + \cos x}$$

می‌دانیم:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow 1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} = a(\sin x + \cos x)$$

ازطرفی:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f(x) = a\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

می‌دانیم $1 \leq \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right|$ است پس:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow a\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq a\sqrt{2} \Rightarrow f(x) \leq a\sqrt{2}$$

باتوجه به نمودار، بیشترین مقدار تابع $f(x)$ برابر با ۲ است، پس:

$$a\sqrt{2} = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$x = 1$ مجانب قائم است در نتیجه ریشهٔ مخرج است. چون حد تابع در همسایگی چپ و راست $x = 1$ هر دو $+\infty$ است، پس $x = 1$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \equiv x^2 + bx + c \Rightarrow b = -2, c = 1$$

ازطرفی در $x = -2$ تابع مینیمم دارد و مشتق برابر صفر است.

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 + a)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x-1) - 2(x^2 + a)}{(x-1)^3}$$

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow 2(-2)(-2-1) - 2((-2)^2 + a) = 0$$

$$\Rightarrow 12 - 2(4 + a) = 0 \Rightarrow 4 + a = 6 \Rightarrow a = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

باتوجه به نمودار، تابع در مبدأ مختصات عطف دارد. باتوجه به شکل $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ است.

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + bx$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6ax + b \Rightarrow f''(0) = b = 0$$

پس $b = 0$ می‌باشد. تابع در نقطه‌ای به طول ۳، مماس افقی دارد؛ پس:

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow 4 \times 3^3 + 3a \times 3^2 = 0 \Rightarrow 3^3(4 + a) = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 - 4x^3 \Rightarrow f(-2) = (-2)^4 - 4(-2)^3 = (-2)^3(-2 - 4) = 48$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

اگر تابع f هموگرافیک باشد به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ خواهد بود و همچنین وارون آن به صورت $f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{ax+b}{cx+d}}{\frac{dx-b}{-cx+a}} = \frac{-ac}{cd} = -\frac{a}{d} \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{dx-b}{-cx+a}}{\frac{ax+b}{cx+d}} = \frac{-dc}{ac} = -\frac{d}{a} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{۱,۲} -\frac{a}{d} = -\frac{d}{a} \Rightarrow a^2 = d^2 \Rightarrow a = \pm d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{c}, x = -\frac{d}{c} \xrightarrow{a=d} \left(-\frac{d}{c}, \frac{d}{c}\right) \\ y = \frac{a}{c}, x = -\frac{d}{c} \xrightarrow{a=-d} \left(-\frac{d}{c}, -\frac{d}{c}\right) \end{cases}$$

باتوجه به نقطه تلاقی مجانب‌های به دست آمده، نقطه‌ای قابل قبول است که یا طول و عرض برابر داشته باشد و یا طول و عرض قرینه که فقط گزینه ۳ دارای این شرایط است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

$$x_{\min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{مجانب قائم} = \frac{1-a}{a+1}, \quad \text{مجانب افقی} = \frac{a}{a+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1-a}{a+1} = \frac{-1}{3} \Rightarrow 3 - 3a = -a - 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x+3}{3x+1} \xrightarrow{y=0} 2x+3=0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \text{ محل تلاقی با محور } x \text{ ها}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

باتوجه به نمودار، تابع در نقطه‌ای با طول $x = -1$ ، مماس افقی دارد؛ پس $f'(-1) = 0$ است. ازطرفی بسیار واضح است که جهت تقعر منحنی تابع در نقطه $x = -1$ عوض شده است؛ بنابراین داریم: $f''(-1) = 0$ با حل دو معادله $f'(-1) = 0$ و $f''(-1) = 0$ مقادیر a و b را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(-1) = -4 - 3 - 2a + b = 0 \Rightarrow b - 2a = 7 \quad (I)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x + 2a \Rightarrow f''(-1) = 12 + 6 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -18 \Rightarrow a = -9$$

$$\xrightarrow{(I)} b - 2(-9) = 7 \Rightarrow b + 18 = 7 \Rightarrow b = -11$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

باتوجه به شکل، تابع دارای یک مجانب قائم است. با صفر قرار دادن مخرج کسر می‌توان معادله آن را به دست آورد. مخرج کسر چندجمله‌ای درجه دوم است. برای اینکه مطمئن شویم یک ریشه (ریشه مضاعف) دارد، فرض می‌کنیم $\Delta = 0$ باشد.

$$x^2 + bx + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \Delta = b^2 - 4(1)(4) = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \text{ داریم: } b = 4$$

در این صورت خط $x = -2$ مجانب قائم تابع می‌شود که باتوجه به نمودار قابل قبول نیست اما به ازای $b = -4$ داریم:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$y = \frac{x + a}{(x - 2)^2} \text{ که در این صورت خط } x = 2 \text{ مجانب قائم تابع است، پس داریم:}$$

باتوجه به شکل واضح است که $y(0) > 0$ می‌باشد، پس:

$$y(0) = \frac{0 + a}{(0 - 2)^2} = \frac{a}{4} > 0 \Rightarrow a > 0$$

بنابراین $a > 0$ و $b = -4$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

باتوجه به شکل، تابع در نقطه‌ای به طول $x = 0$ ، ماکزیمم نسبی دارد و خط مماس بر نمودار در این نقطه افقی است؛ پس $x = 0$ ریشه ساده معادله $f'(x) = 0$ است. همچنین تابع در نقطه‌ای با طول مثبت، مماس افقی دارد و تقعر تابع نیز در این نقطه عوض می‌شود؛ پس این نقطه ریشه مضاعف معادله $f'(x) = 0$ است. ضابطه $f'(x)$ را تعیین و معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم.

$$f(x) = -x^4 + 18x^3 + ax^2 + b \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 54x^2 + 2ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -4x^3 + 54x^2 + 2ax = -2x(2x^2 - 12x - a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2x^2 - 12x - a = 0 \end{cases}$$

باتوجه به توضیحات بالا، معادله درجه دوم $2x^2 - 12x - a = 0$ باید ریشه مضاعف مثبتی داشته باشد.

$$2x^2 - 12x - a = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \Delta = (-12)^2 - 4(2)(-a) = 0 \Rightarrow 144 + 8a = 0$$

$$\Rightarrow 8a = -144 \Rightarrow a = -18$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

باتوجه به شکل، خط $x = 1$ مجانب قائم تابع است، پس به ازای $x = 1$ مخرج کسر برابر با صفر می‌شود؛ پس:

$$x + b = 0 \xrightarrow{x=1} 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

ازطرفی نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند؛ بنابراین مختصات نقطه $(0, 0)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند:

$$f(x) = \frac{x^2 + a}{x - 1} \xrightarrow{f(0)=0} 0 = \frac{0 + a}{0 - 1} \Rightarrow a = 0$$

بنابراین دوتایی مرتب (a, b) به صورت $(0, -1)$ خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

نقطه $(۴, ۰)$ روی منحنی تابع قرار دارد پس مختصات این نقطه در معادله تابع صدق می‌کند.

$$y = ax^3 + bx^2 - ۱۶ \Rightarrow ۰ = a(۴)^3 + b(۴)^2 - ۱۶ \Rightarrow ۰ = ۶۴a + ۱۶b - ۱۶$$

$$\Rightarrow ۴a + b - ۱ = ۰ \Rightarrow ۴a + b = ۱ \quad (I)$$

تابع در نقاطی به طول $x = ۴$ و $x = ۰$ مماس افقی دارد، پس داریم:

$$y'(۴) = ۰, y'(۰) = ۰$$

$$y' = ۳ax^2 + ۲bx$$

$$y'(۰) = ۳a(۰)^2 + ۲b(۰) = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰ \quad \checkmark$$

$$y'(۴) = ۳a(۴)^2 + ۲b(۴) = ۰ \Rightarrow ۴۸a + ۸b = ۰ \Rightarrow ۶a + b = ۰$$

$$\Rightarrow b = -۶a \quad (II)$$

با جایگذاری رابطه II در رابطه I مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$۴a + b = ۱ \xrightarrow{b=-۶a} ۴a - ۶a = ۱ \Rightarrow -۲a = ۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

در $x = ۰$ نقطه $\min$ نسبی داریم، یعنی $f'(۰) = ۰$. این نتیجه می‌دهد:

$$f'(x) = ۱۲x^3 + ۳ax^2 + ۲bx + c \Rightarrow f'(۰) = c = ۰$$

نقطه $x = ۱$ هم عطف است و هم مماس افقی: $f'(۱) = f''(۱) = ۰$. یعنی:

$$f''(x) = ۳۶x^2 + ۶ax + ۲b \Rightarrow \begin{cases} f'(۱) = ۰ \\ f''(۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۲ + ۳a + ۲b = ۰ \\ ۳۶ + ۶a + ۲b = ۰ \end{cases}$$

از حل این دستگاه داریم: $a = -۸, b = ۶$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

برای تعیین وضعیت نمودار تابع f در اطراف نقطه $x = 1$ ، ابتدا ضابطه دو تابع f' و f'' را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$$

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 \Rightarrow f'(1) = 4 - 9 + 6 - 1 = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x + 6 \Rightarrow f''(1) = 12 - 18 + 6 = 0$$

تابع در $x = 1$ دارای مماس افقی است زیرا $f'(1) = 0$ است. اکنون با تعیین علامت تابع $f''(x)$ تقعر تابع را در اطراف نقطه $x = 1$ مشخص می‌کنیم.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 18x + 6 = 6(2x - 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
f''	+	0	-	0	+
f	U	∩	U		

تقعر تابع در نقطه $x = 1$ عوض شده است. قبل از این نقطه تقعر روبه‌پایین و بعد از آن تقعر روبه‌بالا است، بنابراین نقطه $x = 1$ نقطه عطف تابع است. باتوجه‌به توضیحات داده‌شده، نمودار تابع در نقطه $x = 1$ به‌صورت زیر خواهد بود:



باتوجه به شکل، $x = 0$ تنها ریشه تابع $f(x)$ است؛ پس:

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2}{x^2 + bx + c} \xrightarrow{f(x)=0} x^3 + ax^2 = x^2(x + a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -a \end{cases}$$

بنابراین:

$$-a = 0 \Rightarrow a = 0$$

ازطرفی خط $x = 1$ ، مجانب قائم تابع $f(x)$ می‌باشد؛ پس $x = 1$ ریشه مخرج کسر است؛ اما باتوجه به نمودار داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

بنابراین $x = 1$ ریشه مضاعف مخرج کسر است؛ پس:

$$x^2 + bx + c = (x - 1)^2 \Rightarrow x^2 + bx + c = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

بنابراین:

$$bc - a = -2(1) - 0 = -2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند؛ بنابراین مختصات نقطه $(0, 0)$ در ضابطه تابع صدق می‌کند:

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 1} \xrightarrow{f(0)=0} 0 = \frac{0 + b}{0 + 1} \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{ax}{x^2 + 1}$$

تابع در نقطه‌ای به عرض ۲ دارای ماکسیمم نسبی است، پس خط $y = 2$ بر منحنی تابع مماس است؛ بنابراین معادله تلاقی خط $y = 2$ و ضابطه تابع، ریشه مضاعف دارد.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2 \\ f(x) = \frac{ax}{x^2 + 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{ax}{x^2 + 1} = 2 \Rightarrow ax = 2x^2 + 2 \Rightarrow 2x^2 - ax + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} (-a)^2 - 4(2)(2) = 0 \Rightarrow a^2 - 16 = 0 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

اما باتوجه به نمودار، وقتی $x > 0$ ، $f(x) > 0$ است و چون مخرج تابع همواره مثبت است، پس به ازای $x > 0$ باید $ax > 0$ باشد؛ بنابراین $a = 4$ قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) جهت تقعر منحنی تابع در نقطه عطف تابع عوض می‌شود.
 ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

نقطه مشخص شده روی نمودار، نقطه عطف تابع است زیرا جهت تقعر منحنی در این نقطه عوض شده است، پس در این نقطه $y'' = 0$ است. ازطرفی خط مماس بر منحنی در این نقطه افقی است، پس در این نقطه $y' = 0$ است.

$$y = x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$y' = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow y'' = 6x + 2a$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 2a = 0 \Rightarrow 6x = -2a \Rightarrow x = -\frac{a}{3}$$

طول نقطه عطف تابع $x = -\frac{a}{3}$ است، پس داریم: $y'(-\frac{a}{3}) = 0$

$$\Rightarrow y'(-\frac{a}{3}) = 3(-\frac{a}{3})^2 + 2a(-\frac{a}{3}) + b = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3a^2}{9} - \frac{2a^2}{3} + b = 0 \Rightarrow b - \frac{a^2}{3} = 0 \Rightarrow b = \frac{a^2}{3} \Rightarrow a^2 = 3b$$

باتوجه به گزینه‌ها، تنها دوتایی $(-6, 12)$ در رابطه $a^2 = 3b$ صدق می‌کند.

تابع در نقطه‌ای به طول $x = ۳$ مینیمم نسبی دارد و خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه افقی است، پس داریم: $f'(۳) = ۰$

$$f(x) = \frac{1}{۶}x^۶ + ax^۳ + bx^۲ + ۲$$

$$f'(x) = x^۵ + ۳ax^۲ + ۲bx$$

$$f'(۳) = ۰ \Rightarrow (۳)^۵ + ۳a(۳)^۲ + ۲b(۳) = ۰ \Rightarrow ۲۷ + ۲۷a + ۶b = ۰$$

$$\Rightarrow ۹ + ۹a + ۲b = ۰ \quad (I)$$

همچنین یکی از نقاط عطف تابع، نقطه‌ای به طول $x = ۰$ است و چون تابع یک چندجمله‌ای است، پس $x = ۰$ ریشه معادله $f''(x) = ۰$ خواهد بود، پس $f''(۰) = ۰$ است.

$$f''(x) = ۵x^۴ + ۶ax + ۲b$$

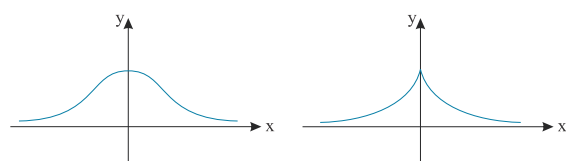
$$f''(۰) = ۰ \Rightarrow ۰ + ۲b = ۰ \Rightarrow ۲b = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

با جایگذاری $b = ۰$ در معادله I داریم:

$$۹ + ۹a + ۲b = ۰ \xrightarrow{b=۰} ۹ + ۹a = ۰ \Rightarrow ۹a = -۹ \Rightarrow a = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

نمودار تابع f همواره صعودی است؛ بنابراین $f'(x) > ۰$ است (رد گزینه ۱). تقعر تابع f در بازه $(-\infty, ۰)$ روبه‌بالا است ($f'' > ۰$)؛ بنابراین روی این بازه f' صعودی است (رد گزینه ۳ و ۴). دقت کنید که $x = ۰$ نقطه عطف تابع f است؛ اما f'' در این نقطه می‌تواند برابر با صفر باشد یا نباشد؛ بنابراین f' می‌تواند در این نقطه مماس افقی داشته باشد یا نداشته باشد، پس نمودار f' به هر دو شکل زیر قابل قبول است.



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) نقطه $(1, 2)$ روی نمودار تابع قرار دارد، پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند، بنابراین: $y(1) = 2$
 ب) جهت تقعر تابع در نقطه $x = 1$ عوض می‌شود، پس: $y''(1) = 0$

گام دوم

$$y = ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{1}{2}}$$

$$\xrightarrow{y(1)=2} 2 = a(1)^{\frac{3}{2}} + b(1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a + b = 2 \quad (\text{I})$$

$$y' = \frac{3}{2}ax^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = \frac{3}{4}ax^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}bx^{-\frac{3}{2}}$$

$$\xrightarrow{y''(1)=0} 0 = \frac{3}{4}a(1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}b(1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}b = 0 \Rightarrow 3a - b = 0 \Rightarrow b = 3a \quad (\text{II})$$

با جایگذاری رابطه II در رابطه I داریم:

$$a + b = 2 \xrightarrow{b=3a} a + 3a = 2 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = 3a \Rightarrow b = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

گام اول

الف) جهت تقعر منحنی تابع در نقطه‌ای به طول $x = 0$ عوض می‌شود، بنابراین طول نقطه عطف تابع برابر صفر است.
 ب) تابع دارای یک مینیمم نسبی و یک ماکسیمم نسبی است پس معادله $y' = 0$ دو ریشه ساده دارد.

گام دوم

$$y = -x^3 + ax^2 + bx + 2 \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$y' = -3x^2 + 2ax + b \Rightarrow y'' = -6x + 2a$$

باتوجه به قسمت "الف" از گام اول، $y''(0) = 0$ است پس:

$$-6(0) + 2a = 0 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

پس $y = -x^3 + bx + 2$ است. با حل معادله $y' = 0$ داریم:

$$-3x^2 + b = 0 \Rightarrow 3x^2 = b \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{b}{3}}$$

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، نامنفی است؛ ازطرفی معادله $y' = 0$ دو ریشه دارد پس $b > 0$ است. باتوجه به نمودار، مینیمم نسبی تابع بر قسمت منفی محور x ها مماس شده است، پس:

$$y\left(-\sqrt{\frac{b}{3}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\left(-\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^3 + b\left(-\sqrt{\frac{b}{3}}\right) + 2 = 0 \Rightarrow \frac{b}{3}\sqrt{\frac{b}{3}} - b\sqrt{\frac{b}{3}} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3}} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3}} = 2 \Rightarrow 2\left(\frac{b}{3}\sqrt{\frac{b}{3}}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^3 = 1 \Rightarrow \frac{b}{3} = 1 \Rightarrow b = 3$$

بنابراین داریم: $(a, b) = (0, 3)$

چون تابع یک ماکزیمم و یک مینیمم با طول منفی دارد پس مشتق آن باید دو ریشه منفی داشته باشد:

$$f'(x) = 2x^2 - 2(m-1)x + 1 = 0 \xrightarrow{\div(2)} x^2 - (m-1)x + \frac{1}{2} = 0$$

برای اینکه معادله فوق دو ریشه منفی داشته باشد، باید:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 1 > 0 \Rightarrow (m-1)^2 > 1 \\ \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{1} > 0 \\ \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-1}{1} < 0 \Rightarrow m < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-1 > 1 \text{ یا } m-1 < -1 \Rightarrow m > 2 \text{ یا } m < 0 \\ m < 1 \end{cases}$$

$$\text{اشتراک} \Rightarrow m < 0$$

ازطرفی می‌دانیم طول نقطه عطف تابع درجه سوم از رابطه $x = \frac{-b}{3a}$ محاسبه می‌شود.

$$\text{طول نقطه عطف} = -\frac{-(-(m-1))}{3\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{m-1}{3}$$

باتوجه به حدود m ، حدود طول نقطه عطف تابع را می‌یابیم:

$$m < 0 \Rightarrow m-1 < -1 \Rightarrow \frac{m-1}{3} < -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{طول نقطه عطف} < -\frac{1}{3}$$

نمودار و مجانب افقی تابع در نقطه‌ای به طول $x = 0$ برخورد کرده‌اند، بنابراین به ازای $x = 0$ ، معادلهٔ مجانب افقی تابع به دست می‌آید.

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + \lambda}{x^2 + 4} \xrightarrow{x=0} f(0) = \frac{0 + 0 + \lambda}{0 + 4} = \frac{\lambda}{4} = 2 \Rightarrow y = 2 \quad \text{مجانب افقی}$$

ازطرفی برای به دست آوردن مجانب افقی، حد تابع را وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ محاسبه می‌کنیم، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2 + bx + \lambda}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a \Rightarrow y = a \quad \text{مجانب افقی}$$

بنابراین $a = 2$ است.

باتوجه به نمودار، مینیمم نسبی تابع بر خط $y = 0$ مماس است، پس معادلهٔ تلاقی خط $y = 0$ و ضابطهٔ تابع ریشهٔ مضاعف دارد:

$$y = 0 \quad \left. \begin{aligned} f(x) = \frac{2x^2 + bx + \lambda}{x^2 + 4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2x^2 + bx + \lambda}{x^2 + 4} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + bx + \lambda = 0 \xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشهٔ مضاعف}} b^2 - 4(2)(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow b^2 - 64 = 0 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = \pm 8$$

باتوجه به نمودار، نقطهٔ مینیمم نسبی تابع دارای طولی مثبت است؛ بنابراین ریشهٔ مضاعف معادله باید مثبت باشد، پس $b = -8$ قابل قبول است. داریم:

$$a + b = 2 - 8 = -6$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

اکسترمم‌های نمودار تابع $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12x$ را پیدا می‌کنیم:

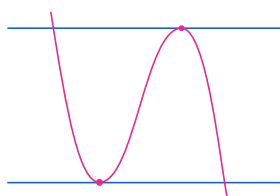
$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x^2 + 2x + 12 = -2(x^2 - x - 6) \\ &= -2(x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 3 \end{aligned}$$

x	-2	3	
f'(x)	-	+	-
f(x)	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	min	max	

$$\min f = f(-2) = -\frac{2}{3}(-8) + 4 - 24 = \frac{16}{3} - 20 = -\frac{44}{3}$$

$$\max f = f(3) = -\frac{2}{3}(27) + 9 + 36 = 27$$

پس نمودار تابع به‌طور تقریبی به شکل زیر است.



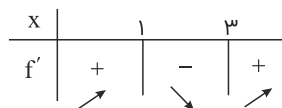
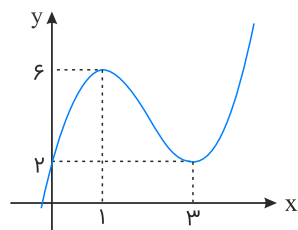
خط $y = m$ نمودار را در دو نقطه (نقاط اکسترمم) قطع می‌کند:

$$m = -\frac{44}{3}, \quad m = 27$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$$

$$f(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$$



پس به ازای $2 < m < 6$ یا $m > 6$ ، $f(x) = m$ دارای یک ریشه حقیقی است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

محور y ها یا همان خط $x = 0$ مجانب قائم تابع است؛ بنابراین $x = 0$ ریشه مخرج است. همچنین نمودار تابع محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند؛ بنابراین $f(2) = 0$ است.

گام دوم

$$\text{ریشه مخرج } x = 0 : 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{ax^2 - 1}{x}$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow \frac{4a - 1}{2} = 0 \Rightarrow 4a - 1 = 0 \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$a + b = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

باتوجه به نمودار $x = 0$ مجانب قائم تابع است، بنابراین: $b = 0$
نقطه $(2, 0)$ روی نمودار قرار دارد، بنابراین مختصات آن در تابع صدق می‌کند، پس داریم:

$$f(x) = \frac{2 + ax^2}{x} \xrightarrow{(2,0)} \frac{2 + a(2)^2}{2} = 0 \Rightarrow 4a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow a - b = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

باتوجه به نمودار، تابع دو مجانب قائم قرینه هم دارد پس مخرج باید دو ریشه قرینه داشته باشد، در نتیجه:

$$\begin{cases} b = 0 \\ \Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4a > 0 \xrightarrow{b=0} a < 0 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

باتوجه به شکل، خط $x = 0$ مجانب قائم تابع است، پس $x = 0$ ریشه مخرج کسر است.

$$y = \frac{x+b}{x^2+a} \Rightarrow x^2+a = 0 \xrightarrow{x=0} 0+a=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow y = \frac{x+b}{x^2}$$

باتوجه به شکل، تابع در نقطه‌ای به طول $x = 2$ دارای ماکسیمم نسبی بوده و مماس بر نمودار، در این نقطه افقی است، پس داریم:

$$y'(2) = 0$$

$$y' = \frac{x^2 - 2x(x+b)}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 - 2bx}{x^4} = \frac{-x^2 - 2bx}{x^4}$$

$$y'(2) = 0 \Rightarrow \frac{-2^2 - 2b(2)}{2^4} = 0 \Rightarrow -4 - 4b = 0 \Rightarrow 4b = -4 \Rightarrow b = -1$$

بنابراین: $(a, b) = (0, -1)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

باتوجه به نمودار، تقعر منحنی تابع در یک نقطه در ناحیه چهارم عوض می‌شود؛ بنابراین طول نقطه عطف تابع مقداری مثبت است. چون تابع y یک چندجمله‌ای است پس نقطه عطف، ریشه معادله $y'' = 0$ است.

$$y = \frac{2}{3}x^3 + ax^2 + bx$$

$$y' = 2x^2 + 2ax + b$$

$$y'' = 4x + 2a \xrightarrow{y''=0} 4x + 2a = 0 \Rightarrow 4x = -2a \Rightarrow x = -\frac{a}{2} > 0 \Rightarrow a < 0$$

باتوجه به گزینه‌ها $a = -1$ قابل قبول است.

ازطرفی باتوجه به نمودار، تابع دارای دو نقطه اکسترمم نسبی با مماس افقی است، پس معادله $y' = 0$ دو ریشه ساده دارد. چون ضابطه $y' = 0$ یک چندجمله‌ای درجه دو است پس باید در معادله $y' = 0$ ، $\Delta > 0$ باشد.

$$y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + bx$$

$$y' = 2x^2 - 2x + b$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x + b = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} (-2)^2 - 4(2)(b) > 0 \Rightarrow 4 - 8b > 0$$

$$\Rightarrow 8b < 4 \Rightarrow b < \frac{1}{2}$$

باتوجه به گزینه‌ها $b = -4$ قابل قبول است، پس داریم: $(a, b) = (-1, -4)$

تابع در نقطه‌ای به طول $x = ۳$ ، ماکسیمم نسبی دارد و همچنین خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه، افقی است؛ پس $y'(۳) = ۰$ می‌شود.

$$y = ax^۴ + ۲x^۳ + bx^۲ \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$y' = ۴ax^۳ + ۶x^۲ + ۲bx$$

$$y'(۳) = ۰ \Rightarrow ۴a(۳)^۳ + ۶(۳)^۲ + ۲b(۳) = ۰ \Rightarrow ۱۰۸a + ۵۴ + ۶b = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۸a + ۹ + b = ۰ \quad (I)$$

ازطرفی جهت تقعر منحنی تابع در نقطه $x = ۰$ عوض می‌شود و چون تابع یک چندجمله‌ای است پس نقطه عطف تابع ریشه معادله $y'' = ۰$ خواهد بود؛ بنابراین $y''(۰) = ۰$ است.

$$y'' = ۱۲ax^۲ + ۱۲x + ۲b$$

$$y''(۰) = ۰ \Rightarrow ۰ + ۰ + ۲b = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

طبق رابطه I داریم:

$$۱۸a + ۹ + b = ۰ \xrightarrow{b=۰} ۱۸a + ۹ = ۰ \Rightarrow ۱۸a = -۹ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

از روی نمودار پیداست که شیب خط مماس بر نمودار در $x = ۰$ برابر صفر است.

$$f(x) = x^۴ + ax^۳ + bx \Rightarrow f'(x) = ۴x^۳ + ۳ax^۲ + b \xrightarrow{f'(۰)=۰} b = ۰$$

$$\Rightarrow f(x) = x^۴ + ax^۳ \xrightarrow{f(-۴)=۰ : \text{از روی نمودار}} (-۴)^۴ + a(-۴)^۳ = ۰ \Rightarrow a = ۴$$

بنابراین:

$$f(x) = x^۴ + ۴x^۳$$

برای به دست آوردن مینیمم تابع، از آن مشتق می‌گیریم و مساوی با صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = ۴x^۳ + ۱۲x^۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۴x^۲(x + ۳) = ۰ \Rightarrow x = -۳ \text{ مینیمم}$$

$$\Rightarrow f(-۳) = (-۳)^۴ + ۴(-۳)^۳ = ۸۱ - ۱۰۸ = -۲۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

باتوجه به نمودار، تابع در بازه $(-\infty, 0)$ نزولی است؛ پس نمودار f' در این بازه منفی است (زیر محور x ها) و همچنین تابع f در بازه $(0, +\infty)$ صعودی است پس نمودار f' در این بازه مثبت است (بالای محور x ها)، نمودار تابع f دارای یک مجانب افقی است که تابع در $+\infty$ و $-\infty$ به آن میل می‌کند؛ بنابراین مشتق تابع در $+\infty$ و $-\infty$ به صفر میل خواهد کرد پس خط $y = 0$ مجانب افقی تابع f' است. باتوجه به گزینه‌ها، تنها گزینه ۲ همه شرایط را دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) جهت تقعر منحنی تابع در نقطه عطف تابع عوض می‌شود.
ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه برابر با مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

جهت تقعر منحنی تابع در مبدأ مختصات عوض شده است؛ بنابراین مبدأ مختصات نقطه عطف تابع است و داریم: $f''(0) = 0$

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = -6x + 2a$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow -6(0) + 2a = 0 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \quad (I)$$

ازطرفی شیب خط مماس بر منحنی تابع در مبدأ مختصات منفی است یعنی $f'(0) < 0$ است پس:

$$f'(0) = -3(0)^2 + 2a(0) + b < 0 \Rightarrow b < 0 \quad (II)$$

از میان گزینه‌ها، تنها دوتایی $(0, -1)$ در دو شرط I و II صدق می‌کند.

گام اول

- الف) خط $x = 0$ مجانب قائم تابع است پس باید $x = 0$ ریشه مخرج کسر باشد.
- ب) نمودار تابع از نقطه $(2, 0)$ عبور می‌کند پس $f(2) = 0$ است.
- ج) مشتق تابع در تمام نقاط اکسترمم نسبی، در صورت مشتق‌پذیری، برابر صفر است.

گام دوم

با توجه به قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$x^2 + b = 0 \xrightarrow{x=0} 0^2 + b = 0 \Rightarrow b = 0$$

و با توجه به قسمت (ب) از گام اول داریم:

$$f(2) = 0 \Rightarrow \frac{2a + 2}{2^2} = 0 \Rightarrow \frac{2a + 2}{4} = 0 \Rightarrow 2a + 2 = 0 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{-x + 2}{x^2}$$

برای به دست آوردن مینیمم نسبی تابع، از تابع مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \frac{-(x^2) - 2x(-x + 2)}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x^2 - 4x}{x^4} = \frac{x^2 - 4x}{x^4} = \frac{x(x - 4)}{x^4} = \frac{x - 4}{x^3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x - 4}{x^3} = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

مقدار مینیمم نسبی تابع برابر است با:

$$f(4) = \frac{-4 + 2}{4^2} = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8}$$