

منبع:

۱ اگر $A_n = \left(\frac{-2}{n}, \frac{n-2}{n} \right)$ به صورت بازه باشد، مجموعه $A_3 \cup A_6 - A_3$ برابر کدام بازه است؟

(۱) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ (۲) $\left[\frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right)$

(۳) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ (۴) $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۲ اگر $A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2} \right]$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ آنگاه مجموعه $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$ به کدام صورت است؟

(۱) $[-2, -1) \cup (1, 2]$ (۲) $[-2, -1] \cup [1, 2]$

(۳) $[-1, 1]$ (۴) $\emptyset$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۳ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \left(-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n} \right)$ باشد، آنگاه $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ کدام است؟

(۱) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$ (۲) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{2}{3} \right)$

(۳) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right)$ (۴) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۴ اگر $n(A \cup B) = 57$ و $n(A \cap B) = 3n(A - B) = 4n(B - A)$ باشد، تعداد اعضای مجموعه A کدام است؟

(۱) ۳۳ (۲) ۳۶

(۳) ۴۵ (۴) ۴۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۵ فرض کنید A و B دو مجموعه غیرتهی و جدا از هم، با یک مجموعه مرجع باشند. کدام رابطه نادرست است؟

(۱) $A \subset B'$ (۲) $A - B' = \emptyset$

(۳) $A \cap B' = A$ (۴) $(A \cup B)' = \emptyset$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۶

مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = ۱۴$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۸
(۲) ۶
(۳) ۴
(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۷

مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = ۵$ و تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ برابر ۱۱ باشد، کمترین مقدار ممکن برای m کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۸

اگر A ، B و C سه مجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ مرجع U باشند، مجموعهٔ $C - ((A - B)' - (B - C))$ با کدام مجموعه برابر است؟

- (۱) $A' - (B \cup C)$
(۲) $B - (A \cup C)$
(۳) $C - (A \cup B)$
(۴) $(A' \cup B') - C$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۹

در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن‌هایی که نه مزرعه چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعه چای دارند؟ (کشاورزان فقط چای و برنج برداشت می‌کنند)

- (۱) ۱۰۰
(۲) ۱۳۵
(۳) ۲۳۵
(۴) ۲۷۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰

اگر متمم مجموعهٔ $(A - B) \cup (B - A)$ برابر $A \cap B$ باشد، کدام عبارت درست است؟ (S مجموعهٔ مرجع است)

- (۱) $A \subseteq B$
(۲) $A \subseteq B'$
(۳) $A \cup B = S$
(۴) $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۱۱

در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه‌دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟

- (۱) ۱۵
(۲) ۱۶
(۳) ۱۷
(۴) ۱۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر آنان عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟

(۲) ۱۸

(۱) ۱۵

(۴) ۲۲

(۳) ۲۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

اگر A و B دو مجموعه غیرتهی با شرط $A \subset B$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

(۲) $A - B' = A$

(۱) $B - A' = A$

(۴) $B \cap A' = \emptyset$

(۳) $A \cap B' = \emptyset$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹



منبع:

گزینه ۴

۱

ابتدا باتوجه به رابطه $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$ ، مجموعه‌های A_3 و A_6 را به صورت بازه تعیین می‌کنیم. (برای به دست آوردن A_3 ، $n = 3$ و برای به دست آوردن A_6 ، $n = 6$ در نظر گرفته می‌شود.)

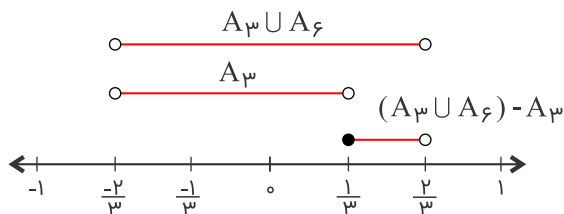
در ادامه برای تعیین بازه $A_3 \cup A_6$ ، ابتدای بازه کوچک‌ترین عضو ابتدای A_3 و A_6 و انتهای آن بزرگ‌ترین عضو انتهای A_3 و A_6 در نظر گرفته می‌شود.

$$A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}) \Rightarrow \begin{cases} A_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{3-2}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \\ A_6 = (-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$$

$$A_3 \cup A_6 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

$$(A_3 \cup A_6) - A_3 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

در صورتی که تعیین اجتماع و اشتراک بازه‌ها برای شما دشوار بود می‌توانید از رسم نمودار هم به شکل زیر استفاده کنید:



ابتدا باتوجه به تعریف مجموعه A_i ، مجموعه‌های A_1 ، A_2 ، A_5 و A_7 را به صورت بازه مشخص می‌کنیم.
 برای به دست آوردن اشتراک دو مجموعه که به صورت بازه مشخص شده‌اند، ابتدای بازه، بزرگ‌ترین عدد ابتدای دو مجموعه و انتهای بازه، کوچک‌ترین عدد انتهای دو مجموعه در نظر گرفته می‌شود.
 تست را با استفاده از رسم نمودار هم حل می‌کنیم تا اگر در مشخص کردن مجموعه‌ها به مشکل برخوردید، مشکلاتان به راحتی حل شود.

$$A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2}\right]$$

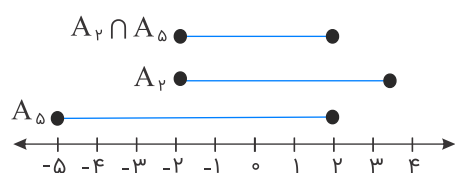
$$A_1 = \left[-1, \frac{9-1}{2}\right] = [-1, 4]$$

$$A_2 = \left[-2, \frac{9-2}{2}\right] = \left[-2, \frac{7}{2}\right]$$

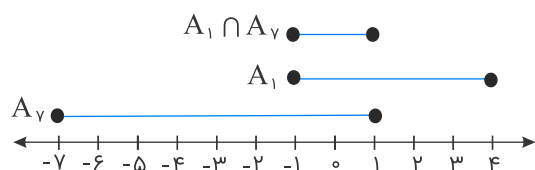
$$A_5 = \left[-5, \frac{9-5}{2}\right] = [-5, 2]$$

$$A_7 = \left[-7, \frac{9-7}{2}\right] = [-7, 1]$$

$$A_2 \cap A_5 = \left[-2, \frac{7}{2}\right] \cap [-5, 2] = [-2, 2]$$



$$A_1 \cap A_7 = [-1, 4] \cap [-7, 1] = [-1, 1]$$



$$(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = [-2, 2] - [-1, 1] = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

طبق تعریف مجموعه A_i داریم:

$$A_F = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad , \quad A_\Delta = \left(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

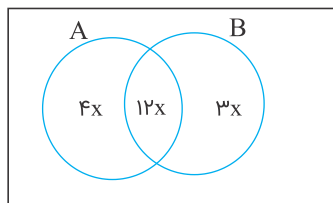
$$A_\varepsilon = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad , \quad A_V = \left(-\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right) \quad , \quad A_\wedge = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

بنابراین اشتراک این مجموعه‌ها به صورت زیر است:

$$\bigcap_{i=F}^{\wedge} A_i = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

با فرض $n(A \cap B) = 12x$ داریم:

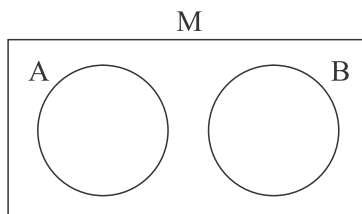


$$n(A \cup B) = 57 \Rightarrow 19x = 57 \Rightarrow x = 3$$

$$n(A) = 16x = 16 \times 3 = 48$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

نمودار ون را به صورت زیر در نظر می گیریم:



گزینه ۱" درست است، زیرا همان طور که در شکل دیده می شود، A زیرمجموعه B' است. گزینه ۲" را می توان به صورت زیر نوشت:

$$A - B' = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

که کاملاً درست است.

گزینه ۳" را به صورت زیر مرتب می کنیم:

$$A \cap B' = A \Rightarrow A - B = A$$

بنابراین باتوجه به شکل درست است.

گزینه ۴" به صورت زیر است:

$$(A \cup B)' = \emptyset \Rightarrow A' \cap B' = \emptyset$$

باتوجه به شکل نادرست است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

$$n(A) = m, \quad n(B) = k$$

$$m - k = n(A) - n(B) = ۱۴$$

$$\Rightarrow n(A - B) + n(A \cap B) - (n(B - A) + n(A \cap B)) = ۱۴$$

$$\Rightarrow n(A - B) - n(B - A) = ۱۴ \quad (I)$$

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = ۲۰$$

$$\Rightarrow n(A - B) + n(B - A) = ۲۰ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{I, II} \begin{cases} n(A - B) - n(B - A) = ۱۴ \\ n(A - B) + n(B - A) = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow n(B - A) = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

برای اینکه تعداد عضوهای A کمترین شود باید اشتراک A و B به حداقل برسد، یعنی: $n(A \cap B) = 0$

$$n(A) = m, \quad n(B) = k$$

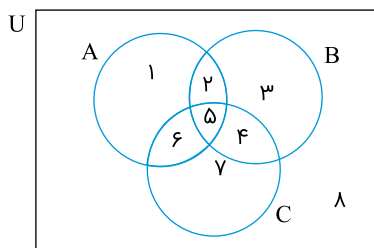
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 11 \xrightarrow{n(A \cap B) = 0} n(A) + n(B) = 11$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m - k = 5 \\ m + k = 11 \end{cases} \Rightarrow 2m = 16 \Rightarrow m = 8$$

توجه کنید که اگر تعداد اعضای اشتراک A و B عددی بزرگتر از صفر باشد، مقداری که برای m به دست می‌آید از ۸ بزرگتر می‌شود. امتحان کنید!

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

روش اول: به صورت زیر ناحیه‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم:



$$\begin{aligned}
 & ((\underbrace{A - B}_{\{1, 6\}})' - (\underbrace{B - C}_{\{2, 3\}})) - \underbrace{C}_{\{4, 5, 6, 7\}} \\
 &= (\underbrace{\{2, 3, 4, 5, 7, 8\} - \{2, 3\}}_{\{4, 5, 7, 8\}}) - \{4, 5, 6, 7\} = \{8\}
 \end{aligned}$$

$$A' - (B \cup C) = \{3, 4, 7, 8\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{8\}$$

روش دوم:

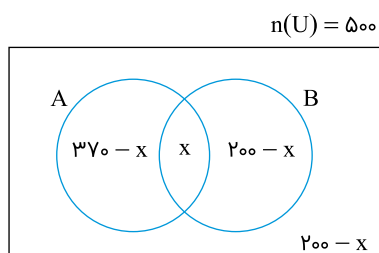
با استفاده از جبر مجموعه‌ها داریم:

$$\begin{aligned}
 & ((A - B)' - (B - C)) - C = ((A \cap B')' \cap (B \cap C')') \cap C' \\
 &= ((A' \cup B) \cap (B' \cup C)) \cap C' = (A' \cup B) \cap ((B' \cup C) \cap C') \\
 &= (A' \cup B) \cap ((B' \cap C') \cup \underbrace{(C \cap C')}_{\emptyset}) \\
 &= (A' \cup B) \cap (B' \cap C') = ((A' \cap B') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset}) \cap C' \\
 &= (A' \cap B') \cap C' = A' \cap (B' \cap C') = A' \cap (B \cup C)' \\
 &= A' - (B \cup C)
 \end{aligned}$$

مجموعه A: مزرعه‌داران چای

مجموعه B: شالیزارداران

در نمودار ون زیر تعداد اعضای هر کدام را نوشته‌ایم:



$$(370 - x) + (x) + (200 - x) + (200 - x) = 500 \Rightarrow x = 135$$

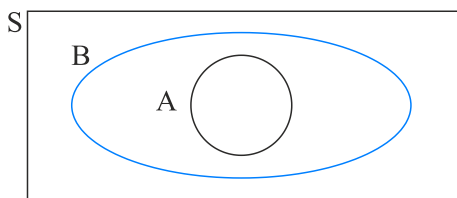
$$n(A - B) = 370 - 135 = 235$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

درستی شرط $((A - B) \cup (B - A))' = A \cap B$ را در هریک از گزینه‌ها بررسی می‌کنیم.
گزینه ۱) اگر $A \subseteq B$ باشد، برابری ذکرشده برقرار نیست.

$$((A - B) \cup (B - A))' = (\emptyset \cup (B - A))' = (B - A)'$$

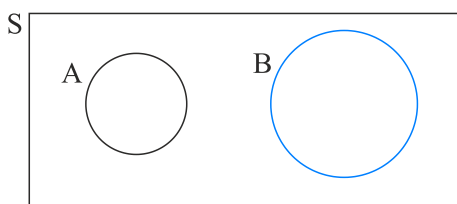
$$A \cap B = A$$



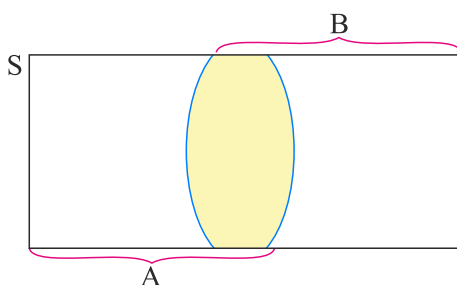
گزینه ۲) اگر $A \subseteq B'$ باشد، برابری ذکرشده برقرار نیست.

$$((A - B) \cup (B - A))' = (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$A \cap B = \{ \}$$



گزینه ۳) اگر $A \cup B = S$ باشد، برابری ذکرشده همواره برقرار است.
باتوجه به نمودار زیر متمم مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ قسمت رنگی خواهد شد که با $A \cap B$ برابر است.



گزینه ۴) اگر $A = \emptyset$ ، برابری ذکرشده برقرار نیست.

$$((A - B) \cup (B - A))' = (\emptyset \cup B)' = B'$$

$$A \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

به طریق مشابه اگر $B = \emptyset$ ، برابری ذکرشده برقرار نیست.
راه حل دوم:

متمم مجموعه دلخواه A برابر است با: $S - A = A'$

اکنون متمم مجموعه داده شده برابر است با:

$$S - ((A - B) \cup (B - A)) = S - ((A \cup B) - (A \cap B)) = A \cap B$$

$$\Rightarrow S = A \cup B$$

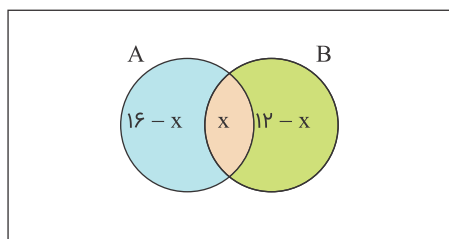
کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

گزینه ۴

۱۱

فرض کنید دانش‌آموزان گروه ورزش A و گروه روزنامه‌دیواری B است، معلومات مسئله چنین‌اند:

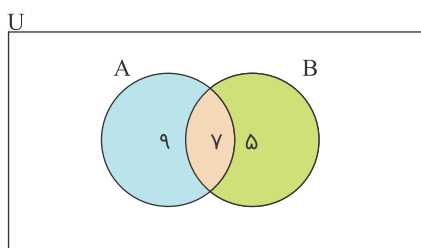
$$n(U) = ۳۹, \quad n(A) = ۱۶, \quad n(B) = ۱۲, \quad n(A - B) = ۹$$



می‌دانیم که:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۱۶ - x = ۹ \Rightarrow x = ۷$$

بنابراین ۷ نفر در هر دو گروه قرار دارند:



درنتیجه:

$$\begin{aligned} \text{دانش‌آموزانی که عضو هیچ گروهی نیستند} &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= ۳۹ - (n(A) + n(B) - n(A \cap B)) = ۳۹ - (۱۶ + ۱۲ - ۷) = ۱۸ \end{aligned}$$

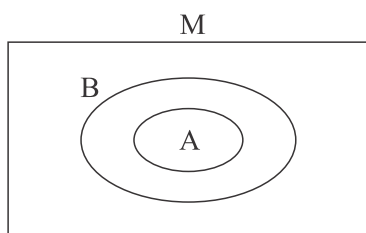
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

گروه آزمایشگاهی را A و گروه فوتبال را B فرض می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} n(S) &= ۴۲, \quad n(A) = ۱۵, \quad n(B) = ۱۲, \quad n(A \cap B) = ۷ \\ n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۱۵ + ۱۲ - ۷ = ۲۰ \\ \Rightarrow n((A \cup B)') &= n(S) - n(A \cup B) = ۴۲ - ۲۰ = ۲۲ \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

برای بررسی مسئله، بهتر است نمودار ون زیر را برای مجموعه‌های A و B فرض کنیم:



گزینه "۱" به صورت زیر ساده می‌شود:

$$B - A' = A \Rightarrow B \cap A = A$$

باتوجه به شکل کاملاً درست است.

گزینه "۲" عبارت است از:

$$A - B' = A \Rightarrow A \cap B = A$$

بنابراین این گزینه درست است.

گزینه "۳" به صورت زیر است:

$$A \cap B' = \emptyset \Rightarrow A - B = \emptyset$$

چون $A \subset B$ ، پس کاملاً درست است.

گزینه "۴" عبارت است از:

$$B \cap A' = \emptyset \Rightarrow B - A = \emptyset$$

نادرست می‌باشد، پس جواب مسئله گزینه "۴" است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹