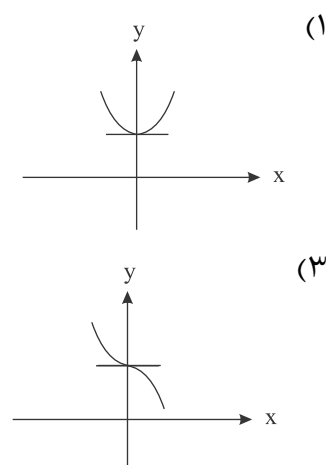
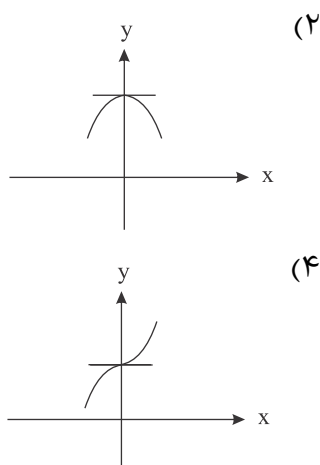


منبع:

۱ تابع f روی $[a, b]$ تعریف شده و $a < c < b$ است. کدام بیان نادرست است؟

- (۱) اگر c نقطه اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه خط مماس بر منحنی در c افقی است.
- (۲) اگر c نقطه اکسترمم نسبی باشد، آنگاه c نقطه بحرانی است.
- (۳) اگر c نقطه بحرانی باشد، آنگاه c نقطه اکسترمم نسبی است.
- (۴) اگر c نقطه اکسترمم مطلق باشد، آنگاه c نقطه بحرانی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$ در نزدیکی نقطه $x = 0$ چگونه است؟


کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۳ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x|x|} - x$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $\frac{km + n}{k - n}$ کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۴

(۴) ۱

(۳) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

۴

تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x(1-|x|)}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $m + n + k$ کدام است؟

(۲) ۵

(۱) ۶

(۴) ۳

(۳) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۵

اگر بیشترین مساحت مستطیلی که دو رأس آن بر محور x ها و دو رأس دیگر آن، یکی بر $y = \sqrt{x}$ و دیگری بر $y = \sqrt{a-x}$ واقع است برابر $\sqrt{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (با تغییر)

(۲) ۴

(۱) ۶

(۴) ۲

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۶

بیشترین مساحت مستطیلی که دو رأس آن، بر محور x ها و دو رأس دیگر آن، یکی بر $y = \sqrt{x+1}$ و دیگری بر $y = \sqrt{2-x}$ قرار دارد، کدام است؟ (با تغییر)

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۷

بیشترین مساحت از زمینی که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، چند متر مربع است؟

(۲) ۹۶۸

(۱) ۹۵۸

(۴) ۹۸۸

(۳) ۹۷۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۸

بزرگ‌ترین حجم مخروط، از بین مخروط‌هایی که مجموع شعاع قاعده و ارتفاع آن‌ها برابر واحد باشد، کدام است؟

(۲) $\frac{\pi}{12}$ (۱) $\frac{4\pi}{81}$ (۴) $\frac{4\pi}{27}$ (۳) $\frac{3\pi}{32}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۹

دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است، اگر حاصل ضرب آن‌ها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{2}$ (۱) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

بیشترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویه قائمه و وتر آن ۶ باشد، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $2\sqrt{3}$
(۳) ۴ (۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(8, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = x\sqrt{x}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{11}$ (۲) $3\sqrt{5}$
(۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $5\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

دو ضلع از مستطیلی منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی به معادله $y = (x - 2)^2$ روی بازه $[0, 2]$ است. بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

- (۱) $\frac{28}{27}$ (۲) $\frac{10}{9}$
(۳) $\frac{32}{27}$ (۴) $\frac{11}{9}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

کمترین فاصله نقطه $A(4, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x + 9}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{2}$
(۳) ۳ (۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

کوتاه‌ترین فاصله مبدأ مختصات از نقاط منحنی به معادله $y = \frac{2}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$
(۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

دو نقطه $A(2, 3)$ و $B(4, 7)$ و خط به معادله $y = x - 1$ در صفحه محورهای مختصات مفروض‌اند. نقطه M بر روی خط مفروض با کدام طول انتخاب شود به‌طوری‌که تفاضل فواصل آن از دو نقطه مفروض، بیشترین مقدار را داشته باشد؟

- (۱) -۱ (۲) صفر
(۳) ۱ (۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۶

نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور x ها انتخاب شود، به‌طوری‌که تفاضل فواصل آن از دو نقطه $A(1, 5)$ و $B(7, -2)$ بیشترین مقدار را داشته باشد؟

(۲) ۹

(۱) ۸

(۴) ۱۱

(۳) ۱۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۱۷

کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y = -\sqrt{-x - [x^2]}$ از خط $x - y - 1 = 0$ کدام است؟

(۲) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۸

حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط می‌شود، کدام است؟

(۲) 64π (۱) 32π (۴) $\frac{512\pi}{3}$ (۳) $\frac{256\pi}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۹

تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = [x] \sin \pi x$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

(۲) ۵

(۱) ۴

(۴) بی‌شمار

(۳) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۲۰

نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟

(۲) $4/5$

(۱) ۴

(۴) ۸

(۳) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۱

ماکزیمم تابع با ضابطه $f(x) = -|x| \cos x$ ، در بازه $[-1, 1]$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) صفر

(۴) ۱

(۳) $\cos 1$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۲۲

اگر c طول نقطه اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، الزاماً تابع f در نقطه c ، کدام وضعیت را دارد؟

- (۱) پیوسته
(۲) مشتق‌پذیر
(۳) خط مماس افقی
(۴) اکسترمم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۲۳

برد تابع با ضابطه $f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟

- (۱) $(0, 1]$
(۲) $[0, 2]$
(۳) $[1, 2]$
(۴) $(1, 3)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۴

نمودار تابع $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + (2 - m)x + 5$ ، $m \in (-1, 1)$ محور x ها را در α و β قطع می‌کند. اگر مجموع α و β کمترین مقدار باشد، m کدام است؟ (با تغییر)

- (۱) $-2 + \sqrt{5}$
(۲) $-2 + \sqrt{3}$
(۳) $2 - \sqrt{5}$
(۴) $2 - \sqrt{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۲۵

تابع f در نقطه c دارای مینیمم است و مشتق راست دارد. الزاماً این مشتق چگونه است؟

- (۱) مثبت
(۲) منفی
(۳) نامنفی
(۴) نامثبت

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۶

اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = 2^x$ ، آنگاه تابع $g \circ f$ از نظر اکسترمم نسبی کدام نوع را دارد؟

- (۱) دارای ماکزیمم - دارای مینیمم
(۲) دارای ماکزیمم - فاقد مینیمم
(۳) فاقد ماکزیمم - دارای مینیمم
(۴) فاقد ماکزیمم - فاقد مینیمم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۲۷

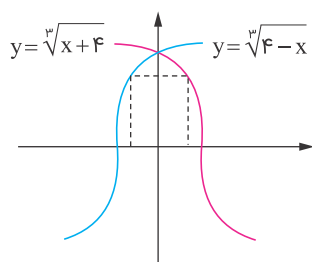
تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 - 2}$ ؛ $x \in (-2, 2)$ در آن‌ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۸

مساحت بزرگ‌ترین مستطیل واقع در ناحیه‌های اول و دوم که دو رأس آن بر محور x ها و دو رأس دیگر آن بر نمودارهای داده شده در شکل زیر قرار دارد، کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲۹

مقدار مینیمم نسبی تابع $y = x^3 - 12x + 2$ کدام است؟

(۱) -۱۴

(۲) -۱۱

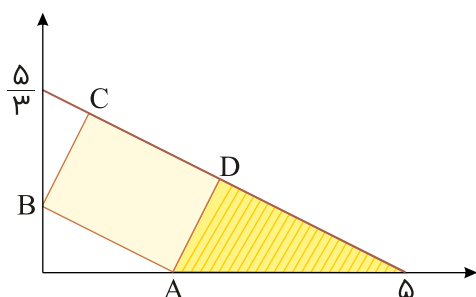
(۳) -۹

(۴) -۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳۰

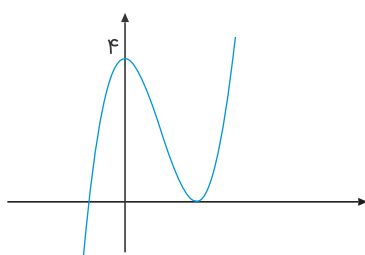
در شکل زیر، مساحت مستطیل ABCD ماکزیمم است. مساحت مثلث هاشورخورده چقدر است؟

(۱) $\frac{15}{8}$ (۲) $\frac{15}{16}$ (۳) $\frac{25}{12}$ (۴) $\frac{25}{24}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳۱

نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. طول نقطه مینیمم نسبی تابع، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳۲

در ساخت یک کیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{3}$ ، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

(۲) ۱

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt[3]{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۳۳

اگر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر a کدام است؟

- (۱) $a > 0$ یا $a < -2$
 (۲) $a > 2$ یا $a < 0$
 (۳) $-2 < a < 0$
 (۴) $0 < a < 2$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۳۴

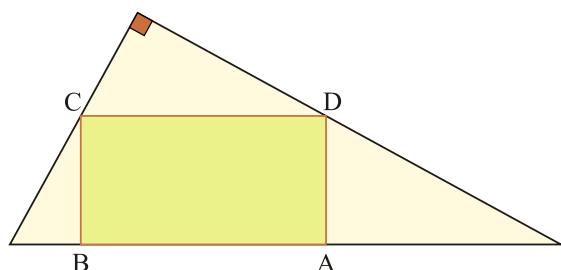
طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x^6 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$ کدام است؟

- (۱) -2
 (۲) -1
 (۳) صفر
 (۴) 1

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۳۵

در شکل زیر، یکی از اضلاع قائمه مثلث بزرگ نصف دیگری است. اگر مساحت مستطیل ABCD ماکزیمم باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟



- (۱) 1
 (۲) $1/5$
 (۳) 2
 (۴) $2/5$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳۶

کمترین فاصلهٔ نقاط واقع بر منحنی $y = \sqrt{x - [x^2]}$ از خط $2x - y + 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 (۲) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$
 (۳) $\frac{\sqrt{5}}{10}$
 (۴) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۳۷

مجموعهٔ مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + |x|$ صعودی باشند، کدام است؟

- (۱) $[-1, +\infty)$
 (۲) $(-\infty, \infty)$
 (۳) $[-1, 0) \cup (0, \infty)$
 (۴) $[-3\sqrt{3}, 0]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۸

تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ بر روی دامنهٔ خود، کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) 1
 (۳) 2
 (۴) بی‌شمار

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

کدام عبارت، برای تابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$ درست است؟

(۱) تابع f در بازه $(0, 1) \cup (1, \infty)$ صعودی است.

(۲) تابع f در بازه‌های $(0, 1)$ و $(1, \infty)$ صعودی است.

(۳) تابع f در بازه $(1, \infty)$ صعودی و در بازه $(0, 1)$ نزولی است.

(۴) تابع f در بازه $(1, \infty)$ نزولی و در بازه $(0, 1)$ صعودی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 1|$ با دامنه $[-2, 2]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۴

(۳) ۵ (۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

تابع $f(x) = \frac{x}{1 - x|x|}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

حاصل‌ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a - 2x}$ برابر $\sqrt{12}$ است. اگر $a > 0$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴

(۳) ۶ (۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4$ در نقاطی به طول صفر و -۲ دارای اکسترمم نسبی است. فاصله بین نقاط اکسترمم نسبی این تابع، چقدر است؟

(۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{11}$

(۳) $2\sqrt{15}$ (۴) $2\sqrt{101}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x) = x^2$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحهٔ مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل تقاطع تابع f با خط نیمساز موردنظر باشد، ماکزیمم طول پاره‌خط AA' ، کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۴۵

تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} |x^2 - 4|$ ، کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۴۶

کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x + 7}$ ، کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۴/۵
(۳) ۵
(۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴۷

فاصله نقطه ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ ، از نیمساز ناحیه اول کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) ۲
(۴) $2\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۴۸

در ساخت قوطی‌های حلبی در باز به شکل مکعب‌مستطیل با قاعده مربع و حجم ۴ واحد مکعب، حداقل حلب استفاده‌شده در هر قوطی، چند واحد مربع است؟

- (۱) ۱۴
(۲) ۱۲
(۳) ۱۰
(۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴۹

نقاط $A(0, 0)$ و $B(1, 1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ هستند، حاصل ab کدام است؟

- (۱) -۳
(۲) -۶
(۳) ۳
(۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۵۰

از بین مخروط‌های حاصل که از دوران کامل پاره‌خط AB با اندازه $3\sqrt{3}$ حول خط L به دست می‌آیند، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، کدام است؟ (فقط نقطه A روی خط L واقع است)

- (۱) ۶
(۲) ۳
(۳) $2\sqrt{3}$
(۴) $\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵۱

نقطه $A(-1, 1)$ اکستریم نسبی تابع $y = x^2|x| + 3ax^2 + b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) $-\frac{1}{3}$
(۳) 3 (۴) $\frac{1}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۵۲

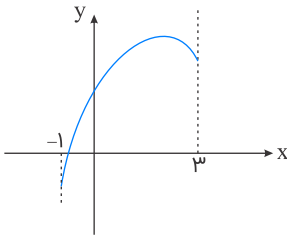
تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطه $(1, -2)$ دارای اکستریم نسبی است. عدد a و نوع اکستریم نسبی کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$ ، مینیم (۲) $-\frac{4}{3}$ ، ماکزیم
(۳) $\frac{4}{3}$ ، مینیم (۴) $\frac{4}{3}$ ، ماکزیم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۵۳

شکل زیر، نمودار تابع $y = x + \sqrt{-x^2 + ax + b}$ است. مقدار ماکزیم مطلق تابع کدام است؟



- (۱) $1 + \sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$
(۳) $1 + 2\sqrt{2}$ (۴) 4

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۵۴

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، طول یکی از نقاط اکستریم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x$ ، در بازه $(1, 4)$ قرار می‌گیرد؟

- (۱) $-3 < a < 1/5$ (۲) $-3 < a < 2/5$
(۳) $-5 < a < 1/5$ (۴) $-5 < a < 2/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۵۵

اگر $a > 0$ و ثابت و x متغیر باشد، مینیم مقدار $\frac{3a + x}{\sqrt[4]{a^3 x}}$ کدام است؟

- (۱) $4a$ (۲) $3a$
(۳) 3 (۴) 4

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۵۶

فرض کنید A و B نقاط اکستریم تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها، موازی پاره‌خط AB است؟

- (۱) صفر (۲) 1
(۳) 2 (۴) 3

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۵۷

بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 8}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها، کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) $\sqrt[3]{4} - 1$
(۳) $2\sqrt[3]{4}$
(۴) $2(\sqrt[3]{4} - 1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۵۸

مینیمم مطلق تابع $f(x) = x|3 - x^2|$ در بازه $[-1/5, \sqrt{3}]$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{9}{4}$
(۲) -2
(۳) $-\sqrt{3}$
(۴) $-\frac{9}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵۹

قرینه نقطه A واقع بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ را در دامنه $[0, 1]$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم صفحه مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره خط AA' ، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3\sqrt{6}}$
(۲) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$
(۳) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$
(۴) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۶۰

طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $y = (x - 1)^2 \sqrt[3]{x^2}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۶۱

به ازای کدام مقدار k ، بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$ در بازه $[1, 3]$ قرینه یکدیگرند؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۶۲

اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x + 4y$ کدام است؟

- (۱) $25\sqrt{2}$
(۲) ۳۶
(۳) $28\sqrt{2}$
(۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۶۳

تابع با ضابطه $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

- (۱) مینیمم نسبی دارد.
 (۲) ماکزیمم نسبی دارد.
 (۳) مینیمم نسبی و ماکزیمم نسبی دارد.
 (۴) فاقد اکسترمم نسبی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۶۴

کدام بیان برای تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 3|$ بر دامنه $[-1, 1]$ نادرست است؟

- (۱) مینیمم مطلق دارد.
 (۲) ماکزیمم مطلق دارد.
 (۳) دو نقطه اکسترمم نسبی دارد.
 (۴) فاقد اکسترمم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۶۵

مجموعه طول نقاط ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 3|$ کدام است؟

- (۱) $\{-\sqrt{3}\}$
 (۲) $\{\sqrt{3}\}$
 (۳) $\{-\sqrt{3}, 1\}$
 (۴) $\{\sqrt{3}, 1\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۶۶

تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x^3 - x|$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) ۴
 (۳) ۵
 (۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۶۷

مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ ، کدام است؟

- (۱) $-1 + \sqrt{5}$
 (۲) $1 + \sqrt{5}$
 (۳) $-1 + \sqrt{3}$
 (۴) $1 + \sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۶۸

از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

- (۱) $\frac{2}{1}$
 (۲) $\frac{\sqrt{3}}{1}$
 (۳) $\frac{3}{2}$
 (۴) $\frac{\sqrt{2}}{1}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث‌اند، نوع این مثلث کدام است؟

- (۱) متساوی‌الاضلاع
(۲) فقط متساوی‌الساقین
(۳) فقط قائم‌الزاویه
(۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x-2|\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

- (۱) $\{0, \frac{4}{5}, 2\}$
(۲) $\{0, \frac{2}{3}, 2\}$
(۳) $\{0, 1\}$
(۴) $\{\frac{2}{3}, 2\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

با شرط $1 \leq x$ در $f(x) = x^3 - 3x$ تابع با ضابطه $g(x) = x^3 + x$ بیشترین مقدار gof کدام است؟

- (۱) ۹
(۲) ۱۰
(۳) ۱۲
(۴) ۳۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $y = -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{2}{3}$
(۴) فاقد ماکزیمم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$
(۲) $\frac{1}{5}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

در تابع با ضابطه $f(x) = x|x-4|$ ، فاصله دو نقطه ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) $3\sqrt{2}$
(۴) $2\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۷۵

بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{12 - x}$ در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) $8\sqrt{3}$
(۳) ۱۶ (۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۷۶

مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازه $[-4, 3]$ ، کدام است؟

- (۱) -18 و 24 (۲) -45 و 27
(۳) -36 و 27 (۴) -27 و 36

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷۷

کدام یک از تابع‌های زیر، یک‌به‌یک است؟

- (۱) $f(x) = x + \sqrt{x}$ (۲) $g(x) = x - \sqrt{x}$
(۳) $h(x) = 2x + \frac{1}{x}$ (۴) $p(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۷۸

مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = (x^2 - 28) \cdot \sqrt[3]{x}$ کدام است؟

- (۱) $\{-2, 2\}$ (۲) $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$
(۳) $\{-2, 0, 2\}$ (۴) $\{-7, 0, 1\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۷۹

بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴
(۳) ۲۷ (۴) ۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۰

در تابع با ضابطه $f(x) = x|x| - 2x$ ، فاصله دو نقطه ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۳
(۳) $3\sqrt{2}$ (۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸۱

نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x}{1-x^2}$ بر کدام بازه صعودی است؟

- (۱) $(-2, 0)$ (۲) $(-\infty, -2)$
(۳) $(0, 2)$ (۴) $(-2, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۸۲

تابع f روی بازه (a, b) تعریف شده است. در این مورد کدام بیان درست است؟

- (۱) هر نقطه بحرانی، نقطه اکسترمم نسبی است. (۲) هر نقطه اکسترمم نسبی، نقطه بحرانی است.
(۳) در هر نقطه بحرانی، مشتق تابع صفر است. (۴) در هر نقطه اکسترمم نسبی، مشتق تابع صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۸۳

مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$ روی بازه $[-1, 3]$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{11}{3}$ (۲) $-\frac{10}{3}$
(۳) $-\frac{8}{3}$ (۴) $-\frac{7}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۸۴

کمترین مقدار تابع $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ ، کدام است؟

- (۱) -36 (۲) -32
(۳) -24 (۴) -18

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۸۵

بیشترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ در بازه $[-2, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰
(۳) ۱۲ (۴) ۱۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۸۶

برد تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 - 12x + 8$ بر بازه $[-3, 1]$ کدام است؟

- (۱) $[-8, 17]$ (۲) $[-8, 24]$
(۳) $[-3, 17]$ (۴) $[-3, 24]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۸۷

کمترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt[3]{x^3 - x^3}$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{6}$

(۱) $-\frac{1}{9}$

(۴) صفر

(۳) $-\frac{1}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۸۸

مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ بر روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

(۲) $\frac{-1}{3}$

(۱) -1

(۴) $\frac{1}{3}$

(۳) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۸۹

اگر $f(x) = x^2 - 2x + 4$ و $g(x) = x^3 + x$ ، کمترین مقدار تابع $g \circ f$ کدام است؟

(۲) ۲۴

(۱) ۲۱

(۴) ۳۰

(۳) ۲۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۹۰

کمترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = 1 - \cos^2 x - \sin x$ کدام است؟

(۲) $\frac{-1}{2}$

(۱) -1

(۴) صفر

(۳) $\frac{-1}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

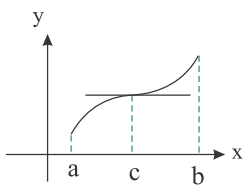
منبع:

گزینه ۳

۱

با بررسی گزینه‌ها، جواب سؤال را مشخص می‌کنیم.
گزینه اول: اگر c نقطه اکسترمم نسبی f و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه تابع f در این نقطه پیوسته و خط مماس موجود است بنابراین قطعاً خط مماس در این نقطه افقی است.

گزینه دوم: می‌دانیم هر نقطه اکسترمم نسبی، بحرانی می‌باشد، پس این گزینه درست است.
گزینه سوم: فرض می‌کنیم c نقطه بحرانی تابع f باشد، باتوجه به نمودار زیر درستی این گزینه را رد می‌کنیم:



گزینه چهارم: باتوجه به اینکه c یک نقطه درون بازه است، پس اگر c نقطه اکسترمم مطلق تابع f باشد، قطعاً اکسترمم نسبی تابع نیز می‌باشد؛ بنابراین بر اساس دلیل درستی گزینه دوم، این نقطه یک نقطه بحرانی تابع f است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گزینه ۱

۲

برای تعیین وضعیت یکنوایی (صعودی یا نزولی بودن) تابع در اطراف نقطه $x = 0$ ، تابع y' را قبل و بعد از این نقطه تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^3 + 1) - 3x^2(x^2 + 1)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^3 + 1)^2}$$

باتوجه به اینکه $f'(0) = 0$ است پس تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ دارای مماس افقی است و تابع در اطراف $x = 0$ به صورت زیر رفتار می‌کند:

x	0
$f'(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$f(x)$	$\swarrow \quad \searrow$ min

نقطه $x = 0$ مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است، پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

ابتدا دامنه تابع را حساب می‌کنیم:

$$x|x| - x \geq 0 \Rightarrow x(|x| - 1) \geq 0$$

	-1	0	1				
$x(x -1)$	-	0	+	0	-	0	+

$$D_f = [-1, 0] \cup [1, +\infty)$$

اکنون مشتق تابع را محاسبه و جدول تغییرات رسم می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x} & ; x \geq 1 \\ \sqrt{-x^2 - x} & ; -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} & ; x > 1 \\ \frac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}} & ; -1 < x < 0 \end{cases}$$

x	-1	$-\frac{1}{4}$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$\frac{0}{0}$	+	0	-	$\frac{0}{0}$	+
	0	$\nearrow \frac{1}{4}$	0	0	$\nearrow$	

تابع دارای ۴ نقطه بحرانی $\{0, 1, -1, \frac{-1}{2}\}$ و یک نقطه max نسبی است و همچنین فاقد مینیمم نسبی است.

$$\frac{km+n}{k-n} = \frac{km}{k} = m = 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۳

دامنه تابع را به دست می آوریم:

x	-1	0	1
$x(1- x)$	+	0	-

$$x(1-|x|) \geq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

تابع را به فرم زیر مرتب می کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(1-x)} & ; 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x(x+1)} & ; x \leq -1 \end{cases}$$

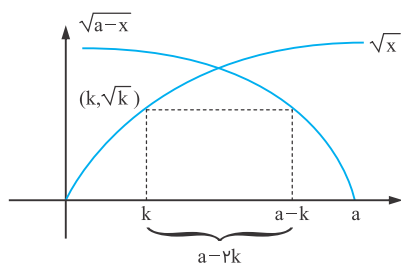
$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & ; 0 < x < 1 \\ \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} & ; x < -1 \end{cases}$$

بنابراین نقاط بحرانی، $\{0, \frac{1}{2}, -1, 1\}$ خواهند بود. اکنون $f'(x)$ را تعیین علامت می کنیم و جدول تغییرات $f(x)$ را رسم می کنیم:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+	-		
f						

تابع در نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ، ماکزیمم نسبی دارد و همچنین فاقد مینیمم نسبی خواهد بود. بنابراین:

$$m + n + k = 1 + 0 + 4 = 5$$



$$S = \sqrt{k}(a - 2k) \Rightarrow S' = \frac{1}{2\sqrt{k}}(a - 2k) - 2\sqrt{k} = 0$$

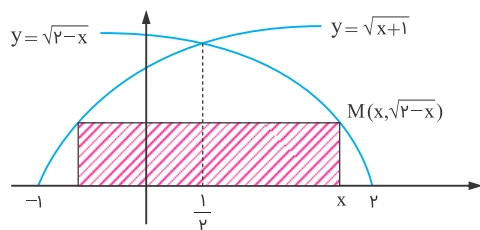
$$\xrightarrow{\times 2\sqrt{k}} a - 2k - 4k = 0 \Rightarrow k = \frac{a}{6}$$

$$S_{\max} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{6}}\left(a - \frac{a}{3}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{6}}\left(\frac{2a}{3}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{6}\left(\frac{4a}{9}\right) = 2 \Rightarrow a^2 = 27 \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

طول برخورد دو تابع، $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ است. نقطه M را به مختصات $(x, \sqrt{2-x})$ ، در نظر می‌گیریم. طول مستطیل، $2(x - \frac{1}{\sqrt{2}})$ ، یعنی $2x - 1$ خواهد بود.



اکنون مساحت مستطیل را ماکزیمم می‌کنیم.

$$S = (2x - 1)\sqrt{2-x}, \quad -1 \leq x \leq 2$$

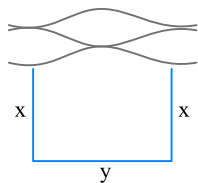
$$S' = 2\sqrt{2-x} - \frac{2x-1}{\sqrt{2-x}} = 0$$

$$\Rightarrow 4(2-x) = 2x-1 \Rightarrow 8-4x = 2x-1$$

$$6x = 9 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$S_{\max} = (2 \times \frac{3}{2} - 1)\sqrt{2 - \frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

اگر طول و عرض زمین را به ترتیب y و x بنامیم آنگاه داریم:



$$y + 2x = 11 \Rightarrow y = 11 - 2x$$

مساحت مستطیل برابر با حاصل ضرب طول در عرض آن است، پس تعریف می‌کنیم:

$$S = xy = x(11 - 2x) = 11x - 2x^2$$

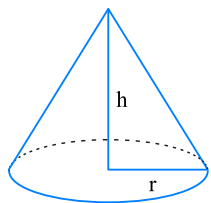
برای محاسبه بیشترین مساحت، معادله $S'(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$S'(x) = 11 - 4x \Rightarrow S'(x) = 0 \Rightarrow 4x = 11 \Rightarrow x = 2.75, y = 11 - 4 \times 2.75 = 2.5$$

بنابراین:

$$S_{\max} = xy = 2.75 \times 2.5 = 6.875$$

مخروطی به شعاع r و ارتفاع h در نظر می‌گیریم. داریم:



$$r + h = l \Rightarrow r = l - h$$

حجم این مخروط برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \xrightarrow{r=l-h} V = \frac{1}{3}\pi (l-h)^2 h = \frac{1}{3}\pi (h^3 - 2lh^2 + l^2 h)$$

برای ماکزیمم کردن حجم مخروط، ابتدا معادله $V'(h) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi (3h^2 - 4lh + l^2)$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow 3h^2 - 4lh + l^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} h = l \\ h = \frac{l}{3} \end{cases} \quad \text{زیرا } (r + h = l \text{ غ.ق.ق})$$

بنابراین به ازای $h = \frac{l}{3}$ ، بزرگ‌ترین حجم مخروط به دست می‌آید:

$$V_{\max} = \frac{1}{3}\pi \left(\left(\frac{l}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{l}{3}\right)^2 l + \frac{l^3}{3} \right) = \frac{\pi l^3}{81}$$

یکی از اعداد را x و دیگری را y می‌نامیم. داریم: $y = 2x - 6$
می‌خواهیم $x.y$ مینیمم شود پس این حاصل ضرب را به صورت تابعی بر حسب x نوشته و مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x) = x.y = x(2x - 6) = 2x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x - 6 = 0 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

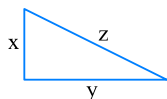
$$\xrightarrow{y=2x-6} y = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 6 = 3 - 6 = -3$$

مجموع دو عدد برابر است با:

$$x + y = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع x ، y و z به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.



بر اساس اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$x + z = 6 \Rightarrow z = 6 - x$$

ازطرفی طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$x^2 + y^2 = z^2 \xrightarrow{z=6-x} x^2 + y^2 = (6 - x)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 12x + 36$$

$$\Rightarrow y^2 = 36 - 12x \Rightarrow y = \sqrt{36 - 12x} \Rightarrow y = 2\sqrt{9 - 3x}$$

اکنون مساحت مثلث را به‌صورت تابعی برحسب x می‌نویسیم:

$$S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(2\sqrt{9 - 3x}) = x\sqrt{9 - 3x}$$

برای بهینه کردن مساحت، معادله $S'(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$S'(x) = \sqrt{9 - 3x} - \frac{3x}{2\sqrt{9 - 3x}} = \frac{2(9 - 3x) - 3x}{2\sqrt{9 - 3x}} = \frac{18 - 9x}{2\sqrt{9 - 3x}}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 18 - 9x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\xrightarrow{y=2\sqrt{9-3x}} y = 2\sqrt{9 - 6} = 2\sqrt{3}$$

بنابراین بیشترین مساحت مثلث قائم‌الزاویه با مشخصات داده‌شده برابر است با:

$$S_{\max} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

نقطه $M(\alpha, \alpha\sqrt{\alpha})$ را بر روی منحنی $y = x\sqrt{x}$ در نظر می‌گیریم. فاصله میان دو نقطه A و M برابر است با:

$$MA = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\alpha\sqrt{\alpha} - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 16\alpha + 64 + \alpha^3} = \sqrt{\alpha^3 + \alpha^2 - 16\alpha + 64}$$

برای مینیمم کردن فاصله MA ، ابتدا معادله $(MA)'(\alpha) = 0$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$(MA)'(\alpha) = \frac{3\alpha^2 + 2\alpha - 16}{2\sqrt{\alpha^3 + \alpha^2 - 16\alpha + 64}}$$

$$(MA)'(\alpha) = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 + 2\alpha - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = -\frac{16}{6} \end{cases} \quad \text{غ ق ق (*)}$$

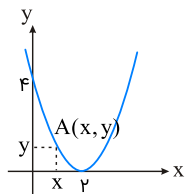
* دامنه تابع $y = x\sqrt{x}$ به صورت بازه $[0, +\infty)$ است.

بنابراین کوتاه‌ترین فاصله نقطه A از منحنی $y = x\sqrt{x}$ برابر است با:

$$(MA)_{\min} = \sqrt{(2-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} = 2\sqrt{11}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

نقطه $A(x, y)$ روی منحنی $y = (x-2)^2$ را رأس چهارم مستطیل در نظر می‌گیریم، پس این رأس دارای مختصات $A(x, (x-2)^2)$ است. با رسم شکلی ساده، مستطیل ایجادشده را مشخص می‌کنیم.



مساحت این مستطیل برابر است با:

$$S = xy \xrightarrow{y_A = (x-2)^2} S = x(x-2)^2; \quad 0 < x < 2$$

$$S'(x) = (x-2)^2 + 2x(x-2) = (x-2)(x-2+2x) = (x-2)(3x-2)$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow (x-2)(3x-2) = 0 \xrightarrow{x \neq 2} 3x-2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

بنابراین بیشترین مساحت مستطیل به ازای $x = \frac{2}{3}$ به دست می‌آید:

$$S_{\max} = x(x-2)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)^2 = \frac{2}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

نقطه $M(\alpha, \sqrt{2\alpha+9})$ را بر روی منحنی $y = \sqrt{2x+9}$ در نظر می‌گیریم. فاصله میان دو نقطه A و M برابر است با:

$$MA = \sqrt{(\alpha - 4)^2 + (\sqrt{2\alpha+9} - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16 + 2\alpha + 9} = \sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 25}$$

برای یافتن کمترین فاصله، ابتدا معادله $(MA)'(\alpha) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$(MA)'(\alpha) = \frac{2\alpha - 6}{2\sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 25}}$$

$$(MA)'(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = 3$$

بنابراین کمترین فاصله نقطه A از منحنی $y = \sqrt{2x+9}$ برابر است با:

$$(MA)_{\min} = \sqrt{9 - 6(3) + 25} = \sqrt{16} = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

نقطه $A(\alpha, \frac{2}{\alpha^2})$ را بر روی منحنی $y = \frac{2}{x^2}$ در نظر می‌گیریم. فاصله مبدأ مختصات از نقطه A برابر است با:

$$OA = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\frac{2}{\alpha^2} - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^4}}$$

برای مینیمم کردن فاصله OA ، ابتدا معادله $(OA)'(\alpha) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$(OA)'(\alpha) = \frac{2\alpha - \frac{16\alpha^3}{\alpha^8}}{2\sqrt{\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^4}}}$$

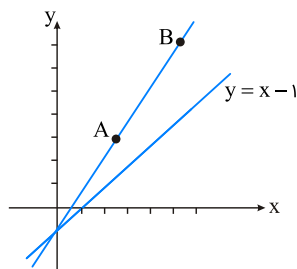
$$(OA)'(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha - \frac{16}{\alpha^5} = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{16}{\alpha^5} \Rightarrow \alpha^6 = 8 \Rightarrow \alpha = \sqrt[6]{8}$$

بنابراین کوتاه‌ترین فاصله مبدأ مختصات از منحنی $y = \frac{2}{x^2}$ به ازای $\alpha = \sqrt[6]{8}$ به دست می‌آید:

$$(OA)_{\min} = \sqrt{(\sqrt[6]{8})^2 + \frac{4}{(\sqrt[6]{8})^4}} = \sqrt{2 + \frac{4}{8}} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

دو نقطه A و B و خط داده شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید دو نقطه A و B در یک طرف خط $y = x - 1$ قرار دارند؛ بنابراین نقطه‌ای از این خط که تفاضل فاصله‌اش از A و B بیشترین مقدار را دارد، همان محل برخورد خط $y = x - 1$ و خط گذرنده از نقاط A و B را تعیین می‌کنیم:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

$$y - 3 = \frac{7 - 3}{4 - 2} (x - 2) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 3 = 2x - 4 \Rightarrow y = 2x - 1$$

با مساوی قرار دادن معادله دو خط، نقطه برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$2x - 1 = x - 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow M(0, -1)$$

بنابراین طول نقطه M برابر با صفر است.

گام اول

فاصله میان دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

گام دوم

نقطه موردنظر را $M(\alpha, 0)$ در نظر می‌گیریم. باتوجه به گام اول، فواصل MA و MB را محاسبه می‌کنیم.

$$|MA| = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}$$

$$|MB| = \sqrt{(7 - \alpha)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}$$

تفاضل این دو فاصله، عبارتی برحسب α است که برای یافتن ماکزیمم مقدارش، کافی است ریشه مشتق این عبارت را به دست آوریم.

$$d(\alpha) = |MA| - |MB| = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25} - \sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}$$

$$d'(\alpha) = \frac{-2(1 - \alpha)}{2\sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}} - \frac{-2(7 - \alpha)}{2\sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}} = \frac{(7 - \alpha)}{\sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}} - \frac{(1 - \alpha)}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}}$$

$$d'(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{(7 - \alpha)}{\sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}} = \frac{(1 - \alpha)}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{(7 - \alpha)^2}{(7 - \alpha)^2 + 4} = \frac{(1 - \alpha)^2}{(1 - \alpha)^2 + 25}$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2((7 - \alpha)^2 + 4) = (7 - \alpha)^2((1 - \alpha)^2 + 25)$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2(7 - \alpha)^2 + 4(1 - \alpha)^2 = (7 - \alpha)^2(1 - \alpha)^2 + 25(7 - \alpha)^2$$

$$\Rightarrow 4(1 - \alpha)^2 = 25(7 - \alpha)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2(1 - \alpha) = \pm 5(7 - \alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - 2\alpha = 35 - 5\alpha \Rightarrow 3\alpha = 33 \Rightarrow \alpha = 11 \\ 2 - 2\alpha = -35 + 5\alpha \Rightarrow 7\alpha = 37 \Rightarrow \alpha = \frac{37}{7} \end{cases}$$

باتوجه به گزینه‌ها، $\alpha = 11$ قابل قبول است.

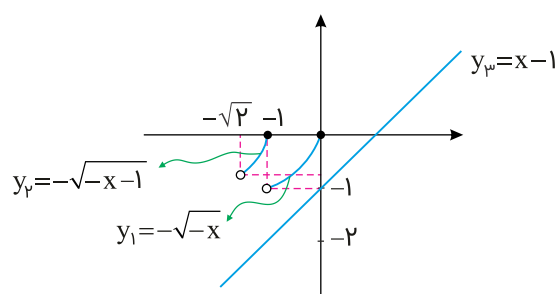
$$y = -\sqrt{-x - [x^2]}$$

$$-x - [x^2] \geq 0 \Rightarrow -x \geq [x^2]$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{-x}$$

$$-\sqrt{2} < x < -1 \Rightarrow 1 < x^2 < 2 \Rightarrow [x^2] = 1 \Rightarrow y = -\sqrt{-x-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & ; x \in (-1, 0) \\ -\sqrt{-x-1} & ; x \in (-\sqrt{2}, -1) \\ 0 & ; x = 0, -1 \end{cases}$$



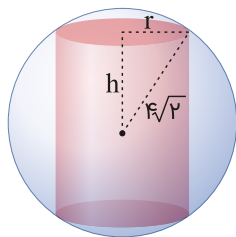
کمترین فاصله را می‌خواهیم، بنابراین تنها فاصله y_1 تا y_3 را در نظر می‌گیریم.
نقطه $A(x, -\sqrt{-x})$ را روی y_1 در نظر می‌گیریم:

$$A(x, -\sqrt{-x}) \xrightarrow{x-y-1=0} AH = \frac{|x + \sqrt{-x} - 1|}{\sqrt{1+1}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow AH' = \frac{\left|1 + \frac{-1}{\sqrt{-x}}\right|}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{-x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{-x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{(*)} AH = \frac{\left|-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} - 1\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$



$$h^2 + r^2 = 3^2 \Rightarrow h = \sqrt{3^2 - r^2}$$

$$\text{مساحت جانبی} : f = 2\pi r \times h = 2\pi r \sqrt{3^2 - r^2} = 2\pi \sqrt{3^2 r^2 - r^4}$$

$$f' = 2\pi \times \frac{6r - 4r^3}{2\sqrt{3^2 r^2 - r^4}} = 0 \quad \begin{cases} r = 0 & \text{نادرست} \\ r = 3 & \text{درست} \end{cases}$$

اگر $r = 3$ باشد $h = 3$ است.

$$\max(S) = 2\pi(3)(3) = 6\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

باتوجه به وجود عبارت $[x]$ در ضابطه تابع $f(x)$ ، ابتدا بازه $[-1, 2]$ را به زیربازه‌های کوچک‌تر تقسیم کرده و ضابطه تابع را روی هر زیربازه مشخص می‌کنیم.

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -\sin \pi x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = \sin \pi x$$

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = 2 \sin \pi x$$

باتوجه به اینکه ضابطه تابع $f(x)$ در بازه $[0, 1]$ به صورت خط افقی $y = 0$ است پس هر $x \in [0, 1]$ می‌تواند یک نقطه بحرانی تابع $f(x)$ باشد.

همچنین در دو بازه $-1 \leq x < 0$ و $1 \leq x < 2$ نقاطی که به ازای آن‌ها مشتق برابر صفر است، بحرانی می‌باشند:

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = -\sin \pi x \Rightarrow f'(x) = -\pi \cos \pi x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = \sin \pi x \Rightarrow f'(x) = \pi \cos \pi x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

به علاوه نقاط ابتدا و انتهای بازه $[-1, 2]$ یعنی $x = -1, 2$ نیز بحرانی هستند. بنابراین تابع $f(x)$ در بازه $[-1, 2]$ دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی از دامنه تعریف آن است که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلق $|x^2 + x - 2|$ ، ضابطه تابع را ساده تر می کنیم، داریم:

$$f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2| = (x-1)|(x+2)(x-1)|$$

 $x = 1$ و $x = -2$ ریشه های عبارت درون قدر مطلق هستند پس می توان نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2(x+2) & ; x \geq 1 \text{ یا } x \leq -2 \\ -(x-1)^2(x+2) & ; -2 < x < 1 \end{cases}$$

تابع در نقاط $x = 1$ و $x = -2$ پیوسته است پس ضابطه $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} (x-1)(3x+3) & ; x > 1 \text{ یا } x < -2 \\ -(x-1)(3x+3) & ; -2 < x < 1 \end{cases}$$

اکنون ریشه های معادله $f'(x) = 0$ را به دست می آوریم:

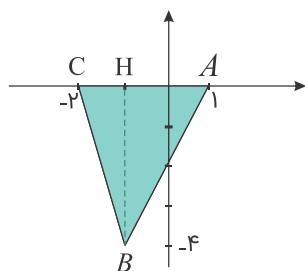
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 1, x < -2 : (x-1)(3x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \\ -2 < x < 1 : -(x-1)(3x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

باتوجه به اینکه $f'_-(1) = f'_+(1) = 0$ است پس $x = 1$ نیز نقطه بحرانی تابع $f(x)$ است. بررسی می کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف نشده است. داریم:

$$\left. \begin{aligned} f'_+(-2) &= -(-2-1)(-3) = -9 \\ f'_-(-2) &= (-2-1)(-3) = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(-2) \neq f'_-(-2) \Rightarrow f'(-2) \text{ ندارد وجود}$$

بنابراین تابع $f(x)$ دارای سه نقطه بحرانی $A(1, 0)$ ، $B(-1, -4)$ و $C(-2, 0)$ است. مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BH \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{12}{2} = 6$$



می‌دانیم به ازای $-1 \leq x \leq 1$ همواره $\cos x > 0$ است؛ ازطرفی به ازای هر x ، $|x| \geq 0$ است، بنابراین به ازای $x \in [-1, 1]$ نامساوی $-|x| \cos x \leq 0$ برقرار است.
می‌دانیم بیشترین مقدار یک عبارت نامثبت برابر صفر است، بنابراین در بازه $[-1, 1]$ به ازای $x = 0$ ، ماکزیمم مقدار تابع $f(x)$ برابر صفر خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

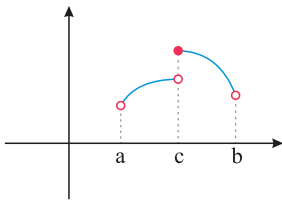
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

نقطه‌ای از دامنه تعریف تابع f که به ازای آن تابع بیشترین (کمترین) مقدارش را می‌پذیرد، اکسترمم مطلق این تابع نامیده می‌شود.

گام دوم

باتوجه به نمودار زیر، نقطه $x = c$ اکسترمم مطلق تابع f است و تابع در همسایگی این نقطه تعریف شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید تابع f در این نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است، همچنین مماس افقی ندارد.



بنابراین نقطه $x = c$ تنها می‌تواند یک نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد.

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدوده تغییر مقادیر $f(x)$ بر روی دامنه تعریف آن است. مقادیر $f(x)$ میان ماکزیمم و مینیمم مطلق این تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x + |x|) \sqrt{\frac{2-x}{x}} \quad : \quad \frac{2-x}{x} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 2 \Rightarrow D_f = (0, 2]$$

به ازای $0 < x \leq 2$ ، $|x| = x$ است، پس ضابطه تابع $f(x)$ را می‌توان چنین ساده کرد:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + |x|) \sqrt{\frac{2-x}{x}} = (x + x) \sqrt{\frac{2-x}{x}} = 2x \sqrt{\frac{2-x}{x}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{x^2(2-x)}{x}} = 2 \sqrt{2x - x^2} \end{aligned}$$

تذکر: چون $x > 0$ است، پس می‌توان توان دوم آن را زیر رادیکال برد.

تابع $f(x)$ بر روی دامنه‌اش پیوسته است. برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق $f(x)$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع را یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین در نقطه $x = 2$ محاسبه می‌کنیم. ضابطه تابع $f'(x)$ و ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = 2 \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 - 2x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 2 \sqrt{2 - 1} = 2$$

$$f(2) = 2 \sqrt{4 - 4} = 0$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ بازه $[0, 2]$ است.

$$\Delta_f = (2 - m)^2 - 2(m^2 - 1) > 0 \Rightarrow 19m^2 + 4m - 24 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2 - 2\sqrt{115}}{19} < m < \frac{-2 + 2\sqrt{115}}{19}, m \in (-1, 1) \Rightarrow m \in (-1, 1)$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{m - 2}{m^2 - 1} \Rightarrow S' = \frac{m^2 - 1 - 2m(m - 2)}{(m^2 - 1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow -m^2 + 4m - 1 = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

m	$-\infty$	-1	$2 - \sqrt{3}$	1	$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
S'		-	0	+		
S			min			

$$\Rightarrow m = 2 - \sqrt{3}, \Delta_f > 0 \text{ min}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

باتوجه به اینکه تابع f در نقطه $x = c$ مشتق راست دارد پس حتماً در همسایگی راست این نقطه تعریف شده است. نقطه $x = c$ مینیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین به ازای هر x عضو همسایگی راست این نقطه داریم:

$$\begin{cases} x > c \\ f(x) \geq f(c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - c > 0 \\ f(x) - f(c) \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

طبق تعریف مشتق راست در نقطه $x = c$ داریم:

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \xrightarrow{(*)} f'_+(c) \geq 0$$

بنابراین مشتق راست تابع f در نقطه $x = c$ الزاماً نامنفی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) باتوجه به خواص تابع جزء صحیح می‌دانیم: $0 \leq x - [x] < 1$
 ب) هرگاه f تابعی اکیداً صعودی باشد، به ازای هر $x < y$ داریم: $f(x) < f(y)$

گام دوم

باتوجه به قسمت "الف" از گام اول می‌توان نوشت:

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 < [x] - x \leq 0 \Rightarrow -1 < f(x) \leq 0$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{[x]-x}$$

چون g تابعی اکیداً صعودی است، پس داریم:

$$-1 < f(x) \leq 0 \xrightarrow{g \text{ اکیداً صعودی}} g(-1) < g(f(x)) \leq g(0)$$

$$\Rightarrow 2^{-1} < 2^{[x]-x} \leq 2^0 \Rightarrow \frac{1}{2} < 2^{[x]-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < g \circ f \leq 1$$

بنابراین تابع $g \circ f$ دارای ماکزیمم و فاقد مینیمم است.

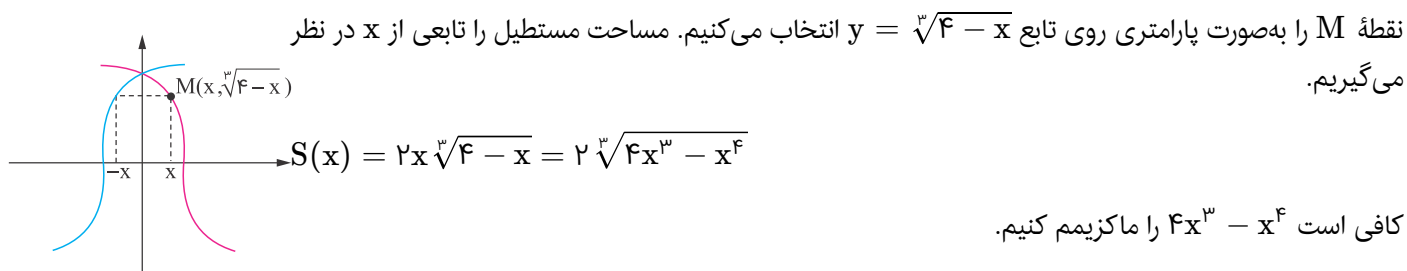
$$f(x) = \frac{x^f - 3}{x^2 - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{fx^f(x^2 - 2) - 2x(x^f - 3)}{(x^2 - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x(2x^f - fx^2 - x^f + 3)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x(x^f - fx^2 + 3)}{(x^2 - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1)(x^2 - 3)}{(x^2 - 2)^2}$$

x	-۲	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-۱	۰	۱	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	۲
f'	-	۰	+	$\frac{3}{2}$	+	۰	-	۰	+

در چهار بازه، تابع اکیداً نزولی است.



$$g(x) = 4x^3 - x^6 \Rightarrow g'(x) = 12x^2 - 6x^5 = 0 \xrightarrow{x>0} x = 3$$

$$S_{\max} = S(3) = 2 \times 3 \sqrt[3]{4-3} = 6$$

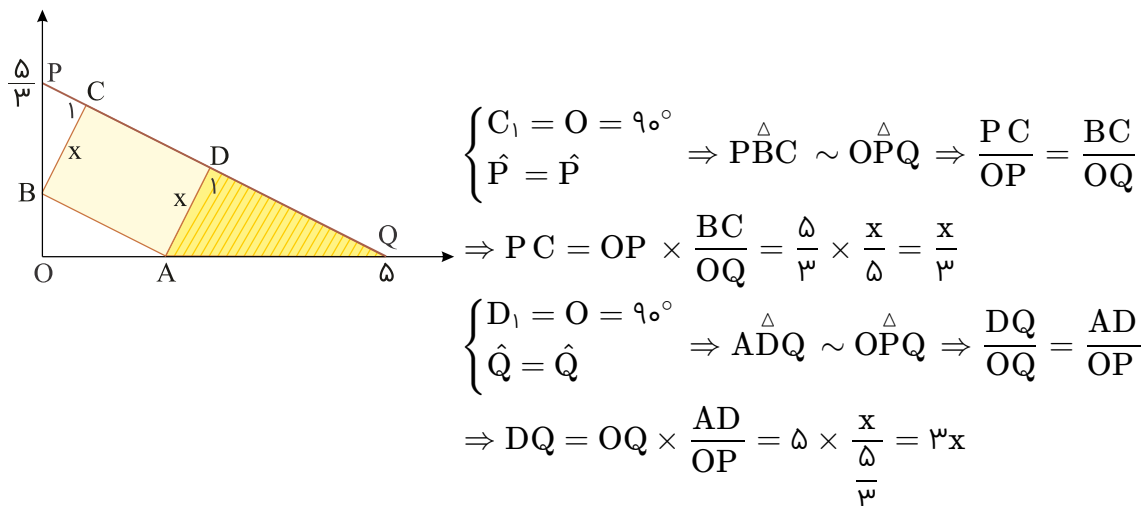
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

$$y = x^3 - 12x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

x	$-\infty$	-۲	۲	$+\infty$
y'		+	-	+
y		↗ ۱۸	↘ -۱۴	↗

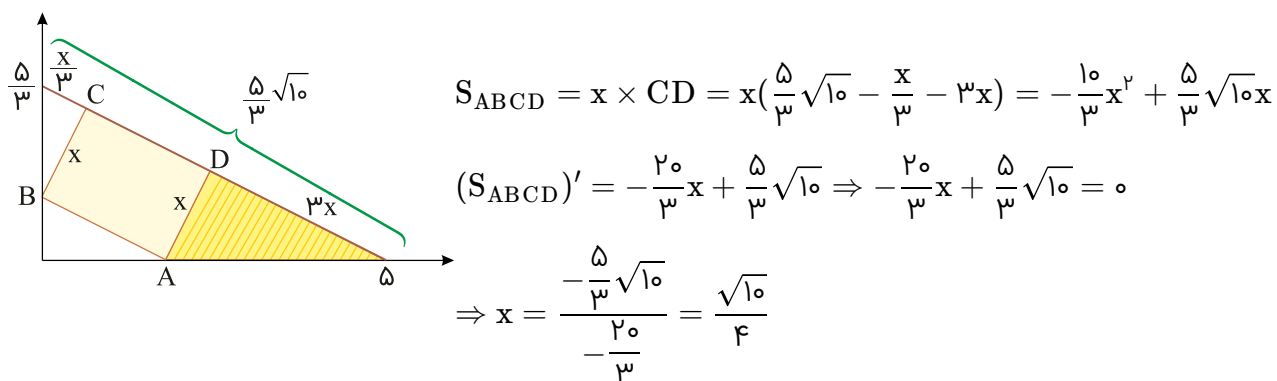
بنابراین مقدار مینیمم نسبی برابر ۱۴- است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳



$$PQ = \sqrt{25 + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{10 \times 25}{9}} = \frac{5}{3} \sqrt{10}$$

$$CD = \frac{5}{3} \sqrt{10} - \frac{x}{3} - 3x$$



حداکثر S در $x = \frac{\sqrt{10}}{4}$ رخ می‌دهد، پس مساحت هاشورخورده برابر است با:

$$\frac{1}{2} x \times 3x = \frac{3}{2} x^2 = \frac{3}{2} \times \frac{10}{16} = \frac{15}{16}$$

$$f(0) = ۴ \Rightarrow c = ۴$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \\ f'(x) = 0 \Rightarrow ۳x^۲ + ۲ax = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{۲a}{۳} \end{cases} \end{cases}$$

$$f\left(-\frac{۲a}{۳}\right) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{۲a}{۳}\right)^۳ + a\left(-\frac{۲a}{۳}\right)^۲ + ۴ = 0$$

$$-\frac{۸a^۳}{۲۷} + \frac{۴a^۳}{۹} + ۴ = 0 \Rightarrow \frac{۴a^۳}{۲۷} = -۴ \Rightarrow a^۳ = -۲۷$$

$$\Rightarrow a = -۳ \Rightarrow x_{\min} = -\frac{۲a}{۳} = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

گام اول

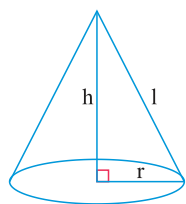
الف) حجم مخروطی به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ب) مقدار جنس مصرفی برای ساخت یک مخروط معادل مساحت جانبی آن است.

ج) مساحت جانبی مخروطی به شکل زیر برابر است با:

$$S = \pi r l$$



گام دوم

برای اینکه در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت کمترین مقدار جنس مصرف شود باید مساحت جانبی آن را مینیمم کنیم. باتوجه به اینکه حجم مخروط برابر $\frac{\pi}{3}$ است، رابطه‌ای بین شعاع قاعده مخروط و ارتفاع مخروط به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \Rightarrow r^2 h = 1 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{h} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad (I)$$

برای محاسبه مساحت جانبی مخروط ابتدا لازم است اندازه l را به دست آوریم. با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + h^2} \quad (II)$$

اکنون با استفاده از رابطه مساحت جانبی و با جایگذاری دو رابطه (I) و (II) در آن داریم:

$$S = \pi r l \xrightarrow{(II)} S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \xrightarrow{(I)} S = \pi \times \frac{1}{\sqrt{h}} \times \sqrt{\frac{1}{h} + h^2} = \frac{\pi \sqrt{h^3 + 1}}{h}$$

برای مینیمم کردن مساحت جانبی، از S نسبت به h مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \pi \times \frac{\frac{3h^2}{2\sqrt{h^3+1}} \times h - \sqrt{h^3+1}}{h^2} = \frac{\pi}{h^2} \left(\frac{3h^3 - 2h^3 - 2}{2\sqrt{h^3+1}} \right) = \frac{\pi}{h^2} \left(\frac{h^3 - 2}{2\sqrt{h^3+1}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow h^3 - 2 = 0 \Rightarrow h^3 = 2 \Rightarrow h = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین به ازای ارتفاع $h = \sqrt[3]{2}$ در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت $\frac{\pi}{3}$ ، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود.

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطه بحرانی تابع f باشد؛ همچنین فرض کنیم f بر بازه I شامل c پیوسته و بر این بازه به جز احتمالاً در c مشتق پذیر باشد. در این صورت c طول نقطه اکسترمم نسبی تابع f است، هرگاه $f'(x)$ قبل و بعد از c تغییر علامت داده باشد.
 ب) نقطه $c \in D_f$ ، نقطه بحرانی تابع f است؛ هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-a\}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x + a) - (x^2 - 2x)}{(x + a)^2} = \frac{x^2 + 2ax - 2a}{(x + a)^2}$$

بررسی می‌کنیم به ازای چه مقادیری از a ، معادله $f'(x) = 0$ دارای ریشه ساده است.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2ax - 2a}{(x + a)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2ax - 2a = 0$$

این معادله درجه دو ریشه ساده خواهد داشت هرگاه $\Delta > 0$ باشد، پس داریم:

$$(2a)^2 - 4(1)(-2a) > 0 \Rightarrow 4a^2 + 8a = 4a(a + 2) > 0$$

a		-2		0	
$4a(a + 2)$	+	0	-	0	+

بنابراین به ازای $-2 < a < 0$ یا $a > 0$ ، تابع f دارای اکسترمم نسبی است.

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطه بحرانی تابع f باشد. همچنین فرض کنیم f بر بازه I شامل c پیوسته و بر این بازه به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است هرگاه $f'(x)$ قبل از c مثبت و بعد از c منفی باشد.
 ب) نقطه $c \in D_f$ را نقطه بحرانی تابع f گوییم هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

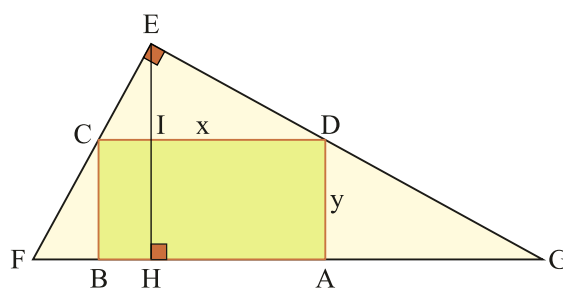
$$y = x^f + \frac{f}{3}x^3 - fx^2 \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

ابتدا با حل معادله $y' = 0$ طول نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$y' = 3x^2 + 3x^2 - 2x \xrightarrow{y'=0} 3x(x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y			$\swarrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$			
			min		max		min		

بنابراین طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع برابر صفر است.



$$EF = a, EG = \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow FG = \sqrt{a^2 + (\sqrt{a})^2} = \sqrt{2a}$$

$$\Rightarrow EF \times EG = EH \times FG \Rightarrow EH = \frac{\sqrt{a} \times a}{\sqrt{2a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{CD}{FG} = \frac{EI}{EH} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2a}} = \frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} - y}{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} - y \Rightarrow y = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$S = xy = x\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

$$S' = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} - \frac{2x}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{a}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{\sqrt{a}}{2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{a}}{2}}{\frac{\sqrt{a}}{2}} = 1 = \frac{1}{1}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

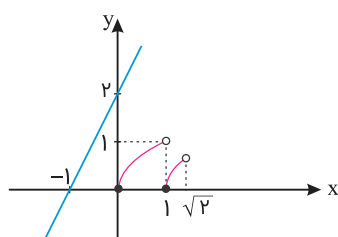
دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x - [x]^2}$ به صورت $D_f = [0, \sqrt{2})$ است. داریم:

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \\ 1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x-1} \end{cases}$$

حال نمودار خط و منحنی را رسم می‌کنیم:

$$y = 2x + 2$$

x	۰	-۱
y	۲	۰



بنابراین به نظر می‌رسد کوتاه‌ترین فاصله مربوط به $0 \leq x < 1$ است که منحنی به صورت $y = \sqrt{x}$ می‌باشد. نقطه دلخواه روی منحنی به صورت $A(x, \sqrt{x})$ است، پس:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2x - \sqrt{x} + 2|}{\sqrt{5}}$$

قدر مطلق در $y' = 0$ اثری ندارد، پس:

$$AH' = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

پس:

$$AH_{\min} = \frac{\left| \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 2 \right|}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{15}{16}}{\sqrt{5}} \times \frac{15\sqrt{5}}{1 \times 5} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

اگر $x \geq 0$ باشد:

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x} + x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 \geq 0 \Rightarrow x \neq 0 \quad (1)$$

اگر $x < 0$ باشد:

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \geq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \xrightarrow{\cap(x < 0)} -1 \leq x < 0 \quad (2)$$

اجتماع جواب‌های به‌دست‌آمده $(0, +\infty) \cup [-1, 0)$ است، اما جواب درست $[-1, +\infty)$ است، زیرا $x = 0$ در دامنه تابع قرار دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی از دامنه تعریف این تابع است که $f'(x) = 0$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد.

گام دوم:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow \begin{cases} 1+x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

حال ضابطه $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{\frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

معادله $f'(x) = 0$ جواب ندارد. همچنین $f'(x)$ فقط به ازای $x = 0$ تعریف نشده است اما $x = 0$ عضو دامنه تعریف تابع $f(x)$ نیست پس نقطه بحرانی محسوب نمی‌شود، بنابراین تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ بر روی دامنه تعریف آن برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$$

تابع f در $x = 1$ مجانب قائم دارد. پس نمی‌تواند در فاصله $(1, +\infty) \cup (0, 1)$ اکیداً صعودی باشد و گزینه ۱ حذف می‌شود.

برای $x > 1$ یا $0 < x < 1$ ، $x^2 - 1$ صعودی، در نتیجه $2\sqrt[3]{x^2-1}$ هم صعودی و مثبت است. نزولی و در نتیجه $\frac{3}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

صعودی است. $2\sqrt{x}$ هم که صعودی است، پس $2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$ هم صعودی می‌شود و گزینه ۳ و ۴ حذف می‌شوند.

راه حل دوم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

اگر $x > 0$ باشد، $f'(x)$ همواره مثبت است.

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلق $|x^2 - 1|$ روی بازه $[-2, 2]$ ، ضابطه تابع را ساده‌تر می‌کنیم. برای تعیین نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، کافی است نقاطی که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف نشده باشد را بیابیم.

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \\ x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x(x^2 - 1) & ; x \geq 1, x \leq -1 \\ -x(x^2 - 1) & ; -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - x & ; x \geq 1, x \leq -1 \\ -x^3 + x & ; -1 < x < 1 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ پیوسته است، پس ضابطه $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & ; x > 1, x < -1 \\ -3x^2 + 1 & ; -1 < x < 1 \end{cases}$$

اکنون ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 1, x < -1 : 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ غ.ق.ق} \\ -1 < x < 1 : -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

دقت کنید که در ضابطه اول، چون ریشه‌های به دست آمده در محدوده تعریف شده برای x قرار نمی‌گیرند پس قابل قبول نیستند. بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف نشده است:

$$x = 1 : f'_+(1) = 3 - 1 = 2, f'_-(1) = -3 + 1 = -2 \Rightarrow \text{مشتق ناپذیر}$$

$$x = -1 : f'_+(-1) = -3 + 1 = -2, f'_-(-1) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \text{مشتق ناپذیر}$$

همچنین تابع در نقاط ابتدا و انتهای بازه $[-2, 2]$ بحرانی است.

بنابراین تابع $f(x)$ دارای ۶ نقطه بحرانی $x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x = 1, x = -1, x = 2, x = -2$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

$$y = \begin{cases} \frac{x}{1 - x^2} & ; x \geq 0 \\ \frac{x}{1 + x^2} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2} & ; x \geq 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 1 + x^2 = 0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \\ \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} & ; x < 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

پس فقط یک نقطه بحرانی دارد.

تذکر: ضابطه اول y' در $x = 1$ مشتق ندارد، اما چون عضو دامنه f نیست بحرانی نمی‌باشد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

دامنه تابع $D_f = [0, \frac{a}{2}]$ است.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{a-2x}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{a-2x}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{4}{a-2x}$$

$$\Rightarrow 2x = a - 2x \Rightarrow x = \frac{a}{4} \in [0, \frac{a}{2}]$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{0, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}\}$ می باشد. اکنون مقادیر نقاط بحرانی را حساب می کنیم.

$$f(0) = \sqrt{a}, f(\frac{a}{4}) = \sqrt{\frac{a}{4}} + \sqrt{a - \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$$

$$f(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$$

بنابراین $\max f(x) = \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$ و $\min f(x) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$ است. پس:

$$\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}\sqrt{a}}{\sqrt{2}} = \sqrt{12} \Rightarrow \frac{3a\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow [a] = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

ریشه های مشتق تابع باید ۲- و صفر باشد.

$$y' = 3x^2 + 2ax - 2b$$

پس:

$$\xrightarrow{(0,0)} b = 0$$

$$\xrightarrow{(-2,0)} 3(-2)^2 + 2a(-2) = 0 \Rightarrow 12 - 4a = 0 \Rightarrow a = 3$$

حال ریشه های مشتق را در تابع اصلی جایگذاری می کنیم:

$$y = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{x=0} (0, -4) \\ \xrightarrow{x=-2} (-2, 0) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{فاصله}} \sqrt{(-2-0)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

A نقطه : (a, a^2)

A' نقطه : (a^2, a)

$$y = x \text{ با } f \text{ تقاطع } \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow a \in (0, 1)$$

$$AA' = \sqrt{(a^2 - a)^2 + (a - a^2)^2} = \sqrt{2} |a^2 - a|$$

$$\xrightarrow{a \in (0, 1)} \sqrt{2} (a - a^2) = -\sqrt{2} a^2 + \sqrt{2} a$$

$$\xrightarrow{\max} \frac{-\Delta}{2a} = -\frac{\sqrt{2} - 0}{2(-\sqrt{2})} = \frac{2}{-4\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

چون طول پاره خط مدنظر است، پس مثبت در نظر می گیریم.
تذکر: با استفاده از مشتق AA' نیز می توان به جواب رسید.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

$$g(x) = \frac{x^2(x^2 - 4)}{x^2 - 1} = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 1}$$

$$g'(x) = \frac{(4x^3 - 8x)(x^2 - 1) - 2x(x^4 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x[(2x^2 - 4)(x^2 - 1) - x^4 + 4x^2]}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^4 - 2x^2 + 4)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & ; |x| \geq 2 \\ -g(x) & ; |x| < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g'(x) & ; |x| > 2 \\ -g'(x) & ; |x| < 2 \end{cases}$$

تابع f' در سه نقطه $x = 2, x = -2, x = 0$ تغییر علامت می دهد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

نقطه $B(x, \sqrt{2x+7})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصله نقطه $A(5, 0)$ را از نقطه B محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+7}-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 7} = \sqrt{x^2 - 8x + 32} \end{aligned}$$

برای به دست آوردن کمترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

$$(AB)' = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}$$

$$(AB)' = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow B(4, \sqrt{15})$$

کمترین فاصله نقطه A از منحنی، برابر است با فاصله دو نقطه A و B . در نتیجه داریم:

$$A(5, 0), B(4, \sqrt{15}) \Rightarrow AB = \sqrt{(5-4)^2 + (0-\sqrt{15})^2} = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

$$f'(x) = 1 + \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{4x-x^2} = x-2 \quad (*)$$

باتوجه به معادله باید $x-2 \geq 0$ باشد، یعنی: $x \geq 2$
حال معادله (*) را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 8 = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} & \text{قابل قبول} \\ x = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} & (x \geq 2 \text{ زیرا}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(2 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{4(2 + \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2})^2}$$

$$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}) \text{ ماکزیمم نسبی}$$

حال فاصله نقطه A را از نیمساز ناحیه اول یعنی $y = x$ به دست می‌آوریم:

$$x - y = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 + \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

طول ضلع قاعده را a و ارتفاع را h می‌نامیم، داریم:

$$V = a^2 h = 4 \Rightarrow h = \frac{4}{a^2}$$

مقدار حلب برابر $4ah + a^2$ است:

$$S = 4ah + a^2 = \frac{16}{a} + a^2$$

مشتق می‌گیریم و برابر صفر می‌گذاریم:

$$S = \frac{16}{a} + a^2 \Rightarrow S' = -\frac{16}{a^2} + 2a = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow h = 1$$

$$S = 8 + 4 = 12$$

پس مقدار حلب برابر ۱۲ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

$$y' = 0 \Rightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

ریشه‌های این معادله ۰ و ۱ هستند، پس $c = 0$ است. داریم:

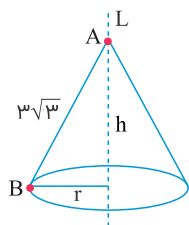
$$3ax^2 + 2bx = 0 \xrightarrow{x=1} 3a + 2b = 0$$

ازطرفی چون $(0, 0)$ در تابع صدق می‌کند، پس $d = 0$ است.

$$y = ax^3 + bx^2 \xrightarrow{(1,1)} 1 = a + b$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow ab = -6$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱



$$r^2 + h^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27 \Rightarrow r^2 = 27 - h^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(27 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(27h - h^3)$$

$$V' = 0 \Rightarrow 27 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

$$A(-1, 1) : 1 = (-1)^2 - 1 + 3a(-1)^2 + b$$

$$\Rightarrow 1 + 3a + b = 1 \Rightarrow 3a + b = 0 \quad (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1) = 0 \\ x = -1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = -x^3 + 3ax^2 + b$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6ax \xrightarrow{x=-1} f'(-1) = -3 - 6a = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$\xrightarrow{*} 3\left(\frac{-1}{2}\right) + b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = -3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

نقطه $(1, -2)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع $f(x)$ صدق می‌کند:

$$f(x) = \frac{a}{x} + bx^2 \xrightarrow{x=1, y=-2} -2 = a + b \quad (I)$$

می‌دانیم هر نقطه اکسترمم نسبی، یک نقطه بحرانی تابع است بنابراین $x = 1$ در معادله $f'(x) = 0$ صدق می‌کند یعنی $f'(1) = 0$ است:

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} -a + 2b = 0 \Rightarrow a = 2b \quad (II)$$

با جایگذاری رابطه (II) در رابطه (I) داریم:

$$a + b = -2 \xrightarrow{a=2b} 2b + b = -2 \Rightarrow 3b = -2 \Rightarrow b = \frac{-2}{3}$$

$$\xrightarrow{a=2b} a = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{4}{3x} - \frac{2}{3}x^2, \quad f'(x) = \frac{4}{3x^2} - \frac{4}{3}x$$

اکنون با تعیین علامت تابع $f'(x)$ ، نوع اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

x	1
f'(x)	+ 0 -
f(x)	↗ ↘ max

بنابراین به ازای $a = -\frac{4}{3}$ ، نقطه $(1, -2)$ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ است.

چون دامنه تابع $[-1, 3]$ است، پس $x_1 = 3$ و $x_2 = -1$ ریشه‌های معادله $-x^2 + ax + b = 0$ هستند.

$$x_1 + x_2 = \frac{-a}{-1} \Rightarrow -1 + 3 = a \Rightarrow a = 2$$

$$x_1 x_2 = \frac{b}{-1} \Rightarrow -1 \times 3 = -b \Rightarrow b = 3$$

طبق نمودار، مشاهده می‌کنید که مشتق تابع در ماکزیمم صفر است.

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x + 2}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = 0 \Rightarrow \frac{x - 1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = (x - 1)^2 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$x = 1 + \sqrt{2}$ قابل قبول است.

$$f(1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{-(1 + \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2}) + 3}$$

$$= 1 + \sqrt{2} + \sqrt{-1 - 2 - 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 3} = 1 + 2\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

تابع چندجمله‌ای $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ و ازجمله روی بازه $(1, 4)$ پیوسته است. برای یافتن طول نقاط اکسترمم این تابع، کافی است معادله $f'(x) = 0$ را حل کنیم.

همچنین می‌دانیم در معادله $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 8 = 0$ حاصل ضرب جواب‌ها برابر است با: $\frac{c}{a} = \frac{-8}{3} < 0$ ، پس یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. درنتیجه جواب مثبت در بازه $(1, 4)$ قرار دارد. حال داریم:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 24}}{3}$$

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 24}}{3} \text{ مثبت است، پس در بازه } (1, 4) \text{ قرار دارد:}$$

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 24}}{3} \Rightarrow 1 < \frac{-a + \sqrt{a^2 + 24}}{3} < 4$$

$$1) \quad 1 < \frac{-a + \sqrt{a^2 + 24}}{3} \Rightarrow -a + \sqrt{a^2 + 24} > 3 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 24} > 3 + a$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} a^2 + 24 > a^2 + 6a + 9 \Rightarrow 6a < 15 \Rightarrow a < 2.5 \quad (I)$$

$$2) \quad \frac{-a + \sqrt{a^2 + 24}}{3} < 4 \Rightarrow -a + \sqrt{a^2 + 24} < 12 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 24} < 12 + a$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} a^2 + 24 < a^2 + 24a + 144 \Rightarrow 24a > -120 \Rightarrow a > -5 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} -5 < a < 2.5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

راه حل اول: برای یافتن مینیمم مقدار y ، ابتدا معادله $y' = 0$ را حل می‌کنیم:

$$y = \frac{3a + x}{\sqrt[3]{a^3 x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^3}} \frac{3a + x}{\sqrt[3]{x}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{a^3}} \times \frac{\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(3a + x)}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{3x - (3a + x)}{3\sqrt[3]{x^6}} = \frac{2x - 3a}{3\sqrt[3]{x^6}}$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 2x - 3a = 0 \Rightarrow x = \frac{3a}{2}$$

چون a مقداری مثبت است، جدول تعیین علامت y' به صورت زیر می‌باشد:

	a		
y'	$-$	0	$+$
			

بنابراین y در نقطه $x = a$ مینیمم است، در نتیجه داریم:

$$y(a) = \frac{3a + a}{\sqrt[3]{a^3 a}} = \frac{4a}{a} = 4$$

راه حل دوم: a مقداری ثابت است پس به ازای تمام مقادیر x ، a فقط یک مقدار می‌پذیرد. برای سادگی حل a را مقداری انتخاب می‌کنیم که به ازای آن، گزینه‌ها یکسان نشوند. با انتخاب $a = 2$ ، چهار گزینه مقدار متفاوتی خواهند داشت و همچنین داریم:

$$y = \frac{6 + x}{\sqrt[3]{\lambda x}}$$

برای یافتن مینیمم مقدار y ابتدا معادله $y' = 0$ را حل می‌کنیم:

$$y = \frac{6 + x}{\sqrt[3]{\lambda x}} = (6 + x)(\lambda x)^{-\frac{1}{3}}$$

$$y' = (\lambda x)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(6 + x)(\lambda x)^{-\frac{4}{3}} = (\lambda x)^{-\frac{4}{3}}(\lambda x - 12 - 2x) = \frac{6x - 12}{\sqrt[3]{(\lambda x)^4}}$$

$$y' = 0 \xrightarrow{x \neq 0} 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

مینیمم مقدار تابع برابر با $y(2)$ است و داریم:

$$y(2) = \frac{6 + 2}{\sqrt[3]{\lambda(2)}} = \frac{\lambda}{\sqrt[3]{16}} = \frac{\lambda}{\sqrt[3]{2^4}} = \frac{\lambda}{2} = 4$$

راه حل سوم:

نکته: به ازای n عدد $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ داریم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

باتوجه به نکته داریم:

$$f(x) = \underbrace{\frac{a}{\sqrt[3]{a^3 x}}}_{x_1} + \underbrace{\frac{a}{\sqrt[3]{a^3 x}}}_{x_2} + \underbrace{\frac{a}{\sqrt[3]{a^3 x}}}_{x_3} + \underbrace{\frac{x}{\sqrt[3]{a^3 x}}}_{x_4}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گزینه ۳

۵۶

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

اکسترمم‌های تابع در $x = 2$ و $x = -1$ رخ می‌دهند.

$$f(-1) = 8 \Rightarrow \max : (-1, 8) \quad f(2) = -19 \Rightarrow \min : (2, -19)$$

$$AB \text{ شیب} : \frac{8 - (-19)}{-1 - 2} = \frac{27}{-3} = -9$$

مشتق را برابر -9 قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

۲ نقطه با این ویژگی وجود دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

گزینه ۴

۵۷

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 8} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^3(x^3 - 8) - 3x^4 x^3}{(x^3 - 8)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^3(4x^3 - 3x^3 - 24)}{(x^3 - 8)^2} = \frac{x^3(x^3 - 24)}{(x^3 - 8)^2}$$

x	$-\infty$	۰	۲	$\sqrt[3]{24}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	۰	-	۰	+

تابع در بازه‌های $[0, 2]$ و $[2, \sqrt[3]{24}]$ نزولی اکید است. طول بازه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$2 - 0 = 2$$

$$\sqrt[3]{24} - 2 = \sqrt[3]{8 \times 3} - 2 = 2(\sqrt[3]{3} - 1) \simeq 1/17$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

نقاط بحرانی تابع $f(x) = x|3 - x^2|$ را حساب می‌کنیم:

$$3 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \in D \\ x = -\sqrt{3} \notin D \end{cases}$$

$$(x(3 - x^2))' = 0 \Rightarrow (3x - x^3)' = 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in D \\ x = -1 \in D \end{cases}$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{-1, 1, \sqrt{3}, -1/5\}$ خواهد بود.

$$f(1) = 2, f(-1) = -2, f(\sqrt{3}) = 0$$

$$f(-1/5) = f(-\frac{1}{5}) = -\frac{1}{5}|3 - \frac{1}{25}| = -\frac{1}{5}|3 - \frac{1}{25}| = -\frac{1}{5} \times \frac{74}{25} = -\frac{74}{125}$$

کمترین مقدار تابع -2 خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

نقطه A را $A(x, \sqrt[3]{-x})$ با فرض $x \in [0, 1]$ در نظر می‌گیریم، در این صورت $A'(\sqrt[3]{x}, -x)$ خواهد بود.

$$AA' = \sqrt{(x - \sqrt[3]{x})^2} \times 2 = \sqrt{2} \underbrace{|x - \sqrt[3]{x}|}_{g(x)}$$

$$g(x) = x - \sqrt[3]{x}, x \in [0, 1]$$

حال بیشترین مقدار $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{27} \Rightarrow x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$g(0) = g(1) = 0, g\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{3\sqrt{3}}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$$

$$\max(AA') = \sqrt{2} \left| \frac{-2}{3\sqrt{3}} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$y = (x-1)^2 \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y' = 2(x-1)(x^{\frac{2}{3}}) + (x-1)^2 \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) \Rightarrow y' = \frac{6(x-1)x + 2(x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{صورت} = 0 \Rightarrow 2(x-1)(3x + (x-1)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

باتوجه به گزینه‌ها $x = \frac{1}{4}$ جواب مسئله است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

برای یافتن بیشترین و کمترین مقدار تابع پیوسته $f(x)$ روی بازه $[1, 3]$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی است که $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد. داریم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + k \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

چون $[1, 3] \ni 0$ پس تنها نقطه $x = 2$ قابل قبول است؛ همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازه هم بحرانی‌اند. بنابراین داریم:

$$f(1) = 1 - 3 + k = k - 2$$

$$f(2) = 8 - 12 + k = k - 4$$

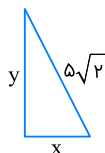
$$f(3) = 27 - 27 + k = k$$

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ برابر k و کمترین مقدار آن برابر $k - 4$ است. این دو مقدار قرینه یکدیگرند؛ پس:

$$k = -(k - 4) \Rightarrow k = -k + 4 \Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow k = 2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

مثلث قائم الزاویه‌ای با طول اضلاع قائم x و y ، به صورت زیر در نظر می‌گیریم. طبق رابطه فیثاغورس داریم:



$$x^2 + y^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 50$$

$$\Rightarrow y^2 = 50 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{50 - x^2}$$

$$\Rightarrow f = 3x + 4y = 3x + 4\sqrt{50 - x^2}$$

برای یافتن ماکزیمم مقدار تابع $f(x) = 3x + 4\sqrt{50 - x^2}$ ، مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = 3 + 4\left(\frac{-2x}{2\sqrt{50 - x^2}}\right) = 3 - \frac{4x}{\sqrt{50 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 = \frac{4x}{\sqrt{50 - x^2}} \Rightarrow 3\sqrt{50 - x^2} = 4x \xrightarrow{x > 0} 9(50 - x^2) = 16x^2$$

$$\Rightarrow 450 - 9x^2 = 16x^2 \Rightarrow 25x^2 = 450 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18}$$

$$y = \sqrt{50 - x^2} = \sqrt{50 - 18} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$f_{\max} = 3x + 4y = 3(3\sqrt{2}) + 4(4\sqrt{2}) = 9\sqrt{2} + 16\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

برای تعیین اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ و نوع آن‌ها از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.
ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و با حل معادله $f'(x) = 0$ ، نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 4x + \frac{8}{3}) = 0 \Rightarrow 3(x-1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x-1)(x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow 3(x-1)^2(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

اکنون با تعیین علامت $f'(x)$ ، اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$		↘	↗	↘

min

باتوجه به جدول فوق، تابع $f(x)$ فقط دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در نقطه $x = 2$ می‌باشد زیرا علامت $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه عوض شده است. دقت کنید که $x = 1$ ریشهٔ معادله $f'(x) = 0$ است اما چون $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه تغییر علامت نداده پس این نقطه اکسترمم نسبی تابع محسوب نمی‌شود.

عبارت $x^2 - 3$ روی بازه $[-1, 1]$ همواره منفی است بنابراین داریم:

$$x \in [-1, 1] : |x^2 - 3| = -(x^2 - 3) = 3 - x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = x |x^2 - 3| = x(3 - x^2) = 3x - x^3$$

حال معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x) = 3 - 3x^2 \xrightarrow{f'(x)=0} 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)		-	+	-
f(x)		↘	↗	↘

تابع $f(x)$ در بازه $[-1, 1]$ صعودی و پیوسته است؛ بنابراین $f(-1) = -2$ مینیمم مطلق تابع و $f(1) = 2$ ماکزیمم مطلق تابع روی این بازه است. نقاط $x = -1$ و $x = +1$ چون نقاط ابتدا و انتهای بازه هستند اکسترم‌های نسبی تابع $f(x)$ محسوب نمی‌شوند پس گزینه سوم نادرست است.

ابتدا عبارت درون قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

x	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$x^2 - 3$	+	-

$$\Rightarrow |x^2 - 3| = \begin{cases} x^2 - 3 & ; x \geq \sqrt{3} \text{ یا } x \leq -\sqrt{3} \\ -x^2 + 3 & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & ; x \geq \sqrt{3} \text{ یا } x \leq -\sqrt{3} \\ -x^3 + 3x & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی تابع، نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم؛ بنابراین مشتق تابع را محاسبه و معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & ; x > \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3} \\ -3x^2 + 3 & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3} : 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} : -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

حال مشتق‌پذیری تابع را در دو نقطه $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ نیز بررسی می‌کنیم:

$$f'_+(\sqrt{3}) = 6, \quad f'_-(\sqrt{3}) = -6 \Rightarrow f'_+(\sqrt{3}) \neq f'_-(\sqrt{3})$$

$$f'_+(-\sqrt{3}) = -6, \quad f'_-(-\sqrt{3}) = 6 \Rightarrow f'_+(-\sqrt{3}) \neq f'_-(-\sqrt{3})$$

تابع $f(x)$ در دو نقطه $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ مشتق‌پذیر نیست. داریم:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	-	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
		max	min	max	min	

بنابراین مجموعه نقاط ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ به صورت $\{-\sqrt{3}, 1\}$ است.

هرگاه $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد آنگاه نقاط بحرانی تابع $y = |f(x)|$ ، ریشه‌های ساده دو معادله $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ خواهد بود.

$$f(x) = |x^3 - x|$$

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

$$(x^3 - x)' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

همچنین تابع در ابتدا و انتهای بازه $[-1, 2]$ نیز بحرانی است، بنابراین تابع $f(x) = |x^3 - x|$ روی بازه $[-1, 2]$ دارای شش نقطه بحرانی است. $x = 0, x = 1, x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x = -1$ و $x = 2$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{2x^3} + 2x + 2x^2 + 2 - \cancel{2x^3} - 4x^2 + 6x = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 20 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

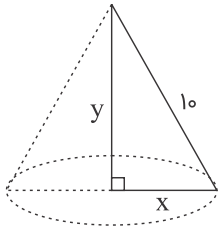
x	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
f'	-	+	-	
f		$\searrow$ min	$\nearrow$ max	

$$f(2+\sqrt{5}) = \frac{(2+\sqrt{5})^2 + 4 + 2\sqrt{5} - 3}{(2+\sqrt{5})^2 + 1}$$

$$= \frac{9 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 1}{9 + 4\sqrt{5} + 1} = \frac{10 + 6\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} \times \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}} = -1 + \sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^2 + y^2 = l_0^2 \Rightarrow x^2 = l_0^2 - y^2 \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمه آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y \xrightarrow{(*)} V = \frac{1}{3}\pi (l_0^2 - y^2)y = \frac{\pi}{3}(l_0^2 y - y^3)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V' = \frac{\pi}{3}(l_0^2 - 3y^2) \Rightarrow \frac{\pi}{3}(l_0^2 - 3y^2) = 0$$

$$\Rightarrow l_0^2 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{l_0^2}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 = l_0^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = l_0^2 - \frac{l_0^2}{3} = \frac{3l_0^2 - l_0^2}{3} = \frac{2l_0^2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{\frac{2l_0^2}{3}}{\frac{l_0^2}{3}} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

در توابع چندجمله‌ای نقاط بحرانی از حل معادله $y' = 0$ به دست می‌آید، لذا:

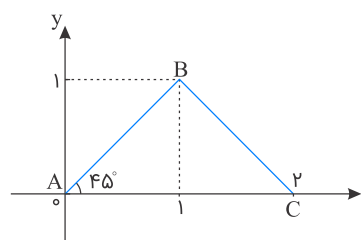
$$f(x) = x^2(x-2)^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(x-2)^2 + 2(x-2)(x^2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(x-2)(x-2+x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 1, 2$$

$$A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad B \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad C \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$



$$\Rightarrow AB = BC$$

باتوجه به شکل و اینکه $AB = BC$ ، مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی از دامنه تعریف این تابع است که $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ تعریف نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلق $|x - 2|$ ، ضابطه تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم. $x = 2$ ریشه عبارت درون قدر مطلق است پس داریم:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)\sqrt[3]{x^2} & ; x \geq 2 \\ -(x-2)\sqrt[3]{x^2} & ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (x-2)x^{\frac{2}{3}} & ; x \geq 2 \\ -(x-2)x^{\frac{2}{3}} & ; x < 2 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x = 2$ پیوسته است پس ضابطه تابع $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} & ; x > 2 \\ -\sqrt[3]{x^2} - \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} & ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}} & ; x > 2 \\ \frac{-5x+4}{3\sqrt[3]{x}} & ; x < 2 \end{cases}$$

ریشه معادله $f'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 2 & : 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \\ x < 2 & : -5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی موجود نیست. $x = 0$ ریشه مخرج $f'(x)$ است پس در این نقطه تعریف نشده است؛ ازطرفی به ازای $x = 2$ داریم:

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \frac{10-4}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} \\ f'_-(2) &= \frac{-10+4}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{4} \end{aligned} \Rightarrow f'(2) \text{ موجود نیست}$$

بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به صورت $\{0, \frac{4}{5}, 2\}$ است.

ابتدا با مشتق‌گیری از تابع $g(x)$ ، وضعیت یکنوایی این تابع را تعیین می‌کنیم:

$$g(x) = x^3 + x \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین بیشترین مقدار تابع $g \circ f$ به ازای بیشترین مقدار تابع f به دست می‌آید. با تعیین علامت تابع $f(x)$ ، تغییرات آن را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^3 - 3x; x \leq 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ با شرط $x \leq 1$ ، در نقطه $x = -1$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$

بنابراین با شرط $x \leq 1$ داریم: $f(x) \leq 2$

به این ترتیب بیشترین مقدار تابع $g \circ f$ برابر است با:

$$(g \circ f)_{\max} = g(2) = 2^3 + 2 = 8 + 2 = 10$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \leq 0 \Rightarrow x^3 - x^2 \leq x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq \sqrt[3]{x^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq x \Rightarrow -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq 0$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $y = -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

برای تعیین ماکزیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی می‌یابیم. بیشترین مقدار ماکزیمم مطلق تابع خواهد بود. نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه تعریف تابع هستند که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 - (4x^3 - 12x^2 + 8x)}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2} = \frac{-4x(x-2)(x-1)}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x(x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

هیچ‌یک از سه مقدار به‌دست‌آمده مخرج تابع $f'(x)$ را صفر نمی‌کنند، بنابراین هر سه طول نقطه بحرانی تابع $f(x)$ هستند. همچنین ابتدا و انتهای بازه هم نقاط بحرانی محسوب می‌شوند، پس داریم:

$$f(0) = \frac{1}{0 + 5} = \frac{1}{5}$$

$$f(1) = \frac{1}{1 - 4 + 4 + 5} = \frac{1}{6}$$

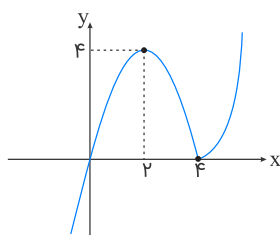
$$f(2) = \frac{1}{16 - 32 + 16 + 5} = \frac{1}{5}$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ برابر $\frac{1}{5}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

$$f(x) = x|x-4| = \begin{cases} x^2 - 4x & ; x \geq 4 \\ 4x - x^2 & ; x < 4 \end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت زیر است:

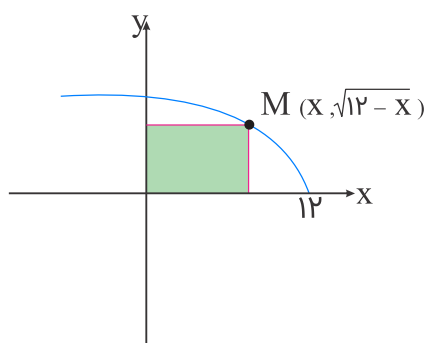


این تابع در $(4, 0)$ مینیمم نسبی و در $(2, 4)$ ماکزیمم نسبی دارد. فاصله آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{(2-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



مساحت مستطیل ساخته‌شده برابر $S(x) = x\sqrt{12-x}$ است.

$$S' = \sqrt{12-x} - \frac{x}{2\sqrt{12-x}} = 0 \Rightarrow \frac{2(12-x) - x}{2\sqrt{12-x}} = 0$$

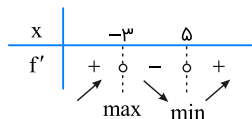
$$24 - 2x - x = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow S_{\max} = 8\sqrt{12-8} = 16$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

نقاط بحرانی تابع را در فاصله $[-۴, ۳]$ به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - ۱۵x \Rightarrow f'(x) = x^2 - ۲x - ۱۵$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} x^2 - ۲x - ۱۵ = (x - ۵)(x + ۳) = 0$$



نقاط بحرانی تابع در بازه $[-۴, ۳]$ $= -۳, -۴, ۳$

$$\left. \begin{aligned} f(-۴) &= -\frac{۶۴}{۳} - ۱۶ + ۶۰ = \frac{۶۸}{۳} \\ f(-۳) &= \frac{(-۳)^3}{۳} - ۹ + ۴۵ = ۲۷ \\ f(۳) &= \frac{۳^3}{۳} - ۹ - ۴۵ = -۴۵ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{x \in [-۴, ۳]} \begin{cases} y_{\min} = -۴۵ \\ y_{\max} = ۲۷ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

تابع $y = x + \sqrt{x}$ یک‌به‌یک است زیرا صعودی اکید است.

$$y = x + \sqrt{x} \Rightarrow y' = ۱ + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

گام اول

نقطه $c \in D_f$ را نقطه بحرانی تابع f گوئیم هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

باتوجه به گام اول، نقاطی از دامنه تابع f که در معادله $f'(x) = 0$ صدق می‌کند یا به‌ازای آن‌ها $f'(x)$ تعریف نشده است را می‌یابیم.

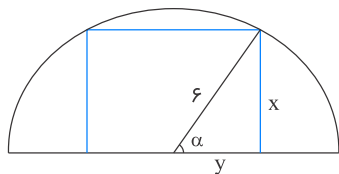
$$f(x) = (x^2 - 28)\sqrt[3]{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x^2 - 28) = \frac{6x^2 + x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{7x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 7x^2 - 28 = 0 \Rightarrow 7x^2 = 28 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

به‌ازای $x = 0$ ، مخرج تابع $f'(x)$ برابر صفر و در نتیجه این تابع تعریف نشده است؛ بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{-2, 0, 2\}$ است.

راه حل اول:

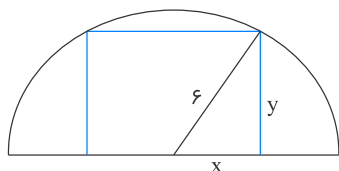


$$\sin \alpha = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \cos \alpha$$

$$\text{مساحت مستطیل} : S = x(y) = 2(\rho) \sin \alpha \cos \alpha = 2\rho \sin 2\alpha$$

مساحت وقتی ماکزیمم است که $\sin 2\alpha = 1$ باشد. بنابراین: $S_{\max} = 2\rho$
راه حل دوم:



$$x^2 + y^2 = 4\rho^2 \Rightarrow y = \sqrt{4\rho^2 - x^2}$$

$$S = 2xy = 2x\sqrt{4\rho^2 - x^2}$$

$$S' = 2\sqrt{4\rho^2 - x^2} + \frac{-2x^2}{\sqrt{4\rho^2 - x^2}} = 0$$

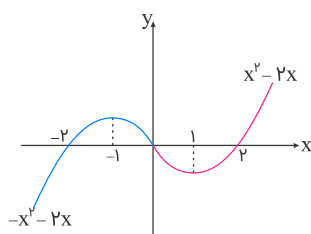
$$\Rightarrow x^2 = 4\rho^2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 2\rho^2 \Rightarrow x = \rho\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2\rho^2} = \rho\sqrt{2}$$

$$S_{\max} = 2 \times \rho\sqrt{2} \times \rho\sqrt{2} = 4\rho^2$$

$$f(x) = x|x| - 2x = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x \geq 0 : f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x < 0 : f'(x) = -2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

باتوجه به شکل، ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب برابر $(-1, 1)$ و $(1, -1)$ است، پس فاصله آن‌ها از هم برابر است با:

$$\text{فاصله} : \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه تابع روی این بازه پیوسته و $f'(x) > 0$ باشد.

گام دوم

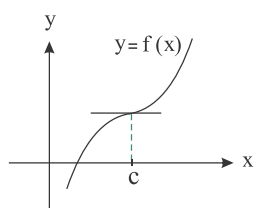
$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط $\mathbb{R}$ به جز دو نقطه $x = -1$ و $x = 1$ تعریف شده است. داریم:

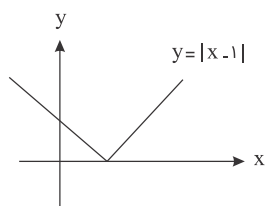
$$y = \frac{x}{1-x^2} \Rightarrow y' = \frac{(1-x^2) - (-2x)x}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2}$$

تابع y' به ازای تمام نقاط عضو دامنه تعریف تابع y ، مثبت است؛ بنابراین کافی است بازه‌ای را انتخاب کنیم که هیچ‌کدام از دو مقدار $x = \pm 1$ درون بازه نباشد، باتوجه به گزینه‌ها، نمودار تابع روی بازه $(-\infty, -2)$ صعودی است.

با آوردن مثال نقض، گزینه‌های نادرست را رد می‌کنیم.
گزینه اول: نقطه $x = c$ در نمودار زیر، یک نقطه بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست.



گزینه سوم: نقطه $x = 1$ در تابع $y = |x - 1|$ یک نقطه بحرانی است اما مشتق تابع در این نقطه تعریف نشده است.



گزینه چهارم: نقطه $x = 1$ اکسترمم نسبی تابع $y = |x - 1|$ است اما مشتق تابع در این نقطه برابر با صفر نیست.
بنابراین هر نقطه اکسترمم نسبی، قطعاً یک نقطه بحرانی تابع است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن یافته و کمترین آن‌ها را مشخص می‌کنیم. نقطه بحرانی تابع، نقاطی از دامنه تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد. چون دامنه تابع چندجمله‌ای $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است، کافی است ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را به دست آوریم:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \Rightarrow f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

هر سه مقدار فوق عضو بازه $[-1, 3]$ هستند. کمترین مقدار تابع را به‌ازای چهار مقدار $0, 2, -1, 3$ به دست می‌آوریم:

$$f(-1) = \frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 = -\frac{5}{12}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - 2^2 = -\frac{8}{3}$$

$$f(3) = \frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 3^2 = \frac{9}{4}$$

کمترین مقدار تابع روی بازه $[-1, 3]$ برابر $y = -\frac{8}{3}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

کمترین مقدار تابع، همان مینیمم مطلق تابع است. برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن، می‌یابیم. نقطه بحرانی تابع، نقاطی از دامنه تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد. ضابطه $f(x)$ یک عبارت چندجمله‌ای و $D_f \in \mathbb{R}$ است. کافی است ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را یافته و مینیمم مقدار تابع را به‌ازای آن‌ها مشخص کنیم.

$$y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 \Rightarrow y' = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x-4)(x+1)$$

$$y' = 0 \Rightarrow x(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(4) = -32 \\ y(-1) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

باتوجه به مقادیر به‌دست‌آمده، $y = -32$ کمترین مقدار تابع است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن می‌یابیم. نقطه بحرانی تابع، نقاطی از دامنه تعریف آن است که به ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

چون $[-2, 2] \notin 3$ ، پس مقدار تابع را به ازای $2, -2, -1$ محاسبه و باهم مقایسه می‌کنیم.

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$$

$$f(2) = 8 - 12 - 18 + 5 = -17$$

$$f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3$$

باتوجه به مقادیر به دست آمده، بیشترین مقدار تابع $y = 10$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدوده تغییرات مقادیر $f(x)$ بر روی بازه مشخص شده است. مقادیر $f(x)$ بر روی یک بازه بین ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع پیوسته $f(x)$ روی بازه $[-3, 1]$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را بر روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین نقاط ابتدایی و انتهایی بازه می‌یابیم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی است که $f'(x) = 0$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = x^3 - 12x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, x = -2 \xrightarrow{x \in [-3, 1]} x = -2$$

$$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) + 8 = -27 + 36 + 8 = 17$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 8 = -8 + 24 + 8 = 24 \Rightarrow \text{max مطلق}$$

$$f(1) = 1^3 - 12(1) + 8 = 1 - 12 + 8 = -3 \Rightarrow \text{min مطلق}$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ به صورت $[-3, 24]$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 &\Rightarrow x^2 - x^3 \geq -x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{x^2 - x^3} \geq \sqrt[3]{-x^3} \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{x^2 - x^3} \geq -x \Rightarrow x + \sqrt[3]{x^2 - x^3} \geq 0 \end{aligned}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\begin{aligned} x^2 \geq 0 &\Rightarrow -3x^2 \leq 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 \leq x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq \sqrt[3]{x^3} \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq x \Rightarrow x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \geq 0 \end{aligned}$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

ابتدا وضعیت یکنوایی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را روی دامنه تعریف آن‌ها بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^2 - 2x + 4, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x - 2, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1^2 - 2(1) + 4 = 1 - 2 + 4 = 3 \Rightarrow f(x) \geq 3$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
$f'(x)$	-	۰	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$g(x) = x^3 + x, \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین کمترین مقدار تابع $g \circ f$ به ازای کمترین مقدار تابع $f(x)$ به دست می‌آید، پس می‌توان نوشت:

$$f(x) \geq 3 \Rightarrow g(f(x)) \geq g(3)$$

$$\Rightarrow (g \circ f)_{\min} = g(3) = 3^3 + 3 = 27 + 3 = 30$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

از آنجایی که $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ است، پس:

$$f(x) = \sin^3 x - \sin x$$

با فرض $\sin x = t$ ، داریم $-1 \leq t \leq 1$ و در نتیجه:

$$y = t^3 - t, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$y' = 3t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y(1) = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷