

منبع:

۱ مماس‌های رسم‌شده بر دو دایره متقاطع، در نقطه تقاطع دو دایره، بر هم عمودند. اگر اندازه شعاع دو دایره ۸ و ۱۵ باشد، فاصله بین مراکز دو دایره کدام است؟

(۱) ۱۷ (۲) ۱۶/۵

(۳) ۱۳ (۴) ۱۱/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ نقطه $(0, a)$ و مبدأ مختصات، کانون‌های یک بیضی بوده و $(-3, 0)$ ، یک نقطه واقع بر آن است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، طول قطر کوچک بیضی کدام است؟

(۱) $6\sqrt{6}$ (۲) $6\sqrt{2}$

(۳) $3\sqrt{6}$ (۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ نقاط $F(0, 0)$ و $F'(a, 0)$ کانون‌های یک بیضی و $A(0, -1)$ یک نقطه واقع بر آن است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{2}{\sqrt{5}}$ باشد، مقدار مثبت a کدام است؟ (با تغییر)

(۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $3\sqrt{5}$

(۳) $5\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ مماس‌های رسم‌شده بر دو دایره متقاطع، در نقطه تقاطع دو دایره، بر هم عمودند. اگر شعاع دایره کوچک‌تر $1/5$ و فاصله بین مراکز دو دایره $2/5$ باشد، شعاع دایره بزرگ‌تر کدام است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{5}$

(۳) ۳ (۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۵ خط $3y + 2x = 9$ در نقطه $(0, 3)$ بر دایره $x^2 + y^2 + 3x + ay = c$ مماس است. مقدار a کدام است؟

(۱) $3/5$ (۲) $-3/5$

(۳) $1/5$ (۴) $-1/5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۶. کانون‌های یک بیضی نقاطی با طول $x = 3$ و $x = -3$ روی محور x ها هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{3}$ باشد، طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

(۲) $12\sqrt{2}$

(۱) $15\sqrt{2}$

(۴) $6\sqrt{2}$

(۳) $8\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۷. در یک مکعب به طول یال a ، صفحه قطری، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. این دو قسمت را در وجه مربع به هم می‌چسبانیم. سطح کل منشور حاصل، چند برابر a^2 است؟

(۲) $4 + 2\sqrt{2}$

(۱) $5 + \sqrt{2}$

(۴) $3 + 4\sqrt{2}$

(۳) $5 + 2\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۸. خطی به معادله $y + 2x = 0$ عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی نصف شعاع دیگری است. اگر معادله دایره بزرگ‌تر به صورت $x^2 + y^2 + 6x - 2y = a$ و خط مفروض بر دایره کوچک‌تر مماس باشد، مجموع طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

(۲) $-\frac{\sqrt{15}}{2}$

(۱) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

(۴) -1

(۳) 1

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۹. طول کوتاه‌ترین وتری که از $(-1, 2/5)$ در دایره $2x^2 + 2y^2 - 6x - 10y + 1 = 0$ رسم می‌شود، کدام است؟

(۲) $\sqrt{7}$

(۱) $\sqrt{5}$

(۴) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰. نقطه‌های M و N به ترتیب روی دو دایره متخارج $x^2 + y^2 - 2x + 2y = a$ و $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6a = 0$ قرار دارند. اگر بیشترین فاصله M و N برابر ۸ باشد، مقدار a کدام است؟

(۲) 2

(۱) $2/5$

(۴) 1

(۳) $1/5$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۱

خط d به معادله $y - x = 0$ ، عمودمنصف خطالمركزين دو دایره است که شعاع یکی ۲ برابر دیگری است. اگر خط d بر دایره کوچکتر به معادله $x^2 + y^2 + 6x - 2y = r$ مماس باشد، حاصلضرب طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$
(۳) $\frac{65}{32}$ (۴) $\frac{65}{64}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۲

دایره $x^2 + y^2 + 2y = 3$ مفروض است. معادله دایره‌ای که با دایره قبلی مماس داخل بوده و از نقطه $(0, -3)$ گذشته و قطر آن با شعاع دایره اصلی برابر باشد، کدام است؟ (با تغییر)

- (۱) $x^2 + y^2 - 4x = 3$ (۲) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$
(۳) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ (۴) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۳

به ازای کدام مقدار a ، دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 4x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ مماس خارج یکدیگرند؟

- (۱) ۵ (۲) ۶
(۳) ۷ (۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۴

در هرم با قاعده مربع، یکی از یال‌ها عمود بر صفحه قاعده و بلندترین یال‌ها به طول ۶ واحد با تصویر خودش بر قاعده، زاویه 60° درجه می‌سازد. حجم این هرم کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $4/5\sqrt{3}$
(۳) $4\sqrt{6}$ (۴) $7/5\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۵

مربع ABCD به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

- (۱) $2/25$ (۲) $2/5$
(۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۶

دایره C بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره C از نقطه $(8, 7)$ می‌گذرند. شعاع دایره C کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷
(۳) ۸ (۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ و $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

- (۱) مماس خارجی
(۲) مماس داخلی
(۳) متقاطع در دو نقطه
(۴) یکی خارج دیگری

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$ و $x^2 + y^2 + 2x = 1$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

- (۱) مماس داخل
(۲) مماس خارج
(۳) متقاطع
(۴) متداخل

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

دو دایره $x^2 + y^2 + 2y - 4x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2y = 2$ نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟

- (۱) مماس بیرون
(۲) متقاطع
(۳) متخارج
(۴) متداخل

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

ظرفی است به شکل نیم‌کره، به ضخامت یکنواخت ۳ واحد و قطر خارجی دهانه آن ۱۶ واحد است. سطح کل این ظرف چند برابر π است؟

- (۱) ۲۰۸
(۲) ۲۱۲
(۳) ۲۱۵
(۴) ۲۱۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

مساحت مقطع یک مکعب با صفحه قطری آن برابر $9\sqrt{2}$ است، اندازه قطر مکعب کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$
(۲) $3\sqrt{2}$
(۳) $2\sqrt{6}$
(۴) $3\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

شعاع دایره گذرا بر سه نقطه $(0, 0)$ ، $(2, 1)$ و $(1, -2)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
(۲) $\sqrt{3}$
(۳) $\sqrt{5}$
(۴) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۳

دایره‌ای، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲
(۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۴

طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه $A(-1, 0)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, -3)$ می‌گذرد، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲
(۳) $\sqrt{5}$ (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۲۵

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، منحنی به معادله $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ یک دایره است؟

- (۱) $\{-3\}$ (۲) $\{3\}$
(۳) $\{-3, 3\}$ (۴) $\emptyset$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۶

طول وتری از دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1$ که روی خط $2y + x = a$ قرار دارد، برابر ۳ است. اختلاف مقادیر a چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{35}$ (۲) $\sqrt{38}$
(۳) $3\sqrt{6}$ (۴) $5\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۷

طول خط‌المركزین دو دایره مماس درونی $3/5$ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آن‌ها 21π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

- (۱) $1/25$ (۲) $1/75$
(۳) $2/25$ (۴) $2/75$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۲۸

دایره‌ای به مرکز $(2, -1)$ و مماس بر خط به معادله $x - y = 1$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ و ۳ (۲) ۱ و ۴
(۳) ۲ و ۳ (۴) ۱/۵ و ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

دو دایره C و C' در نقطه $(۰, ۱)$ مماس برونی هم هستند. اگر قائم‌های بر دایره C همواره از نقطه $(۲, -۳)$ بگذرد، مرکز دایره C' با شعاع $\sqrt{۵}$ کدام است؟

- (۱) $(-۱, ۳)$ (۲) $(-۱, ۲)$
(۳) $(۱, -۲)$ (۴) $(۱, -۱)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

در یک مکعب صفحه گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه کدام است؟

- (۱) $\frac{۱}{۴}$ (۲) $\frac{۱}{۳}$
(۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ (۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

معادله دایره‌ای که بر دو دایره $x^2 - ۸x + y^2 + ۱۵ = ۰$ و $x^2 - ۲x + y^2 = ۰$ مماس خارج است و مرکزش روی یکی از محورها قرار دارد، کدام است؟

- (۱) $x^2 + y^2 + ۵x + ۶ = ۰$ (۲) $x^2 + y^2 - ۵x + ۶ = ۰$
(۳) $۴x^2 + ۴y^2 - ۲۰x + ۲۵ = ۰$ (۴) $۴x^2 + ۴y^2 + ۲۰x + ۲۵ = ۰$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

یک دوزنقه قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل، کدام است؟

- (۱) ۳۶π (۲) ۳۸π
(۳) ۳۹π (۴) ۴۰π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

نقطه $(۰, -۱۲)$ یکی از کانون‌های یک بیضی است که طول قطر کوچک آن برابر ۱۸ است. اگر مبدأ مختصات مرکز بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی، چقدر است؟

- (۱) $۵/۶$ (۲) $۵/۸$
(۳) $۱/۴$ (۴) $۱/۸$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

به‌ازای هر m ، معادله $(m-۲)x + (m+۱)y = ۶$ ، معادله قطری از دایره C است. اگر نقطه $A(-۱, ۱)$ روی دایره C باشد، محیط دایره C کدام است؟

- (۱) $۲\sqrt{۲}\pi$ (۲) ۲π
(۳) ۳π (۴) $۲\sqrt{۳}\pi$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۳۵

در یک بیضی با خروج از مرکز $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک، با کدام زاویه رؤیت می‌شود؟

(۱) 60° (۲) 90°

(۳) 120° (۴) 150°

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۶

دایره گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات $y = 2x + 10$ و $y = 2x$ مماس است. مختصات مرکز این دایره کدام است؟

(۱) $(-3, 2)$ (۲) $(-3, 1)$

(۳) $(-2, 1)$ (۴) $(-1, 2)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۷

دو دایره گذرا بر نقطه $(2, -9)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس است. شعاع دایره بزرگ‌تر، کدام است؟

(۱) ۱۴ (۲) ۱۵

(۳) ۱۷ (۴) ۱۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۳۸

نقطه $M(2\sqrt{5}, b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط به معادلات $y = 2x$ و $x = 2y$ مماس است. شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $1/5$

(۳) ۲ (۴) $2/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۹

یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه 30° درجه و طول وتر ۸ واحد، حول وتر خود دوران می‌کند، حجم جسم حاصل چندبرابر π است؟

(۱) ۲۴ (۲) ۳۲

(۳) ۳۶ (۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۰

دایره گذرا بر نقطه $(1, -2)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

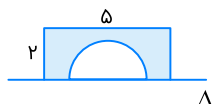
(۱) ۴ و ۱ (۲) ۵ و ۱

(۳) ۴ و ۲ (۴) ۵ و ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۴۱

سطح محدود به مستطیل ۵×۲ و نیم‌دایره به قطر ۳ واحد، حول خط Δ دوران می‌کند. حجم جسم حاصل چندبرابر π است؟



(۱) ۱۵

(۲) ۱۵/۵

(۳) ۱۶/۵

(۴) ۱۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۴۲

فاصله نقطه $M(x, y)$ از نقطه $A(۳, ۶)$ ، دو برابر فاصله آن از مبدأ مختصات است. بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

(۱) $۲\sqrt{۳}$ (۲) $۲\sqrt{۵}$ (۳) $۴\sqrt{۳}$ (۴) $۴\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۴۳

فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره به معادله $x^2 + y^2 - ۲x + ۴y = ۴$ از خط به معادله $۳x + ۴y = ۱۵$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{۳}{۲}$

(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۴۴

یک بیضی به قطرهای $AA' = ۱۴$ و $BB' = ۴\sqrt{۶}$ و کانون F نزدیک به نقطه A ، مفروض است. خط عمود بر قطر AA' از نقطه F ، دایره به قطر AA' را در نقطه M ، قطع می‌کند. اندازه پاره خط AM ، کدام است؟

(۱) ۷

(۲) $۲\sqrt{۷}$ (۳) $۲\sqrt{۶}$ (۴) $۲\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴۵

دایره‌های $x^2 + y^2 + ۲y = ۳$ و $x^2 + y^2 + ۲x = ۳$ متقاطع‌اند. معادله وتر مشترک این دو دایره کدام است؟

(۱) $x = y$ (۲) $x = ۱ + y$ (۳) $x = -y$ (۴) $x = ۱ - y$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۴۶

در یک بیضی به کانون‌های $(۲, -۱)$ و $(۲, ۷)$ ، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

(۱) $\frac{۰}{۶}$ (۲) $\frac{۰}{۶۴}$ (۳) $\frac{۰}{۷۵}$ (۴) $\frac{۰}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۴۷

در یک بیضی به اقطار $2\sqrt{5}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطه M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۶
(۳) ۱۸
(۴) ۲۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۴۸

فرض کنید خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ قطرهای یک دایره و خط $4x + 3y + 5 = 0$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصله نقطه M (۴, -۲) از دایره، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3} - 1$
(۲) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(۴) $\sqrt{5} - 2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۴۹

دایره‌ای بر محور xها و خط به معادله $3x + 4y = 0$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطه مشترک آن با محور xها با کدام طول است؟

- (۱) ۱
(۲) $1/5$
(۳) ۲
(۴) $2/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۵۰

به ازای کدام مقدار a، زاویه بین خط مماس بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$ و خط به معادله $3x + 2y = a$ که از مرکز دایره می‌گذرد، در نقطه تلاقی آنها ۹۰ درجه است؟ (با تغییر)

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۵۱

کوچک‌ترین دایره گذرا بر دو نقطه A (۲, ۵) و B (-۴, ۱)، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) ۱, -۳
(۲) ۰, -۳
(۳) ۲, -۱
(۴) ۳, -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵۲

دایره‌ای به مرکز (۱, ۳) بر روی خط راست $5x + 12y = 15$ ، وترى به طول $2\sqrt{21}$ ، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور xها، وترى با کدام اندازه جدا می‌کند؟

- (۱) $2\sqrt{6}$
(۲) ۶
(۳) $2\sqrt{15}$
(۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۳

حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC با ضلع‌های قائم AB و AC ، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و $2\sqrt{6}$ واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB ، کدام است؟

(۲) 70π

(۱) 60π

(۴) 80π

(۳) 75π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵۴

به ازای کدام مقدار a دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط به معادله $x + 3y = 0$ مماس است؟

(۲) $\frac{5}{2}$

(۱) $\frac{3}{2}$

(۴) ۵

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۵۵

دایره به مرکز $(2, 0)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله $y = 1$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

(۲) 4 و 0

(۱) 3 و 1

(۴) $2 + \sqrt{2}$ و $2 - \sqrt{2}$

(۳) $\frac{5}{2}$ و $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۵۶

شعاع دایره‌ای که از دو نقطه $(0, 0)$ و $(3, 1)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله $y = 2x$ باشد، کدام است؟

(۲) $\sqrt{5}$

(۱) $2\sqrt{2}$

(۴) $\sqrt{13}$

(۳) $\sqrt{10}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۵۷

دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$ و $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

(۲) مماس داخل

(۱) مماس خارج

(۴) متخارج

(۳) متقاطع

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۵۸

دایره‌ای از دو نقطه $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ گذشته و بر خط به معادله $y = 1$ مماس است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

(۲) $\sqrt{5}$

(۱) $\frac{3}{2}$

(۴) ۳

(۳) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۵۹

هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه $(-2, 1)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادله $y = x - 1$ مماس است. شعاع دایره کدام می‌باشد؟

- (۱) ۲
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) ۳
(۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۶۰

دایره‌ای از نقطه $(-1, 2)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگ‌تر کدام می‌باشد؟

- (۱) ۸
(۲) ۱۰
(۳) ۱۲
(۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۶۱

به ازای کدام مقدار m ، خط به معادله $y = mx + 2$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مماس است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ و ۰
(۲) $\frac{4}{3}$ و ۰
(۳) $-\frac{4}{3}$ و ۱
(۴) $\frac{2}{3}$ و ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۶۲

شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(2, 1)$ و $(-2, 4)$ و $(0, 0)$ می‌گذرد، کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) $2/5$
(۳) ۳
(۴) $3/5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۶۳

شعاع دایره به مرکز $(-2, 2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ ، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
(۲) ۳
(۳) $2\sqrt{3}$
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۶۴

از داخل یک استوانه قائم توپُر، به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعده مخروط به فاصله ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

- (۱) $10/36\pi$
(۲) $11/28\pi$
(۳) $12/56\pi$
(۴) $13/44\pi$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶۵

نقطه $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ وتری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) $3, -5$ (۲) $2, -4$
 (۳) $-1 \pm \sqrt{2}$ (۴) $-1 \pm \sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۶۶

مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیه اول است. اگر این دایره از نقطه $A(6, 3)$ گذشته و بر خط به معادله $y = 2x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{6}$
 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{10}$

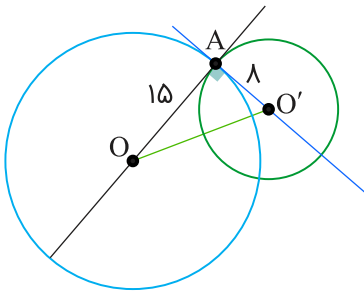
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

منبع:

گزینه ۱

۱

می‌دانیم خط مماس بر شعاع گذرنده از نقطه تماس، عمود است؛ پس مرکزهای دایره‌ها روی خطوط مماس قرار دارند.

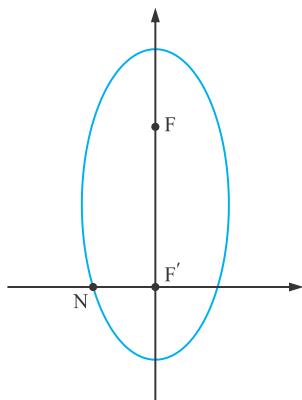


حال داریم:

$$\triangle OAO' : \text{فیتاغورس} \Rightarrow OO' = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

حروف داده شده را عوض می کنیم و کانون ها را $F(0, x)$ و $F'(0, 0)$ در نظر می گیریم. طبق داده مسئله، $N(-3, 0)$ است. پس:



$$\frac{b^2}{a} = |NF'| = 3 \Rightarrow b^2 = 3a$$

$$FF' = 2c = m \Rightarrow c = \frac{m}{2}$$

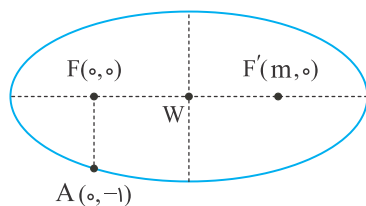
$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = c\sqrt{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2c^2 = 3a + c^2 \Rightarrow c^2 = 3c\sqrt{2} \Rightarrow c = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = 6 \Rightarrow b^2 = 18 \Rightarrow b = 3\sqrt{2} \Rightarrow 2b = 6\sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

اسامی داده‌شده را تغییر داده‌ایم.



$$FA = \frac{b^2}{a} = 1 \Rightarrow b^2 = a$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{5} \xrightarrow{b^2=a} 1 - \frac{1}{a} = \frac{4}{5}$$

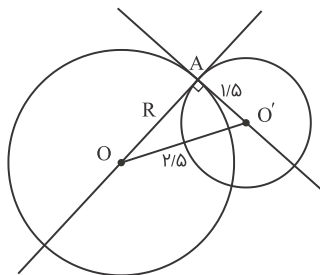
$$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{5} \Rightarrow a = 5$$

$$2c = m \Rightarrow c = \frac{m}{2} \Rightarrow \frac{\frac{m^2}{4}}{25} = \frac{4}{5} \Rightarrow m^2 = 5 \times 16$$

$$\Rightarrow m = 4\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

می‌دانیم خط مماس بر دایره، بر شعاع گذرنده از نقطه تماس، عمود است؛ پس مرکزهای دایره‌ها، روی خطوط مماس قرار دارند.

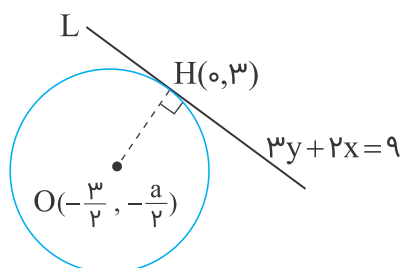


حال، داریم:

$$\Delta OAO' : \text{فیثاغورس} \quad R^2 + 1/5^2 = 2/5^2$$

$$\Rightarrow R^2 + 2/25 = 4/25 \Rightarrow R^2 = 2/25 \Rightarrow R = 2/5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳



OH بر خط L عمود است.

$$\frac{-\frac{a}{2} - 3}{-\frac{3}{2} - 0} \times \frac{-2}{3} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{2} + 3}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + 3 = \frac{9}{2} \xrightarrow{\times 2}$$

$$2a + 12 = 9 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} = -1/5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

طبق فرض، کانون‌های این بیضی، نقاط $F(3, 0)$ و $F'(-3, 0)$ می‌باشند. بنابراین:

$$FF' = 3 - (-3) = 6 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \quad (1)$$

$$e = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \xrightarrow{(1)} \frac{3}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 9 \quad (2)$$

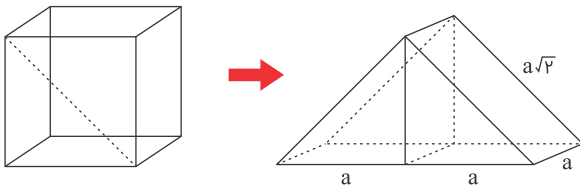
$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{(1), (2)} 81 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 72 \Rightarrow b = 6\sqrt{2}$$

$$\text{طول قطر کوچک} = 2b = 2(6\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}$$

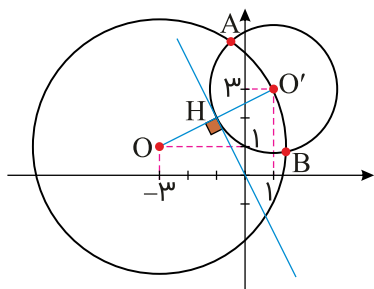
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

مساحت کل منشور حاصل برابر است با:

$$S = 2(a \times a\sqrt{2} + a \times a + 2 \times \frac{a^2}{2}) = 2(a^2\sqrt{2} + 2a^2) = a^2(4 + 2\sqrt{2})$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰



$$C(O, r) : O(-3, 1)$$

$$OH = O'H = r' = \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{5} \Rightarrow r = 2\sqrt{5} \quad (*)$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y = a$$

$$r = \frac{\sqrt{36 + 4 + 4a}}{2} = \frac{\sqrt{40 + 4a}}{2} = \frac{2\sqrt{10 + a}}{2} = \sqrt{10 + a} \quad (**)$$

$$2\sqrt{5} = \sqrt{10 + a} \Rightarrow 10 + a = 20 \Rightarrow a = 10$$

$$O(-3, 1) \xrightarrow[\text{محور تقارن}]{y = -2x} O'(1, 3), \quad r' = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow C' : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$$

معادله دو دایره C و C' را برابر قرار می‌دهیم تا طول نقاط برخورد به دست آید:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 - 5$$

$$\Rightarrow 4x + 4y = 15 \Rightarrow y = -2x + \frac{15}{4}$$

این رابطه را در معادله دایره C' قرار می‌دهیم:

$$(x - 1)^2 + \left(-2x + \frac{15}{4} - 3\right)^2 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 5x - \frac{55}{16} = 0 \Rightarrow x_A + x_B = -\frac{b}{a} = +\frac{5}{5} = 1$$

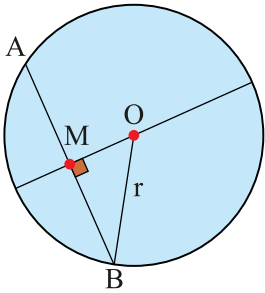
$$x^2 + y^2 - 3x - 5y + \frac{1}{2} = 0$$

نقطه $(-1, \frac{5}{2})$ را در معادله دایره جایگذاری می‌کنیم:

$$(-1)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3(-1) - 5\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{25}{4} + 3 - \frac{25}{2} + \frac{1}{2} = \frac{-7}{4}$$

$$\text{طول کوتاه‌ترین وتر} = 2\sqrt{\frac{7}{4}} = \sqrt{7}$$

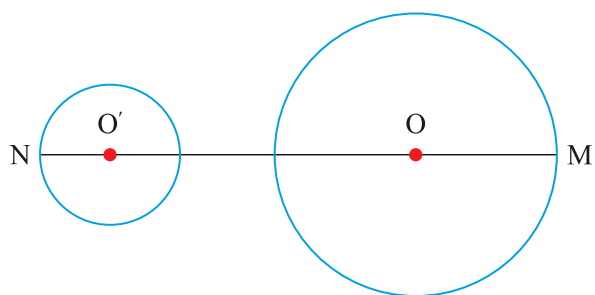
برای به دست آوردن طول کوتاه‌ترین وتر از روش دیگری نیز می‌توان استفاده کرد:



$$O\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), M\left(-1, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow OM = \frac{5}{2}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 25 - 2} = \frac{1}{2}\sqrt{32} \Rightarrow MB = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow AB = 2 \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$$



$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - a = 0 \Rightarrow O(1, -1), r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 4a} = \sqrt{1 + a}$$

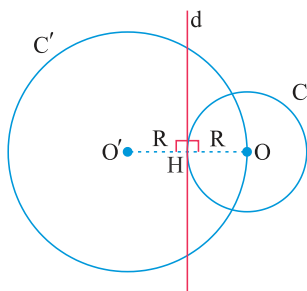
$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9a = 0 \\ \Rightarrow O'(-2, 3), r' = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 - 36a} = \sqrt{5 - 9a}$$

$$OO' = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4$$

$$MN = 4 + \sqrt{1 + a} + \sqrt{5 - 9a} = 8 \Rightarrow a = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

دایره کوچک را $C(O, R)$ و دایره بزرگ را $C'(O', 2R)$ می‌نامیم. حال داریم:



$$C: x^2 + y^2 + 6x - 2y - r = 0 \Rightarrow O = (-3, 1), R = \sqrt{9 + 1 + r} = \sqrt{10 + r}$$

چون خط $d: x - y = 0$ بر دایره C مماس است، فاصله مرکز دایره تا خط d ، برابر شعاع دایره است و داریم:

$$R = |OH| = \frac{|-3 - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow C: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 8$$

چون خط d (نیمساز ربع اول و سوم) عمودمنصف OO' است، O' بازتاب O نسبت به d (نیمساز ربع اول و سوم) می‌باشد، پس $O' = (1, -3)$ و معادله دایره C' به صورت $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 32$ است. حال معادله‌های دو دایره را از هم کم می‌کنیم تا معادله وتر مشترک آنها به دست آید:

$$\left. \begin{array}{l} C: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ C': (x-1)^2 + (y+3)^2 = 32 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} \text{وتر مشترک: } x - y = -3$$

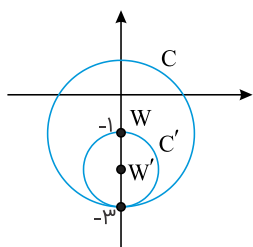
$$\Rightarrow \text{وتر مشترک: } y = x + 3$$

در پایان، محل برخورد وتر مشترک و دایره C را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ (x+3)^2 + (y-1)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow (x+3)^2 + (x+2)^2 = 8$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 10x + 5 = 0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{5}{2}$$

$$C: x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow W(0, -1), r = 2$$

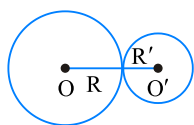


درواقع چون دایره C از $(0, -3)$ عبور می‌کند، اگر دایره جدید بخواند با دایره قبلی مماس داخل باشد و از این نقطه نیز بگذرد تنها حالت آن است که نقطه تماس همین نقطه باشد. در نتیجه $W'(0, -2)$ و $r' = 1$ خواهد بود.

$$C': (x - 0)^2 + (y + 2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

دو دایره با مرکزهای O و O' و شعاعهای R و R' مماس بیرون‌اند اگر و تنها اگر داشته باشیم $|OO'| = R + R'$. در آغاز با دسته‌بندی معادله‌ها، مرکز و شعاع هر دایره را می‌یابیم:



$$x^2 + y^2 + 4x = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} O = (-2, 0) \\ R = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + a = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 - a \Rightarrow \begin{cases} O' = (1, -2) \\ R' = \sqrt{5 - a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |OO'| = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (0 + 2)^2} = 5 \\ R + R' = 2 + \sqrt{5 - a} \end{cases} \xrightarrow{|OO'| = R + R'} 5 = 2 + \sqrt{5 - a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5 - a} = 3 \Rightarrow 5 - a = 9 \Rightarrow a = -4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

شعاع و مرکز دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ عبارت‌اند از:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

مرکز : $O'(2, -1)$ ، شعاع : $R' = 3$

نقطه‌ای که تمامی خطوط قائم بر دایره C از آن عبور می‌کنند، مرکز این دایره است، پس $O(8, 7)$ مرکز دایره C است.

$$d = OO' = \sqrt{(2 - 8)^2 + (-1 - 7)^2} = 10$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d = R + R' \Rightarrow 10 = R + 3 \Rightarrow R = 7$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

گام اول

در یک دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، مختصات مرکز دایره $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار $R_1 + R_2$ و $|R_1 - R_2|$ مقایسه می‌کنیم، بنابراین لازم است ابتدا مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست آوریم.

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_1\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{4}{2}\right) \Rightarrow O_1(2, -2)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_1 = \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-1)} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_2\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{8}{2}\right) \Rightarrow O_2(2, -4)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_2 = \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - 19} = \sqrt{4 + 16 - 19} = 1$$

طول خط‌المركزین دو دایره برابر است با:

$$O_1O_2 = \sqrt{(2-2)^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{0 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

همچنین داریم:

$$|R_1 - R_2| = |3 - 1| = 2$$

بنابراین $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$ است، پس دو دایره مماس داخل هستند.

گام اول

در یک دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، نقطه $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار $|R_1 - R_2|$ و $R_1 + R_2$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_1\left(-\frac{-2}{1}, -\frac{4}{1}\right) \Rightarrow O_1(2, -4)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{2}{1}\right)^2 + \left(\frac{4}{1}\right)^2 + 13} = \sqrt{4 + 16 + 13} = \sqrt{33} = \sqrt{11} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_2\left(-\frac{2}{1}, -\frac{0}{1}\right) \Rightarrow O_2(-1, 0)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{1}\right)^2 + 0 + 1} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

بنابراین داریم:

$$O_1O_2 = \sqrt{(-1-2)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$R_1 + R_2 = 3\sqrt{2} + \sqrt{5} = 4\sqrt{2}$$

$$|R_1 - R_2| = |3\sqrt{2} - \sqrt{5}| = 2\sqrt{2}$$

بنابراین $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$ است و دو دایره نسبت به هم مماس داخل هستند.

دایره اول:

$$x^2 + y^2 + 2y - 4x = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

$$O_1(2, -1) \quad , \quad r_1 = \sqrt{5}$$

دایره دوم:

$$x^2 + y^2 - 2y = 2 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 3$$

$$O_2(0, 1) \quad , \quad r_2 = \sqrt{3}$$

$$O_1O_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow O_1O_2 \simeq 2/1$$

$$r_1 + r_2 \simeq 3/1$$

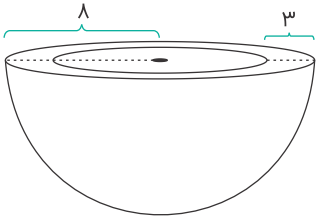
$$|r_1 - r_2| = 0/5$$

$$\Rightarrow 0/5 < O_1O_2 < 3/1$$

پس دو دایره متقاطع‌اند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

طبق توضیحات صورت سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



برای محاسبه سطح کل این ظرف کافی است مساحت نیم‌کره درونی، نیم‌کره بیرونی و مساحت سطح مقطع ظرف را به دست آوریم؛ دقت کنید که سطح مقطع ظرف به‌صورت دایره‌ای به شعاع ۸ است که دایره دیگری به شعاع ۵ از آن کسر شده است.

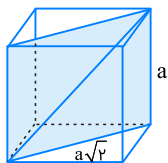
$$S_{\text{نیمکره بیرونی}} = \frac{1}{2}(4\pi \times 64) = 2\pi \times 64 = 128\pi$$

$$S_{\text{نیمکره درونی}} = \frac{1}{2}(4\pi \times 25) = 2\pi \times 25 = 50\pi$$

$$S_{\text{سطح مقطع}} = \pi(64 - 25) = 39\pi$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{نیمکره بیرونی}} + S_{\text{نیمکره درونی}} + S_{\text{سطح مقطع}} = 128\pi + 50\pi + 39\pi = 217\pi$$

همان‌طوری که در شکل زیر نیز مشخص است، سطح مقطع یک مکعب به طول یال a و صفحه قطری آن، مستطیلی به طول اضلاع a و $a\sqrt{2}$ است. باتوجه به مساحت مستطیل، اندازه a را محاسبه می‌کنیم.



بنابراین می‌توان نوشت:

$$a(a\sqrt{2}) = 9\sqrt{2} \Rightarrow a^2\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

قطر مکعب به طول یال a برابر $a\sqrt{3}$ است (با دو بار استفاده از قضیه فیثاغورس ثابت می‌شود)، پس داریم:

$$a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{(0,0) \text{ را صدق می‌دهیم}} c = 0$$

$$\xrightarrow{(2,1) \text{ را صدق می‌دهیم}} 4 + 1 + 2a + b = 0$$

$$\xrightarrow{(1,-2) \text{ را صدق می‌دهیم}} 1 + 4 + a - 2b = 0$$

اکنون با معلوم بودن مقادیر a ، b و c شعاع دایره برابر است با:

$$\xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4a + 2b = -10 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \Rightarrow 5a = -15 \Rightarrow a = -3, b = 1$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 - 4(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) دایره محور x ها را در دو نقطه به طول $x = ۱$ و $x = ۳$ قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط $A(۱, ۰)$ و $B(۳, ۰)$ روی دایره موردنظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط $y = x$) است؛ بنابراین مرکز دایره را به صورت $O(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

چون نقاط A و B روی دایره قرار دارند پس فاصله آنها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \Rightarrow \sqrt{(\alpha - ۱)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(\alpha - ۳)^2 + \alpha^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } ۲} (\alpha - ۱)^2 + \alpha^2 = (\alpha - ۳)^2 + \alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - ۲\alpha + ۱ = \alpha^2 - ۶\alpha + ۹ \Rightarrow ۴\alpha = ۸ \Rightarrow \alpha = ۲$$

بنابراین مرکز دایره نقطه $O(۲, ۲)$ می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(۲ - ۱)^2 + ۲^2} = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

گام اول

معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

سه نقطه A، B و C روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقاط در معادله دایره صدق می‌کند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{A(-1, 0)} (-1)^2 + 0^2 + a(-1) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 1 - a + c = 0 \Rightarrow a - c = 1 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{B(3, 0)} 3^2 + 0^2 + a(3) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 9 + 3a + c = 0 \Rightarrow 3a + c = -9 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{C(0, -3)} 0^2 + (-3)^2 + a(0) + b(-3) + c = 0 \Rightarrow 9 - 3b + c = 0 \Rightarrow c - 3b = -9 \quad (III)$$

بنابراین سه معادله و سه مجهول داریم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو معادله I و II فقط شامل دو مجهول a و c است، پس با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار a و c را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 3a + c = -9 \end{cases} \xrightarrow{+} 4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

$$a - c = 1 \xrightarrow{a=-2} c = -2 - 1 = -3$$

با جایگذاری $c = -3$ در معادله (III) مقدار b را هم حساب می‌کنیم.

$$c - 3b = -9 \xrightarrow{c=-3} -3 - 3b = -9 \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2$$

اکنون باتوجه به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3} = \sqrt{1 + 1 + 3} = \sqrt{5}$$

گام اول

الف) معادله استاندارد یک دایره به مرکز (α, β) و شعاع R به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ است.
 ب) معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است.

گام دوم

باتوجه به معادله گسترده نوشته شده در گام اول، ضریب x^2 و y^2 باید باهم برابر و برابر با یک باشد، بنابراین مقادیر a را به گونه ای می یابیم که ضریب x^2 و y^2 باهم برابر شوند؛ در نتیجه:

$$a^2 - 4 = 4 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$$

از طرفی معادله این دایره را باید بتوان به صورت استاندارد نوشت، بنابراین دو مقدار $a = +2\sqrt{2}$ و $a = -2\sqrt{2}$ را در معادله دایره جایگذاری می کنیم تا مقدار صحیح را تشخیص دهیم.

$$\begin{aligned} a = 2\sqrt{2} : 2x^2 + (4 - 4)y^2 + 4y + 8 &= 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 8 = 0 \\ \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) + 6 &= 0 \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y + 1)^2 + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\div 2} (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = -3 \quad \text{غ ق ق}$$

رابطه به دست آمده همواره نادرست است؛ زیرا عبارت سمت چپ تساوی همواره نامنفی می باشد ولی مساوی با یک عدد منفی شده است.

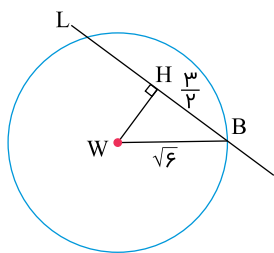
$$\begin{aligned} a = -2\sqrt{2} : 2x^2 + (4 - 4)y^2 + 4y - 8 &= 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 8 = 0 \\ \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) - 10 &= 0 \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y + 1)^2 - 10 = 0 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\div 2} (x - 0)^2 + (y + 1)^2 - 5 = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

به ازای $a = -2\sqrt{2}$ ، معادله دایره ای به مرکز $(0, -1)$ و شعاع $R = \sqrt{5}$ داریم.

مرکز و شعاع دایره را حساب می‌کنیم:

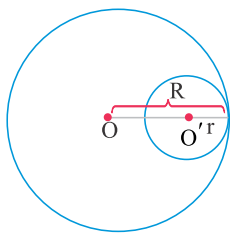
$$W(2, -1) \quad , \quad r = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$



$$|WH| = \frac{|-2 + 2 - a|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|a|}{\sqrt{5}}$$

$$\triangle WHB : \epsilon = \frac{9}{4} + \frac{a^2}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{5} = \frac{15}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{75}{4} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ a_2 = -\frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow |a_1 - a_2| = 5\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲



شعاع دایره بزرگ را R و شعاع دایره کوچک را r فرض می‌کنیم. چون دایره‌ها مماس داخل‌اند، داریم:

$$\text{طول خط‌المركزين} = R - r \xrightarrow{\text{فرض سوال}} R - r = 3/5 = \frac{3}{5} \quad (*)$$

$$S_{\text{ناحیه بین}} = 21\pi \Rightarrow S_{\text{دایره بزرگ}} - S_{\text{دایره کوچک}} = 21\pi$$

$$\Rightarrow \pi R^2 - \pi r^2 = 21\pi \Rightarrow R^2 - r^2 = 21 \Rightarrow (R - r)(R + r) = 21$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{3}{5}(R + r) = 21 \Rightarrow R + r = 6 \xrightarrow{(*)} \begin{cases} R + r = 6 \\ R - r = 3/5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 2r = 2/5 \Rightarrow r = 1/25$$

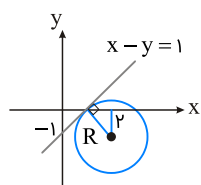
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصله یک نقطه با مختصات (x_0, y_0) از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

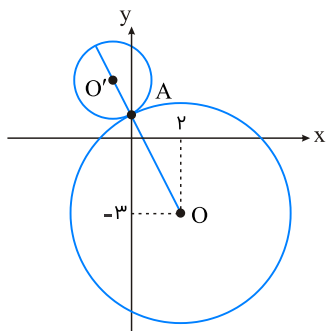
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$



$$\text{معادله دایره: } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$



مطابق شکل، مراکز دو دایره مماس خارج و محل تماس دو دایره، روی یک خط راست قرار دارند و مرکز دایره C' در ناحیه دوم دستگاه مختصات است. می‌دانیم قائم‌های رسم‌شده بر یک دایره از مرکز آن دایره عبور می‌کنند، پس با فرض $O = (2, -3)$ و $A = (0, 1)$ داریم:

$$m_{OA} = \frac{1 - (-3)}{0 - 2} = -2$$

$$OA \text{ خط : معادله } y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1$$

در بین گزینه‌ها، تنها نقطه $(-1, 3)$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات است و در معادله خط OA صدق می‌کند. با فرض $O' = (-1, 3)$ داریم:

$$O'A = \sqrt{(0 + 1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{5}$$

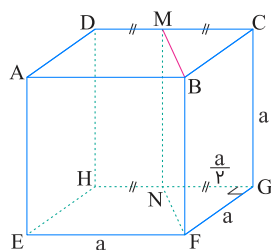
یال BF از مکعب زیر را در نظر می‌گیریم. نقطه موردنظر نمی‌تواند وسط یال‌های AE, FG, EF, BC و CG باشد، زیرا در این صورت صفحه گذرنده از BF و این نقطه، بر مکعب مماس می‌شود. ضمناً این نقطه نمی‌تواند وسط DH باشد، زیرا در این صورت، صفحه گذرنده از AB و این نقطه، صفحه قطری مکعب خواهد بود و حجم آن را نصف می‌کند که خلاف فرض است. پس فرض می‌کنیم نقطه موردنظر، نقطه M وسط یال CD است. (دقت کنید که برای یال‌های AD, EH, GH هم به همان نسبت یکسان، حجم‌ها تقسیم می‌شد). نقطه M را به نقطه N وسط HG وصل می‌کنیم. پس $MN \parallel BF$ و در نتیجه صفحه گذرنده از BF و M ، از نقطه N هم می‌گذرد و مکعب را به دو منشور تقسیم می‌کند. حال اگر حجم کوچک‌تر را V_1 ، حجم بزرگ‌تر را V_2 و حجم مکعب را V فرض کنیم، داریم:

$$V = a^3$$

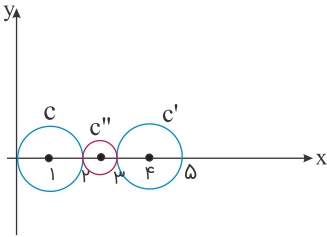
$$V_1 = S_{\triangle GFN} \times CG = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{a}{2}\right)(a) = \frac{a^3}{4}$$

$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{3a^3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$$



مرکز و شعاع دو دایره را یافته و آن‌ها را رسم می‌کنیم.



$$C : x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow O = (1, 0), R = \sqrt{\frac{4 + 0 + 0}{4}} = 1$$

$$C' : x^2 + y^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow O' = (4, 0), R' = \sqrt{\frac{64 + 0 - 4(16)}{4}} = 1$$

مطابق شکل، دایره موردنظر، دایره C'' به مرکز $O''(\frac{5}{2}, 0)$ و شعاع $R'' = \frac{1}{2}$ است که معادله آن را می‌یابیم:

$$C'' : (x - \frac{5}{2})^2 + (y - 0)^2 = (\frac{1}{2})^2$$

$$\Rightarrow C'' : x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow C'' : x^2 + y^2 - 5x + 6 = 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

گام اول

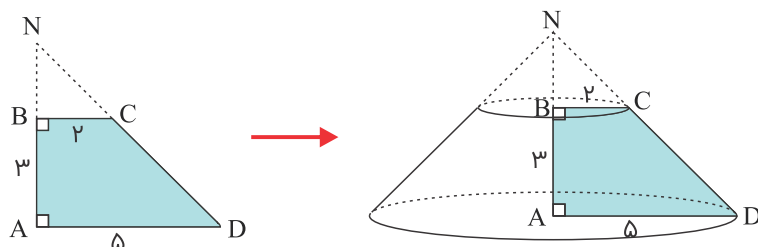
الف) در یک دوزنقه قائم الزاویه با امتداد دادن اضلاع غیرقاعده‌ای، یک مثلث قائم الزاویه به وجود می‌آید.

ب) از دوران مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش، یک مخروط ایجاد می‌شود.

ج) حجم مخروط از رابطه $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ به دست می‌آید که r شعاع قاعده و h ارتفاع آن است.

گام دوم

دوزنقه $ABCD$ را رسم می‌کنیم. نقطه تقاطع امتداد دو ضلع AB و CD را N می‌نامیم. دو مثلث $\triangle NAD$ و $\triangle NBC$ قائم الزاویه هستند. برای محاسبه حجم حاصل از دوران دوزنقه حول ضلع قائم آن، کافی است حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\triangle NBC$ حول ضلع NB را از حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\triangle NAD$ حول ضلع NA کم کنیم.



باتوجه به اینکه $BC \parallel AD$ است، طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{BN}{BN+3} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5BN = 2BN + 6 \Rightarrow 3BN = 6 \Rightarrow BN = 2$$

بنابراین:

$$V_{\text{دوران دوزنقه}} = V_{\triangle NAD} - V_{\triangle NBC}$$

$$V_{\text{دوران دوزنقه}} = \frac{1}{3}\pi(5)^2 \times 5 - \frac{1}{3}\pi(2)^2 \times 2 = \frac{1}{3}\pi(125 - 8) = \frac{117}{3}\pi = 39\pi$$

$$\begin{cases} c = 12 \\ 2b = 18 \Rightarrow b = 9 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 81 + 144 = 225$$

$$\Rightarrow a = 15 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0.8$$

ابتدا با دادن دو مقدار دلخواه $m = 2$ و $m = -1$ به معادله قطره‌ای دایره، معادله دو تا از قطرهای را یافته و سپس آن‌ها را قطع می‌دهیم تا مرکز دایره به دست آید:

$$\left. \begin{array}{l} m = 2 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \\ m = -1 \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow O(-2, 2)$$

حال چون نقطه $A(-1, 1)$ روی دایره است، فاصله آن تا مرکز دایره، برابر با شعاع دایره است. بنابراین:

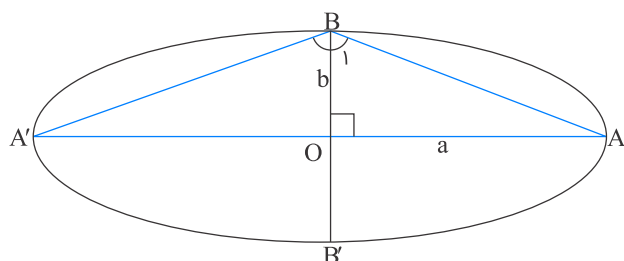
$$R = |OA| = \sqrt{(-1+2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi R = 2\pi(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} \\ &\Rightarrow 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{3} \quad (*) \end{aligned}$$

حال باتوجه به شکل زیر، داریم:



$$\triangle OAB : \tan \hat{B}_1 = \frac{a}{b} \xrightarrow{(*)} \tan \hat{B}_1 = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} = 2\hat{B}_1 = 120^\circ$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

چون دایره بر دو خط موازی $y = 2x + 10$ و $y = 2x$ مماس است؛ پس مرکز آن روی خط $y = 2x + 5$ (وسط این دو خط) قرار دارد و شعاع دایره برابر نصف فاصله این دو خط است.

$$\text{فاصله دو خط} = \frac{|10 - 0|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow R = \sqrt{5}$$

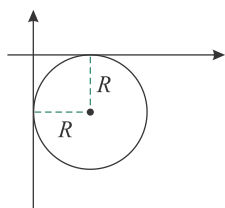
چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس فاصله مبدأ از مرکز دایره برابر R است.

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{x^2 + (2x + 5)^2} \Rightarrow \sqrt{5} = \sqrt{5x^2 + 20x + 25} \\ \Rightarrow 5(x^2 + 4x + 4) &= 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = 2(-2) + 5 = 1 \\ \text{مرکز دایره} &= (-2, 1) \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) شکل دایره‌ای به شعاع R که بر هر دو محور مختصات مماس باشد و از نقطه $(2, -9)$ نیز عبور کند به صورت زیر است:



ب) معادله دایره‌ای به مرکز (x_0, y_0) و به شعاع R برابر است با:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

گام دوم

با توجه به شکل رسم شده در قسمت (الف) از گام اول، مختصات مرکز این دایره برابر $(R, -R)$ است. طبق قسمت (ب) از گام اول، معادله این دایره برابر است با:

$$(x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$$

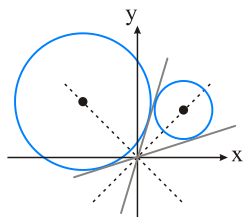
چون هر دو دایره از نقطه $(2, -9)$ عبور می‌کنند، بنابراین مختصات این نقطه در معادله آن‌ها صدق می‌کند پس داریم:

$$\xrightarrow{x=2, y=-9} (2 - R)^2 + (-9 + R)^2 = R^2 \Rightarrow 4 - 4R + R^2 + 81 - 18R + R^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 22R + 85 = 0 \Rightarrow (R - 17)(R - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 17 \\ R = 5 \end{cases}$$

بنابراین شعاع دایره بزرگتر برابر ۱۷ است.

مرکز دایره بر روی نیمساز زاویه بین دو خط قرار دارد. باتوجه به شکل، مرکز دایره کوچکتر روی $y = x$ و مرکز دایره بزرگتر روی $y = -x$ قرار دارد.



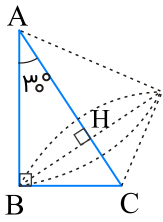
$$M(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$$

شعاع دایره برابر با فاصله مرکز آن از خط $2y - x = 0$ است.

$$R = \frac{|4\sqrt{5} - 2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

مطابق شکل از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC حول وتر AC ، دو مخروط پدید می‌آید که ارتفاع وارد بر وتر (BH) ، شعاع قاعده این دو مخروط است.

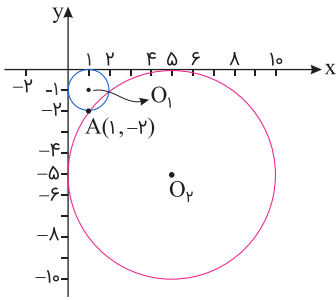


طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° در مثلث قائم‌الزاویه، نصف طول وتر است. پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\begin{aligned} AC = 8 &\Rightarrow BC = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \\ BC^2 &= AC \cdot CH \Rightarrow 16 = 8 \times CH \\ \Rightarrow CH &= 2 \Rightarrow AH = 8 - 2 = 6 \\ BH^2 &= AH \cdot CH = 2 \times 6 = 12 \end{aligned}$$

مجموع حجم دو مخروط برابر است با:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi(BH)^2 \times AH + \frac{1}{3}\pi(BH)^2 \times CH \\ &= \frac{\pi}{3} \times 12 \times 6 + \frac{\pi}{3} \times 12 \times 2 \\ &= 24\pi + 8\pi = 32\pi \end{aligned}$$



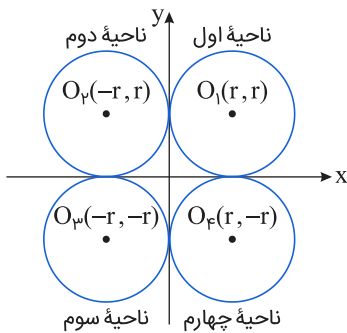
شکل به زیبایی به ما نشان می‌دهد که ۲ تا دایره داریم که بر محورهای مختصات مماس هستند و از نقطه $A(1, -2)$ می‌گذرند. به علاوه مرکز دایره‌ها به صورت $O(r, -r)$ است؛ چراکه وقتی دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس است، فاصله مرکز آن تا محورهای برابر با شعاع می‌شود؛ پس فهمیدیم این دایره‌ها به مرکز $O(r, -r)$ و شعاع r هستند. معادله آن‌ها به این صورت است:

$$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2 \xrightarrow{(1, -2)} (1 - r)^2 + (-2 + r)^2 = r^2$$

$$1 - 2r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (r - 1)(r - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = 5 \end{cases}$$

همان‌طوری که انتظار داشتیم، وقتی به روش جبری هم سؤال را حل کردیم، دو مقدار برای r به دست آوردیم. نکته: اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات در ناحیه‌های اول تا چهارم مماس باشد، مختصات مرکز آن به صورت زیر است:



باتوجه به شکل، قطر نیم‌دایره بر طول مستطیل منطبق شده است. حال داریم:

نکته ۱: از دوران یک مستطیل حول طول خود یک استوانه به ارتفاعی برابر با طول مستطیل و شعاع قاعده‌ای برابر با عرض آن پدید می‌آید.

نکته ۲: از دوران یک نیم‌دایره حول قطر آن، یک کره با همان شعاع پدید می‌آید.

بنابراین باتوجه به این دو نکته، شکل ما یک استوانه می‌شود که از درون آن یک کره به شعاع $\frac{۳}{۲}$ خالی شده است، حجم جسم حاصل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{رنگی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi(۲)^۲ \times ۵ - \frac{۴}{۳}\pi\left(\frac{۳}{۲}\right)^۳ = ۲۰\pi - \frac{۹}{۲}\pi = ۱۵/۵\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

$$\sqrt{(x-۳)^۲ + (y-۶)^۲} = ۲\sqrt{x^۲ + y^۲}$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۶x + ۹ + y^۲ - ۱۲y + ۳۶ = ۴x^۲ + ۴y^۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۳y^۲ + ۶x + ۱۲y - ۴۵ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۳} x^۲ + y^۲ + ۲x + ۴y - ۱۵ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۲۰ \Rightarrow O(-۱, -۲)$$

معادله فوق، معادله یک دایره است که بزرگ‌ترین وتر همان قطر است:

$$r = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow ۲r = ۴\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

در آغاز معادله دایره را به صورت استاندارد می نویسیم، برای این منظور باید بنویسیم:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1 - 1) + (y^2 + 4y + 4 - 4) = 4$$

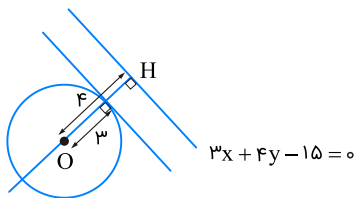
$$\xrightarrow{\text{دسته بندی جمله ها}} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1+4+4=9$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{9} = 3, \quad O = (1, -2)$$

فاصله هر نقطه مانند (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$ که $a^2 + b^2 \neq 0$ برابر است با $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. پس فاصله مرکز دایره $O = (1, -2)$ تا خط $3x + 4y - 15 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|3(1) + 4(-2) - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

فاصله یک نقطه تا یک خط برابر با اندازه عمودی است که از آن نقطه بر آن خط رسم می شود و هر خط گذرنده از مرکز یک دایره، قطری از آن است، پس فاصله مرکز تا خط مورد نظر، برابر با طول پاره خط عمودی از قطر است که بین مرکز و آن خط محصور است. از آنجاکه هر قطر دایره، در نقطه تماس بر آن عمود است، پس کوتاه ترین فاصله نقاط دایره تا خط مورد نظر طبق شکل زیر، برابر می شود با $d_{\min} = 4 - 3 = 1$.



طبق فرض، داریم:

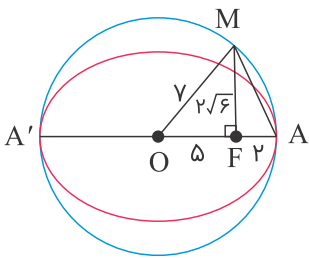
$$\left. \begin{aligned} AA' = 2a = 14 \Rightarrow a = 7 \\ BB' = 2b = 4\sqrt{6} \Rightarrow b = 2\sqrt{6} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} 49 = 24 + c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow OF = 5 \xrightarrow{OA=a=7} AF = 7 - 5 = 2$$

OM شعاع دایره است $\Rightarrow OM = OA = a = 7$

$$\triangle OFM : \text{ فیثاغورس } \Rightarrow FM^2 = OM^2 - OF^2 = 49 - 25 = 24 \Rightarrow FM = 2\sqrt{6}$$

$$\triangle AFM : \text{ فیثاغورس } \Rightarrow AM = \sqrt{FM^2 + FA^2} = \sqrt{24 + 4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

معادله گسترده دو دایره را از هم کم می‌کنیم تا معادله وتر مشترک به دست آید:

$$(x^2 + y^2 + 2x - 3) - (x^2 + y^2 + 2y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \text{وتر مشترک} : 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$$

معادله درجه اولی که از کم کردن معادله دو دایره به دست می‌آید، حتما معادله وتر مشترک است، چون هم یک معادله درجه اول است و هم (x, y) این خط در هر دو دایره صدق می‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

فاصلهٔ کانون‌های $F(2, 7)$ و $F'(2, -1)$ برابر $2c$ است.

$$2c = |FF'| = |7 - (-1)| = 8 \Rightarrow c = 4$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

در بیضی رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.

$$a^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

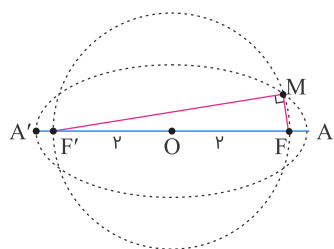
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

باتوجه به معلومات سؤال، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{طول قطر بزرگ} &= 2a = 2\sqrt{5} \Rightarrow a = \sqrt{5} \\ \text{طول قطر کوچک} &= 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} c = 2$$

پس $OF = OF' = 2$ و چون طول شعاع دایره هم ۲ واحد است، نقاط F و F' روی دایره‌اند. پس FF' قطر دایره است و چون زاویهٔ FMF' محاطی و روبه‌رو به قطر می‌باشد، قائمه است و داریم:

$$\triangle MF'F : \text{فیتاغورس} \Rightarrow MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = 4^2 = 16$$

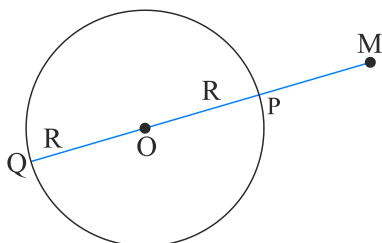


کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

نکته: نقطه M و دایره $C(O, R)$ مفروض‌اند. در این صورت:

$$\text{کمترین فاصله } M \text{ از دایره} = MP = |OM - R|$$

$$\text{بیشترین فاصله } M \text{ از دایره} = MQ = OM + R$$



ابتدا محل برخورد قطرهای را می‌یابیم تا مرکز دایره و فاصله M از مرکز، مشخص شود:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow O = (2, -1) \xrightarrow{M=(4, -2)} |OM| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

حال فاصله مرکز دایره از خط $4x + 3y + 5 = 0$ را می‌یابیم تا شعاع دایره، مشخص شود:

$$R = |OH| = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

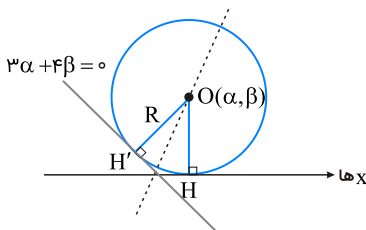
درنهایت طبق نکته فوق داریم:

$$\text{کمترین فاصله } M \text{ از دایره} = |OM - R| = \sqrt{5} - 2$$

مرکز دایره را نقطه $O(\alpha, \beta)$ در نظر می‌گیریم. باید فاصله O از محور x ها با فاصله آن از خط $3x + 4y = 0$ برابر باشد:

$$OH = OH' \Rightarrow |\beta| = \frac{|3\alpha + 4\beta|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3a + 4\beta|}{5} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 4\beta = 5\beta \\ 3\alpha + 4\beta = -5\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = \beta \\ 3\alpha = -9\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز : } O(\alpha, 3\alpha) \\ \text{مرکز : } O(\alpha, -\frac{1}{3}\alpha) \end{cases}$$

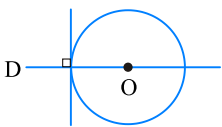


مرکز دایره در ناحیه اول است، پس فقط $O(\alpha, 3\alpha)$ قابل قبول است؛ بنابراین مطابق شکل، داریم:

$$R = OH = 3 \Rightarrow \beta = 3\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

خط به معادله $3x + 2y = a$ از مرکز دایره می‌گذرد، پس قطر دایره است. باتوجه به آنکه قطر $3x + 2y = a$ بر خط مماس بر دایره عمود است، پس شکل زیر را داریم:



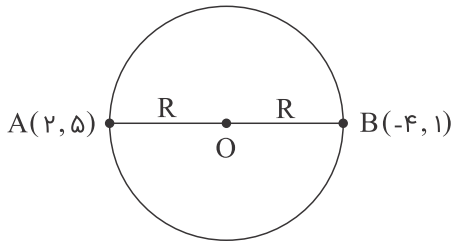
مختصات مرکز دایره در معادله خط صدق می‌کند:

$$x^2 + y^2 - 2x + y = 1 \xrightarrow{\text{مرکز}} O(1, -\frac{1}{2})$$

$$3(1) + 2(-\frac{1}{2}) = a \Rightarrow a = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

کوچکترین دایره‌ی گذرنده از A و B، دایره‌ای است که AB یک قطر آن باشد.



حال داریم:

$$O \Rightarrow O = \frac{A+B}{2} = (-1, 3) \text{ است.}$$

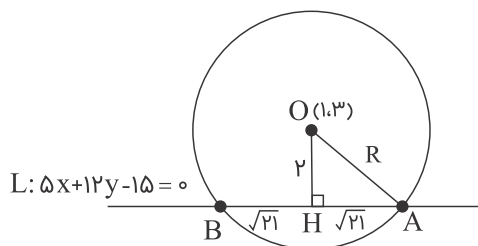
$$R = |OA| = \sqrt{(2+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \text{دایره: } (x+1)^2 + (y-3)^2 = 13$$

$$\xrightarrow{\text{برخورد با محور } x \text{ ها}} (x+1)^2 + (0-3)^2 = 13$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow x+1 = \pm 2 \Rightarrow x = 1, x = -3$$

از مرکز دایره بر خط $L: 5x + 12y - 15 = 0$ عمود می‌کنیم، پس $AH = HB = \sqrt{21}$ و داریم:



$$|OH| = \frac{|5(1) + 12(3) - 15|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{26}{13} = 2$$

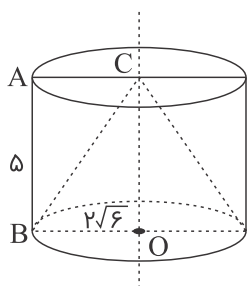
$$\triangle OHA: \text{فیثاغورس} \Rightarrow R^2 = 2^2 + (\sqrt{21})^2 = 25 \\ \Rightarrow \text{دایره}: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

حال برای یافتن محل برخورد دایره و محور x ها، مقدار y را در معادله دایره برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$(x-1)^2 + (0-3)^2 = 25 \Rightarrow (x-1)^2 + 9 = 25 \Rightarrow (x-1)^2 = 16 \\ \Rightarrow x-1 = \pm 4 \Rightarrow x = -3, x = 5 \\ \Rightarrow \text{نقاط برخورد با محور } x \text{ ها}: (-3, 0), (5, 0) \\ \Rightarrow \text{طول پاره خط حاصل} = 5 - (-3) = 8$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

مطابق شکل، باید حجم بین استوانه و مخروط را بیابیم که برابر است با:



$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi(2\sqrt{6})^2(5) - \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{6})^2(5) = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{6})^2(5) \\ = \frac{2}{3}\pi(24)(5) = 80\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

گام اول

الف) هرگاه خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) اگر معادله گسترده دایره‌ای را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر بگیریم آنگاه مختصات مرکز این دایره برابر با

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \text{ و شعاع آن برابر با } R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \text{ است.}$$

ج) هرگاه دو منحنی بر هم مماس باشند، معادله تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف خواهد داشت.

گام دوم

روش اول:

باتوجه به گام اول، مرکز این دایره نقطه $(1, -2)$ و شعاع آن برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - a} = \sqrt{1 + 4 - a} = \sqrt{5 - a}$$

ازطرفی فاصله نقطه $(1, -2)$ از خط $x + 3y = 0$ برابر است با:

$$R = \frac{|1 + 3(-2)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{5 - a} &= \frac{5}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\text{به توان } 2} 5 - a = \frac{25}{10} \Rightarrow 50 - 10a = 25 \\ \Rightarrow 10a &= 25 \Rightarrow a = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

روش دوم:

باتوجه به قسمت ج) از گام اول، باید معادله تلاقی خط و دایره، ریشه مضاعف داشته باشد. داریم:

$$x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y \quad (I)$$

با جایگذاری رابطه I در معادله دایره، به یک معادله درجه دو بر حسب y می‌رسیم که ریشه مضاعف دارد.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y + a &= 0 \xrightarrow{I} (-3y)^2 + y^2 - 2(-3y) + 4y + a = 0 \\ \Rightarrow 9y^2 + y^2 + 6y + 4y + a &= 0 \Rightarrow 10y^2 + 10y + a = 0 \\ \Delta = 0 \Rightarrow 100 - 4(10)a &= 0 \Rightarrow 100 - 40a = 0 \Rightarrow 40a = 100 \Rightarrow a = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.
 ب) معادله دایره‌ای به مرکز (α, β) و شعاع R به صورت زیر است:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

گام دوم

طبق قسمت الف) از گام اول، شعاع دایره برابر است با فاصله نقطه $(2, 0)$ از خط $y = x$ ، پس داریم:

$$y = x \Rightarrow -x + y = 0$$

$$R = \frac{|-2 + 0|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

معادله این دایره به صورت زیر است:

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 2$$

اکنون نقطه تلاقی دایره با خط $y = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 2 \xrightarrow{y=1} (x - 2)^2 + 1 = 2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

پس این دایره، خط $y = 1$ را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند.

گزینه ۲

مرکز دایره روی خطی به معادله $y = 2x$ قرار دارد. فرض می‌کنیم مختصات مرکز دایره $(\alpha, 2\alpha)$ باشد. طبق تعریف دایره، می‌دانیم فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبه فاصله مرکز دایره از هریک از نقاط $(0, 0)$ و $(3, 1)$ ابتدا مقدار α و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} \\ R &= \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \Delta \alpha^2 = (\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2 \Rightarrow \Delta \alpha^2 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

$$\Rightarrow \Delta \alpha^2 = \Delta \alpha^2 - 10\alpha + 10 \Rightarrow 10\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

بنابراین دایره‌ای به مرکز $(1, 2)$ و شعاع $\sqrt{5}$ داریم.

گام اول

در یک دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، نقطه $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار $R_1 + R_2$ و $|R_1 - R_2|$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$$

$$\text{مرکز دایره: } O_1\left(-\frac{-2}{1}, -\frac{6}{1}\right) \Rightarrow O_1(1, -3)$$

$$\text{شعاع دایره: } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{2}{1}\right)^2 + \left(\frac{6}{1}\right)^2 + 1} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 12 = 0$$

$$\text{مرکز دایره: } O_2\left(-\frac{4}{1}, -\frac{-8}{1}\right) \Rightarrow O_2(-4, 2)$$

$$\text{شعاع دایره: } R_2 = \sqrt{\left(\frac{4}{1}\right)^2 + \left(\frac{-8}{1}\right)^2 - 12} = \sqrt{16+64-12} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

بنابراین داریم:

$$O_1O_2 = \sqrt{(-4-1)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$$

$$R_1 + R_2 = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

چون $O_1O_2 = R_1 + R_2$ است پس دو دایره مماس خارج هستند.

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.
 ب) عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

گام دوم

دو نقطه $A(2, 0)$ و $B(-2, 0)$ روی دایره قرار دارد بنابراین پاره‌خط AB وترى از دایره است که طبق گام اول، عمودمنصف آن از مرکز دایره عبور می‌کند. خط $x = 0$ عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ پس فرض می‌کنیم نقطه $O(0, \alpha)$ مرکز دایره است. فاصله مرکز دایره از نقاط A و B و خط $y = 1$ برابر با شعاع دایره است، پس داریم:

$$\begin{aligned} R = OA &= \sqrt{(2-0)^2 + (0-\alpha)^2} = \sqrt{4 + \alpha^2} \\ y = 1 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow R &= \frac{|\alpha - 1|}{\sqrt{1^2}} = |\alpha - 1| \\ \Rightarrow \sqrt{4 + \alpha^2} &= |\alpha - 1| \xrightarrow{\text{به توان } 2} 4 + \alpha^2 = (\alpha - 1)^2 \\ \Rightarrow 4 + \alpha^2 &= \alpha^2 - 2\alpha + 1 \Rightarrow -2\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = |\alpha - 1| = \left| -\frac{3}{2} - 1 \right| = \left| -\frac{5}{2} \right| = \frac{5}{2}$$

گام اول

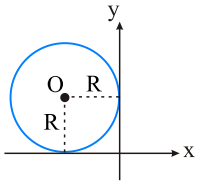
الف) هر خط قائم بر دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.
 ب) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره است.

گام دوم

باتوجه به اینکه هر خط قائم بر دایره از نقطه $(-2, 1)$ عبور می‌کند و باتوجه به قسمت الف) از گام اول، نقطه $(-2, 1)$ همان مرکز دایره است. طبق قسمت ب) از گام اول، فاصله نقطه $(-2, 1)$ از خط $y = x - 1$ برابر با شعاع دایره است؛ پس داریم:

$$\begin{aligned} y = x - 1 \Rightarrow x - y - 1 &= 0 \\ R &= \frac{|-2 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

باتوجه به اینکه دایره بر هر دو محور مختصات مماس است پس باید به طور کامل در یکی از چهار ناحیه مختصاتی قرار بگیرد. چون دایره از نقطه $(-1, 2)$ نیز عبور می کند و این نقطه در ناحیه دوم قرار دارد، پس دایره مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:



بنابراین دایره‌ای به شعاع R و به مرکز $(-R, R)$ داریم. معادله این دایره برابر است با:

$$(x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

چون دایره از نقطه $(-1, 2)$ عبور می کند پس مختصات این نقطه در معادله دایره صدق می کند:

$$\xrightarrow{x=-1, y=2} (-1 + R)^2 + (2 - R)^2 = R^2 \Rightarrow 1 - 2R + R^2 + 4 - 4R + R^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow (R - 5)(R - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R - 5 = 0 \Rightarrow R = 5 \\ R - 1 = 0 \Rightarrow R = 1 \end{cases}$$

قطر بزرگتر به ازای شعاع بزرگتر به دست می آید که برابر است با:

$$2R = 2(5) = 10$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

دو منحنی در یک نقطه بر هم مماس هستند، هرگاه معادله تلاقی آن‌ها در آن نقطه ریشه مضاعف داشته باشد.

گام دوم

داریم:

$$x^2 + y^2 - 2x = 3 \xrightarrow{y=mx+2} x^2 + (mx + 2)^2 - 2x = 3 \Rightarrow x^2 + m^2 x^2 + 4mx + 4 - 2x = 3 \\ \Rightarrow (m^2 + 1)x^2 + (4m - 2)x + 1 = 0$$

این معادله باید ریشه مضاعف داشته باشد پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (4m - 2)^2 - 4(m^2 + 1)(1) = 0 \Rightarrow 16m^2 - 16m + 4 - 4m^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 12m^2 - 16m = 0 \Rightarrow m(12m - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 12m - 16 = 0 \Rightarrow m = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

گام اول

معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

سه نقطه $(2, 1)$ ، $(-2, 4)$ و $(0, 0)$ روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادله دایره صدق می‌کند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{(2,1)} 2^2 + 1^2 + a(2) + b(1) + c = 0 \Rightarrow 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \Rightarrow 2a + b + c = -5 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(-2,4)} (-2)^2 + 4^2 + a(-2) + b(4) + c = 0 \Rightarrow 4 + 16 - 2a + 4b + c = 0 \Rightarrow -2a + 4b + c = -20 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(0,0)} 0^2 + 0^2 + a(0) + b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (III)$$

با جایگذاری $c = 0$ در دو معادله I و II، به یک دستگاه دو معادله و دو مجهول می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2a + b = -5 \\ -2a + 4b = -20 \end{cases} \xrightarrow{+} 5b = -25 \Rightarrow b = -5$$

$$2a + b = -5 \xrightarrow{b=-5} 2a - 5 = -5 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

اکنون با توجه به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 0} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

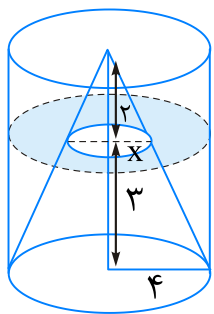
ابتدا معادله دایره را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 1 - 4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow O_1 : (1, -2), R_1 = 2$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، بنابراین فاصله مراکز آن‌ها از یکدیگر برابر مجموع اندازه‌های شعاع‌های آن‌ها است.

$$O_1O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-2 - 2)^2} = 2 + R_2 \Rightarrow 5 = 2 + R_2 \Rightarrow R_2 = 3$$

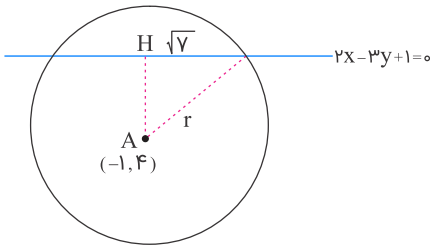


نسبت تشابه : $\frac{x}{4} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{8}{5}$

$$S = \pi(4)^2 - \pi\left(\frac{8}{5}\right)^2 = 16\pi - \frac{64}{25}\pi = \frac{336}{25}\pi = 13\frac{16}{25}\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

فاصله مرکز دایره از خط برابر AH است. داریم:



$$AH = \frac{|2(-1) - 3(4) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

همچنین می‌دانیم شعاع عمود بر وتر در دایره، وتر را نصف می‌کند. پس:

$$r^2 = AH^2 + \sqrt{V}^2 \Rightarrow r^2 = 13 + 7 = 20$$

معادله دایره را می‌نویسیم:

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20 \xrightarrow{y=2} (x+1)^2 + 4 = 20 \Rightarrow (x+1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

مرکز دایره روی نیمساز ناحیه اول است، پس مختصات آن به صورت (x, x) است. فاصله مرکز دایره از نقطه $A(6, 3)$ و خط $y = 2x$ یکسان است، پس داریم:

$$\sqrt{(x-6)^2 + (x-3)^2} = \frac{|2x-x|}{\sqrt{4+1}} \Rightarrow (x-6)^2 + (x-3)^2 = \frac{x^2}{5} \Rightarrow 2x^2 - 18x + 45 = \frac{x^2}{5}$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 90x + 225 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$\text{شعاع دایره : } R = \frac{|x|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲